동적기하프로그램을 활용한 이차곡선 최적화 문제해결에 관한 연구

A Study on the Optimization Problem Solving utilizing the Quadratic Curve using the Dynamic Geometry Software

김 정 수 · 전 보 현 · 정 영 우¹⁾ · 김 부 윤 · 이 양

ABSTRACT. The problems of optimization addressed in the high school curriculum are usually posed in real-life contexts. However, because of the instructional purposes, problems are artificially constructed to suit computation, rather than to reflect real-life problems. Those problems have thus limited use for teaching 'practicalities', which is one of the goals of mathematics education.

This study, by utilizing 'GeoGebra', suggests the optimization problem solving related to the quadratic curve, using the contour-line method which contemplates the quadratic curve changes successively.

By considering more realistic situations to supplement the limit which deals only with numerical and algebraic approach, this attempt will help students to be aware of the usefulness of mathematics, and to develop interests in mathematics, as well as foster students' integrated thinking abilities across units. And this allows students to experience a variety of math.

I. 서론

수학에서 최적화(Optimization)이론은 오래 전부터 연구되어 온 주제이다. 최적화 문제는 여러 가지 가능성 중에서 최적의 방법을 찾아내는 것으로, 예로부터 물건의 생산, 인력의 효율적인 배치, 생산된 제품의 수송방법 등 사회·경제 활

1) 교신저자

2014년 1월 29일 투고, 2014년 2월 25일 심사완료

2000 Mathematics Subject Classification: 97C80

Key Words: GeoGebra, Optimization Problem

동 분야 전반에 걸쳐 나타나는 문제들을 효율적으로 해결하려는 노력의 산물이다. 따라서 다양한 상황에 있어 최선의 의사결정방법을 찾는 이론인 최적화 이론에 대한 이해와 더불어 현실 상황에서의 적용능력은 현대시민으로 살아가는 데 있어 필수적일 것이다.

하지만 학교수학에서 최적화 문제에 대해 다루고 있는 부분은 아주 미미하며, 그마저도 단편적인 문제들이 주로 다루어지고 있다. 더욱이 그 문제들도 계산의 편의성을 고려한 나머지 너무 인위적인 수치들과 단순화된 요소들로 구성되어 있다. 이것은 개념과 원리의 이해를 위해서는 바람직할지 모르지만 그러한 수학적 지식을 적용해야 할 현실 상황에서는 어려움이 따르게 된다. 따라서 가능한 현실과 부합되는 문제 상황을 다룰 필요가 있다. 그러나 그러한 경우 문제 상황의 이해나 문제해결전략의 탐색과 실천에 있어 어려움이 따르는 것도 사실이다. 그러므로 공학적 도구의 도움을 받아 상황을 시뮬레이션하고 문제를 해결할 전략을 탐색하는 활동이 문제해결에 앞서 필요하다.

본 연구에서는 동적기하프로그램인 GeoGebra를 활용하여 이차곡선을 소재로 한 최적화 문제를 해결하는 활동을 제안한다. GeoGebra는 한글이 지원되며 무료이고 다양한 수학적 영역에 운용할 수 있어 경제적이고 효율적이라는 장점이 있다. 또한 이차곡선을 소재로 한 것은 중등교육과정에서 다루어지는 주요 개념이면서 수치적인 문제뿐 아니라 기하적인 문제도 다룰 수 있어 학생들에게 교수학적 내용과 함께 다면적이고 통합적인 학습 경험과 동기, 흥미를 줄 수 있기 때문이다.

이러한 활동은 현행 학교수학에서 다루는 내용의 범위를 넓힐 수 있으며, 학생들이 시각적·직관적으로 문제 상황을 이해하고 해결전략을 탐색하여 문제를 해결하는 수학적 경험도 할 수 있다. 이때, GeoGebra는 매우 유용한 수단이 된다. 즉, GeoGebra의 도움을 받아 문제 상황을 시각화하고, 연속적인 움직임을 관찰함으로써 최적의 상황을 쉽게 추측하고 확인할 수 있으며, 최적화 문제 상황들에 학생들이 구체적이고 직관적으로 접근할 수 있게 해주어 몇몇 체계적이고 의미 있는 원리들과 사고 습관을 계발할 수 있도록 해 준다. 더 중요한 것은 이러한 기교들이 본질적으로 연속성에 의한 추론을 사용하기 때문에 미적분학과 해석학에서 계발될 사고의 방법들에 대한 강력한 기초를 다지도록 한다는 것이다. 동적기하는 최적화 문제들에 대한 접근 방법에 새로운 생명력을 부여한다. 이를 통해 학생들이 최적화의 개념을 이해하고 현실감을 느낄 수 있도록 할 수 있으며, 간단한 수학기론으로 최적화의 개념을 이해하고 현실감을 느낄 수 있도록 할 수 있으며, 최적화와 효율성·경제성을 탐색해 보도록 함으로써 흥미 유발과 함께 보다 친근하게 수학을 접할 수 있는 기회를 제공한다.

정자욱(2012)은 GeoGebra를 활용한 수업이 수업의 목표와 일치된 개념의 이해

나 문제이해에 많은 도움이 되며, 수업내용과 목표에 맞는 적절한 GeoGebra 활용을 위해 교사는 정확히 내용을 이해하고 활용할 수 있도록 전문성을 개발하는 것이 필요하다고 하였다.

본 연구에서는 이러한 인식하에 보다 현실 상황을 고려한 최적화 문제를 구성하여 흥미를 유발시킴과 동시에 단원 간 통합적 사고와 문제해결전략 탐색능력을 신장하며, GeoGebra를 활용하여 시각적·직관적 경험을 통한 발견과 이에 대한 정당화 활동을 통해 수학적 경험의 폭과 다양성을 부여한다.

II. 본론

1. 배경적 이해

본 연구는 고등학교 1학년 ‘도형의 이동’ 단원에서 대칭이동에 관한 수업 중 일어난 아래와 같은 대화에서 시작되었다.

교사 : 한 사람이 강의 A 지점에서 말에게 물을 먹이고 B 지점으로 가는 최단거리를 구하기 위해서는 어떻게 해야 할까?

학생 1 : 강으로 표현된 직선에 B 지점을 대칭시켜 B' 를 잡고 A 지점과 B' 를 직선으로 연결하면 됩니다.

교사 : 잘했다. 그런데 그렇게 구한 직선 AB' 의 거리가 왜 최단거리가 되지?

학생 1 : 음 그냥 문제집에서 이런 문제는 직선에 대칭시켜 구하면 된다고.....

학생 2 : 삼각부등식을 이용하면 됩니다.

교사 : 그렇지. 한번 해 볼까?

학생 2 : 그런데 선생님 이것은 현실과 좀 다르지 않나요? 현실에서 강이 저렇게 똑바른 직선인가요? 곡선인 경우가 더 많은데요. 그럴 때는 어떻게 구하면 되나요?

교사 : 그렇네. 좋은 질문이네. 우리 다음에 같이 생각해보자.

직선에 대칭시켜 최단거리를 구하는 이 문제는 거의 모든 교과서나 문제집에서 다루고 있는데, 이유도 모르고 단순히 기계적으로 문제를 풀고 있는 것은 잘못이라는 생각과 현실의 문제를 해결하기 위한 수학 문제인데 수학적 개념에만 집중할 수 있도록 문제 상황을 현실성 없이 너무 단순화 시켜버린 것은 아닌가? 하는 자각을 하였다. 따라서 이렇게 단순히 기계적으로 문제를 푸는 것에 익숙하도록 지도할 것이 아니라, 실생활에서 발견할 수 있는 상황을 문제 상황으로 하여 그것을 해결하도록 지도할 수 있는 방법은 무엇일까를 고민하게 되었다. 그리고 학교수학에서 다루는 문제 상황이 알고리즘을 단순 적용하는 것만으로도 해결 가능하므로 그것에 담겨있는 수학적 개념과 원리에 대한 이해가 등한시 되는 것이라는 생각에 수치적·대수적 접근 이외의 문제 상황을 고려하기로 하였다.

이를 위해 교과서 분석을 실시하여 학생들에게 제공되고 있는 문제유형을 파악하고, 이러한 내용을 포함하면서도 보다 다양하고 현실적인 문제를 구성하였으며, GeoGebra를 이용하여 학생들이 연속적인 변화 관찰을 통해 직관적으로 문제를 이해하고 해결하는 활동을 하였다.

학생들의 문제해결과정에 도움을 주기 위해 활용된 GeoGebra는 무료로 제공되는 ‘움직이는 수학’ 소프트웨어이며, 다양한 운영체제에서 실행할 수 있다. GeoGebra는 기하, 대수, 표, 그래프, 통계, 미적분, 이산수학 등을 편리하게 다룰 수 있으며, 모든 수준의 교육에 적용이 가능하다. 이 프로그램의 특징 및 장점은 다음과 같다.

① GeoGebra는 사용법이 간단하다.

GeoGebra는 학교수학에서의 수식을 그대로 입력하기만 하면 그래프 등을 쉽게 얻을 수 있다. 그리고 모든 수학 명령어들이 다른 기하소프트웨어와는 차별되게 한글로 되어 있어, 영어 명령어에 익숙하지 않은 교사들과 중·고등학교 학생들이 쉽게 사용할 수 있어 동적기하프로그램에 대한 거부감을 최소화할 수 있다.

② GeoGebra는 학교수학에서 다룰 수 있는 다양한 대상을 쉽게 다룰 수 있다.

GeoGebra는 대수와 기하적 대상을 모두 다룰 수 있다. 보통 기하프로그램은 수학의 특정분야에 대한 기능만 제공하고 있는 반면, GeoGebra는 학교수학에서 제시되는 수학적 개념(대수, 기하, 미적분, 통계, 논리 등)을 다룰 수 있는 다양한 기능을 제공하고 있어 분야가 바뀔 때마다 교사가 다른 소프트웨어를 배울 필요 없이 GeoGebra를 통하여 교수·학습 자료를 제작할 수 있다. 학습자 입장에서도 하나의 소프트웨어와 인터페이스에만 익숙해지면 그 다음부터는 수학 학습에만 집중할 수 있다.

③ GeoGebra는 대수적 표현과 기하적 표현이 결합되어 있다.

대수창에서도 대상을 변경하는 것이 가능하며, 기하창에서도 대상을 변경하는 것이 가능하다. 이 때문에 학생들이나 교사들이 편리하게 활용할 수 있을 뿐만 아니라, 대수적 표현과 기하적 표현을 자연스럽게 연결할 수 있도록 학생들을 도울 수 있다.

④ GeoGebra는 도움말 활용이 쉽다.

도구를 선택하면 도구상자 오른쪽에 나타나는 ‘도구 도움말’을 통해서 도구의 사용법을 쉽게 알 수 있으며, 명령어를 입력창에 입력한 후 F1 키를 누르면 그에 대한 사용법의 도움말을 얻을 수 있다.

⑤ GeoGebra는 프로그램이 무료이다.

한 팩에 수 십 만원에서 수 백 만원까지 하는 동적기하프로그램 및 수학프로그램들은 가격 면에서 부담스러울 때가 있지만, GeoGebra는 개발자가 무료로 배포하고 업그레이드까지 무료로 하기 때문에 학교현장에서 전혀 부담 없이 손쉽게 사용할 수 있다.

2. 최적화에 관한 교과서 문항 분석

교육과정에서 다루어지고 있는 대표적인 최적화 문항은 다음과 같다²⁾.

<p>10 다음 그림과 같이 시냇가 위의 두 점 P, Q에서 각각 40 m, 80 m 떨어져 있는 도로 위에 농부와 소가 있고, 두 점 P, Q 사이의 거리는 50 m이다. 농부가 시냇가에 가서 물을 떠와서 소에게 먹이려고 할 때, 농부가 움직이는 최단 거리는 몇 m인가? (6점)</p> <p><황우형 외, 2008></p>	<p>19 오른쪽 그림과 같이 미술관의 한 전시실에 A, B 두 작품을 전시하려고 한다. 직사각형 모양의 전시실의 입구의 좌표가 (2, 3)이고, 출구의 좌표가 (6, 1)이다. 관람객의 이동 거리가 최소가 되도록 작품 A, B의 위치를 정할 때, 관람객의 이동 거리를 구하여라.</p> <p><이준열 외, 2008></p>
<p>3 오른쪽 그림과 같이 두 직선 도로가 45°의 각을 이루며 교차로 O에서 만나고 있다. 교차로 O에서 동쪽으로 3 km, 북쪽으로 1 km 떨어진 지점 P에 위치한 체육관에서 두 도로를 연결하는 순환 버스를 운행하기 위하여 새로운 도로 P-Q-R-P를 만들려고 한다. 순환 버스의 운행 노선 P-Q-R-P의 거리가 최소가 되도록 도로를 만들 때, 새로 만드는 도로의 길이를 구하여라.</p>	<p>4</p> <p><신향균 외, 2008></p>

2) 이 분석은 2007 개정교육과정 적용 교과서의 내용이며, 2009 교육과정에서는 수학 I의 'Ⅲ. 도형의 방정식'의 '4. 도형의 이동'에서 동일한 개념의 유사한 내용을 다룬다.

문제 해결하기

오른쪽 그림처럼 폭이 1 km인 강으로부터 각각 2 km, 4 km 떨어진 곳에 두 마을 A, B가 있다. 두 마을의 교통 편의를 위하여 마을 A에서 마을 B까지의 이동 거리가 최소가 되도록 강에 다리를 설치하려고 할 때, 이동 거리의 최솟값을 구하여 보자.
(단, 다리는 강변에 수직이 되도록 설치하고 다리의 폭은 무시한다.)

<최용준 외, 2008>

이 문항들의 본질적 풀이는 다음과 같다.

[최단 경로(Shortest Network)]

두 지점 사이의 최단거리를 구할 때는 전개도 또는 대칭을 이용하여 꺾어진 직선을 일직선으로 변형한 다음 그 최소거리를 구한다. 아래 그림의 점 A에서 직선 l 위의 한 점을 거쳐 점 B까지 가는 최단 경로는 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 이다. 여기서 A' 은 l 에 대한 A의 대칭점이다. 왜냐하면 l 위의 임의의 점 Q에 대하여

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB} = \overline{A'B}$$

$$\overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{A'Q} + \overline{QB}$$

이다. 그런데

$$\overline{A'B} \leq \overline{A'Q} + \overline{QB}$$

이므로

$$\overline{AP} + \overline{PB} \leq \overline{AQ} + \overline{QB}$$

이다. (최단 경로 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 는 점 A에서 출발한 빛이 직선 l 에서 반사되어 점 B까지 도달하는 경로와 일치한다.)

최적화 문제들은 이처럼 대부분 실생활에서 일어날 수 있는 상황을 소재로 하여, ‘대칭이동’과 ‘두 점을 잇는 최단 경로는 직선이다’는 중요한 수학적 원리를 이용하여 구하는 문제로, ‘대칭하여 직선을 이용한다’는 알고리즘적인 방법으로 해결할 수 있는 문제들이 많다.

그리고 이 문제 상황들은 현실과는 다르게 모든 변을 직선으로 가정한다거나 수치들이 계산지향적인 경우가 많다. 그 이유는 직선이 아닌 상황에서는 대칭이

동한 점을 구하기 어렵기 때문일 것이다.

또한 미래엔(2008)의 문제는 농부가 시냇가에 가서 물을 떠와서 소에게 먹이는 상황인데, 농부가 물을 가지러 강에 올 때보다는 물을 떠서 소에게 가져다 줄 때 몇 배의 힘이 더 들 수 있다. 무조건 거리의 합이 최소일 때가 최적화된 상황이라고 말하기는 어렵다. 즉, 물을 들고 갈 때 몇 배의 힘이 드는지를 고려하는 것이 더 합리적이다.

이와 같이 최적화 문제가 실생활 문제임에도 불구하고, 실생활에 필요한 응용력을 키우지 못하고, 학생들에게 수학적 호기심을 불러일으키지 못하는 이유는 위와 같은 현실과의 괴리감 때문이라고 여겨진다. 계산을 간단히 하여 수학적 상황에 좀 더 집중하게 하기 위해 현실을 이상화하는 부분이 필요하기는 하지만, 학생들이 수학에 흥미를 느끼고, 더 나아가 실제 현실 문제를 수학적으로 접근할 수 있도록 지도하기 위해서는, 단순히 수식과 계산으로 알고리즘을 지도하는 것이 아니라 시각적으로 보여주어 학생들이 스스로 직관적 고찰을 할 수 있도록 도와주는 것이 필요하다. 그럼으로써 학생들이 최적화 문제에 호기심을 가지게 되며 적용력을 기르게 할 수 있을 것이다. 하지만 실제와 최대한 비슷한 문제 상황을 도입하기는 여러 면에서 한계가 있다.

따라서 본 연구는 실생활에서 접하는 상황을 최대한 유지한 최적화 문제를 이차곡선의 기본적인 정의와 학생들이 익히기 쉬운 GeoGebra를 활용하여 해결하는 수업을 구성하였다. 그리고 문제들은 가급적 대수적인 상황을 벗어난 것을 선정하였다. 즉, 다른 방법과 다른 원리에 따른 최적화 문제해결활동을 구성하였다.

3. 이차곡선과 관련된 최적화 문제해결활동

Polya(2003)는 최적화 문제가 흥미를 끄는 주된 이유는 우리들이 매일 매일 접하게 되는 문제들을 적절하게 이상화시켜주기 때문이라고 하였다. 수업에서 사용된 문제들은 이러한 맥락에서 구성되었고, 학생들은 GeoGebra를 이용하여 문제 상황을 이해하고 전형적인 방법이 아닌 다른 해결방안을 탐색하였다.

가. 원의 직관적 고찰을 통한 최적화 문제해결

문제 1은 「수학과 개연추론」 I 권(2003) '수학에서의 귀납과 유추'에서 Polya가 제시한 것이다. 이 문제는 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다는 원의 성질을 이용하여 해결할 수 있다.

문제 1. 평면 위에 한 직선과 이 직선에 의해 나누어진 평면의 한 쪽에 두 점이 있다. 주어진 직선 위에서 가능한 가장 큰 각을 이루면서 두 점을 잇는 선분을 볼 수 있는 한 점을 찾아라.

<문제해결활동>

주어진 두 점을 A, B 라고 하고, 주어진 직선을 l 이라고 하자. 점 X 는 직선 l 위를 움직이는 점이라 하자. 이 문제를 해결하기 위해서는 $\angle AXB$ 를 관찰하여 이 각이 최대가 될 수 있는 점 X 의 위치를 찾아야 한다.

<그림 1> 최상의 관찰 점 찾기

비록 어디에서 최대의 각을 얻을 수 있는지는 아직 모른다 할지라도 어딘가 우리가 찾는 지점이 있다는 것은 알 수 있다. 우리가 찾고자 하는 각의 변화를 GeoGebra를 이용하여 시각화시켜보자. 그러면 <그림 2>와 같이 된다.

<그림 2> 관찰 각의 변화량을 나타낸 그래프

최대의 각이 되는 점을 찾기 위해 주어진 점 A, B 를 통과하는 몇 개의 원을 그린다.

<그림 3> 접선 등고선

만약 그 원이 직선과 두 점 X, X' 에서 만난다면, 같은 호에 대한 원주각은 같으므로 $\angle AXB = \angle AX'B$ 이다. 즉, 두 점 X, X' 에서 선분 AB 가 보이는 각은 같다. 그러나 이 각은 가능한 가장 큰 각은 아니다. 왜냐하면 각을 측정해 보면, 두 점 X 와 X' 사이에서 직선 l 과 교차하는 다른 원의 교점은 $\angle AXB$ 보다 더 큰 각을 만든다. 그러므로 l 과 두 점에서 만나는 원은 목적을 이룰 수 없다. 따라서 A, B 를 통과하는 원과 직선 l 이 접할 때 그 접점을 M 이라 하면 $\angle AMB$ 가 최대의 각이 된다. 즉, 최대의 각을 이루는 점은 A, B 를 통과하는 원과 직선 l 이 접하는 점이라는 것을 알 수 있다.

<그림 4>

그리고 <그림 4>와 같이 각의 꼭짓점이 점 A, B 를 포함하는 한 원 위의 호를 따라 움직일 때 각의 크기는 변화하지 않는다는 사실에서, 각의 꼭짓점이 평면 위를 움직일 때 그 각의 변화에 대하여 생각했고, 꼭짓점의 위치에 대한 이 각의 종속관계를 알게 되었다. 즉, 이 각이 움직이는 꼭짓점의 위치에 대한 함수임을 알았고, 꼭짓점의 위치는 평면 위에서의 움직임으로 취급했다. 그리고 각의 꼭짓

점이 점 A, B 를 포함하는 원 위의 호를 따라 움직일 때 각의 크기는 변하지 않음을 알게 되었다. 이러한 원의 호를 등고선이라 부르기로 한다. 이 표현은 우리가 얻으려고 하는 일반적인 관점을 강조한다.

특정한 선을 따라 변화하는 점의 함수가 일정한 상수 값일 때 이 선들은 일반적으로 함수의 등고선(contour-line)이라 불리어진다. (Polya, 2003)

위의 문제 상황과 유사한 문제(서울대학교 입학처, 2010)를 하나 더 생각해 보자.

문제 2. 그림과 같은 극장이 있고 높이 b 의 위치에 세로 길이가 a 인 면이 설치되어 있다. 관객의 시야각을 θ 로 하였을 때, 최대 시야각을 확보하기 위하여 관객은 x 의 어느 위치에 앉아야 할까? (단, 관객은 앞뒤로만 움직일 수 있다고 가정한다.)

<문제해결활동>

최대시야각은 관객이 화면을 현으로 하는 원과 x 축이 만나는 접점에 앉았을 때이다. 선분 AB 의 중점을 M 이라 하면 $\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{a}{2}$

이고, 접선의 성질에 의해 접하는 원의 반지름은 $\frac{a}{2} + b$ 이다. $\triangle AMO$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{AO}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{OM}^2$$

이 성립하고 $(\frac{a}{2} + b)^2 = (\frac{a}{2})^2 + x^2$ 이다. $x^2 = b(b+a)$ 이므

로 최대 시야각의 위치는 $x = \sqrt{b(b+a)}$ 이다. 또한, 이때의 최대 시야각의 크기 θ 는 원주각과 중심각의 성질에 의해 $\theta = \angle AOM$ 이다. 따라서

$$\tan \theta = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{b(b+a)}} = \frac{a}{2\sqrt{b(b+a)}}$$

이다.

나. 타원의 직관적 고찰을 통한 최적화 문제해결

타원은 두 정점으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 집합이다. 이 정의와 앞에서 소개한 등고선 방법을 이용하여 J. King and D. Schattschneider(1997)가 제시한 다음 문제를 해결해 보자.

문제 3.

(1) 당신은 캠핑 여행 중이며, 걸어서 텐트로 돌아가는 중이다. Y에서 있을 때, 당신의 텐트(T)에 불이 났음을 알았다. 당신은 강으로 달려가서 양동이에 물을 채워서 텐트로 돌아가야 한다. 전체 이동거리가 최소가 될 수 있도록 하

려면 당신은 물가의 어느 지점으로 가야 하겠는가?

(2) 강이 직선이 아니라 구불구불한 강이라면 전체 이동거리가 최소가 되는 지점은 어떻게 구할 수 있겠는가?

<문제해결활동>

문제 3의 (1)에 대한 학교수학에서의 풀이는 다음과 같다.

Y를 강가 너머로 반사시켜 한 점 Y'를 얻고 Y'와 T를 연결한다. 선분 Y'T가 물가와 만나는 곳이 이동거리 즉, 거리의 합이 최소가 되는 지점이다. 이것은 대칭이동과 두 점을 잇는 최단거리는 직선이라는 사실을 이용한 풀이이다.

여기에서 두 점이 고정되어 있고, 거리의 합이 최소라는 점에 착안하여 등고선 방법을 생각해 보자. 거리의 합이 최소가 되는 점을 찾는 문제이므로 교사들은 학생들에게 거리의 합에 관해 생각해 보기를 원한다.

P가 물가를 따라 앞뒤로 움직임에 따라 연속적으로 변화하는 양으로서의 그 합을 생각해 보자. Y와 T에서의 거리의 합이 일정한 점들의 자취는 초점이 Y와 T인 타원이고, 학생들은 핀과 실로써 이 타원을 작도할 수 있다. 그러나 타원을 GeoGebra에서 작도했을 때 더 쉽게 연속적인 변화를 볼 수 있다. 그림과 같이

적당한 타원을 그리고 이때 강과 만나는 점을 P 라고 하자. 타원 내부에 포함되는 물가의 점들이 있고, 이 점들에 대해서는 Y 와 T 에서 더 작은 거리의 합을 가지므로 P 는 분명 최적의 점은 아니다.

<그림 5>

동적작도는 P 를 물가를 따라서 움직여 어떻게 타원이 커지고 작아지는지 연구할 수 있도록 해준다. 여기에서 타원이 물가에 접할 때, 그 접점에서 거리의 합이 최소가 됨을 알 수 있다. 초점이 같은 타원의 연속적인 변화를 통해 이런 사실을 발견하는 것은 매우 흥미롭다.

이 문제에서 거리의 합 $\overline{PY} + \overline{PT}$ 를 P 가 물가를 따라 움직일 때의 P 의 함수로 보자. P 가 어떤 직선 l 을 따라가면, 함수 $P \rightarrow \overline{PY} + \overline{PT}$ 의 최솟값은 등고선(타원 중의 하나)이 l 에 접하는 곳에 있게 될 것이다(그림 6).

<그림 6>

이러한 사고의 방법은 매우 강력하며, 직선의 수로(水路) l 뿐만 아니라 구불구불한

강 C 를 포함하는 넓은 범위의 최적화 문제를 풀기 위하여 사용될 수 있다(그림 7). 즉, 문제 3의 (2)를 해결할 수 있는 아이디어를 갖게 되는 것이다.

<그림 7>

$P \rightarrow \overline{PY} + \overline{PT}$ 의 최솟값은 Y 와 T 를 초점으로 하는 타원이 강 C 에 접할 때 그 접점에서 갖게 될 것이다.

타원과 등고선 방법을 활용한 또 다른 문제를 살펴보자. 역시 J. King and D. Schattschneider(1997)가 제시한 문제이다.

문제 4. 수영장 문제

당신은 원형의 수영장 A 지점에 있고, 당신의 선글라스를 수영장의 가장자리에 갖다놓고, 그런 다음 B 지점에 있는 친구에게 가기를 원한다. 경로가 최소가 되기 위하여 수영장의 가장자리의 어느 곳을 거쳐야 하는가?

<문제해결활동>

함수 $P \rightarrow \overline{PA} + \overline{PB}$ 가 정의되도록 원을 따라 움직이는 P 를 상상하자. A 와 B 에서 똑같은 “거리의 합”을 갖는 점들의 등고선인 타원을 작도할 수 있다(그림 8).

<그림 8>

이번에도 P 의 이 위치는 최적이지 않다. 왜냐하면 타원 안에 원 위의 점들이 있기 때문이다. 그러나 이 경우, 함수의 등고선의 움직임은 더 다양하다. 타원과 원이 다양한 방법으로 접할 수 있기 때문이다. <그림 9>는 이러한 예들이다.

<그림 9>

불타는 텐트 문제를 소개했을 때, 빈 양동이가 가득 찬 양동이보다 더 빨리 달릴 수 있다는 사실을 무시했었다. 이 사실을 고려한 문제를 생각해 보자.

문제 5. 최적화 문제에 대한 타원의 확장

당신이 물이 가득 찬 양동이를 가지고 가는 것보다 빈 양동이를 가지고 가는 것이 2배 빠르다고 가정하자. 그러면 강에서 텐트까지의 거리는 당신과 강까지의 거리의 절반이다. 그러므로 당신은 $2\overline{PA} + \overline{PB}$ 가 최소가 되는 강가의 점 P 를 찾으려 한다. 어떻게 하면 될까?

<문제해결활동>

물이 가득 찬 양동이를 가지고 가는 것보다 빈 양동이를 가지고 가는 것이 2배 빠르다고 하자. 그러면 강에서 텐트까지의 거리는 당신과 강까지의 거리의 절반이다. 그러므로 $2\overline{PA} + \overline{PB}$ 가 최소가 되는 강가의 점 P 를 찾으려는 것이다. 함수 $P \rightarrow 2\overline{PA} + \overline{PB}$ 에 대한 등고선들은 ‘준-타원들(Quasi-ellipses)’³⁾이다(그림 10). 그러므로 정확한 해는 강이 준-타원에 접하는 점이다. 등고선 기법으로 함수값을 최소화하는 점들의 위치를 직관적으로 찾아낼 수 있다. 하지만 이는 교육 과정을 넘어서므로 여기서는 자세한 설명을 생략한다.

<그림 10>

다. 접원에 의해 그려지는 쌍곡선의 직관적 고찰을 통한 최적화 문제해결

문제 6은 축구선수가 공을 몰고 골대를 향해 달려올 때, 최적의 슈팅각을 갖는 지점을 찾는 문제로 실제 현실에서 매우 흥미로운 소재이다(정석영 · 정순진, 2011).

3) 준-타원들(Quasi-ellipses) : 두 정점 A, B 에 대하여 $mPA + nPB$ (m, n 은 양의 실수)의 값이 일정한 점들의 집합

문제 6. 최적의 슈팅각을 구하기

(1) 축구선수가 골대를 향해 골라인과 수직인 방향으로 공을 드리블하고 있다. 현재 수비수는 없고 연습상황이다. 또한, 이 선수는 힘이 좋아 골대와의 거리는 별 문제되지 않는다고 한다. 이때, 특정한 시간에 선수의 발끝은 슈팅각(골대와 선수를 연결하는 두 변의 사잇각)을 가지게 된다. 선수는 그 각 안으로 공을 차면 골인이 되고 아니면 노골이 될 것이다. 물론, 각이 크면 클수록 좋다. 최적의 슈팅각을 갖는 지점은 어디인가 존재한다. 어디일까?

(2) 선수가 달려가는 직선이 골라인과 수직을 유지하며 변화할 때 최적의 슈팅포인트 P가 그리는 자취는 무엇이 될까?

<문제해결활동>

문제 6의 (1) 원주각을 이용해서 최적의 슈팅지점을 설명하고 작도해 보자.

문제해결을 위해서 골라인을 향해 처음 출발할 때 슈팅 포인트와 골대가 이루는 슈팅 각을 살펴보면, 아래 그림과 같이 처음에는 작지만 골라인에 가까워질수록 증가하고, 더 가까워지면 각이 다시 줄어든다는 것을 알 수 있다.

선수의 진행방향에 따른 슈팅각의 변화	선수의 진행 방향

위 그림의 변화를 유심히 관찰하면 비록 어디에서 최대의 각을 얻을 수 있는지는 모르지만 어딘가 최적의 지점이 있다는 것을 직관적으로 알 수 있다. GeoGebra를 이용하여 달려오면서 변화하는 슈팅각의 크기를 시각화 해보면 <그림 11>과 같다.

<그림 11>

<그림 12>와 같이 골대를 현으로 하는 원이 주어졌을 때 이 현에 대한 원주각은 모두 일정하다. 그러나 원의 크기가 변하면 원주각의 크기도 변한다. 또한 골대를 현으로 하는 원이 주어졌을 때, 슈팅포인트가 원의 외부에 있으면 각이 작고, 원의 내부에 있으면 커지는 것을 알 수 있다.

이것은 같은 현을 가지는 여러 원들 중에서 원의 반지름이 작으면 작을수록 그 휘어지는 정도(곡률)가 커지기 때문이다. 그렇기 때문에 축구선수가 일직선으로 달려올 때 선수가 달려오는 직선과 만나면서 두 골대를 현으로 하는 가장 작은 반지름을 가지는 원은 직선에 접하는 원이어야 한다. 그러므로 직선에 접할 때까지 원의 반지름을 줄여 나가면 슈팅각이 최대인 지점과 만날 수 있을 것이라고 직관적인 고찰을 할 수 있다.

<그림 12>

그럼, 이 접점을 실제로 작도해 보자. 골대(선분 AB)를 현으로 가지므로 구하는 원의 중심 C는 골대의 수직이등분선 위에 존재한다. 그리고 선수가 달리는 직선이 접선이 되므로 이 직선과 선분 AB의 수직이등분선은 평행하며 따라서 거리 x 를 가지게 된다. 그리고 골대의 양 끝점 중 한 점(A)을 중심으로 반지름 x 인 원과 수직이등분선과의 교점이 중심 C가 된다. 이 점 C를 중심으로 하고 반지름 x 인 원과 직선이 만나는 점이 최적의 슈팅포인트(P)가 된다 (그림 13).

<그림 13>

우리는 대부분 수치적 접근을 하는 문제를 접하고 있으나, 이처럼 수치가 주어지지 않은 상황적 문제를 해결하는 것은 또 다른 최적화 문제에 대한 수학적 경험을 줄 수 있다.

문제 6의 (2) 선수가 달려가는 직선이 골라인과 수직을 유지하며 변화할 때 최적의 슈팅포인트 P 가 그리는 자취는 흥미롭게도 골대인 선분 AB 를 주축으로 하는 쌍곡선의 자취를 그리게 된다. 이는 그림 14와 같이 골대의 중점을 원점으로 하는 좌표평면을 생각해 보면 쉽게 알 수 있다. 골대의 길이를 2로 두고 점 P 를 (x, y) 라 두면 피타고라스 정리에 의해 $y^2 + 1 = x^2$ 임을 알 수 있다. 따라서 점의 자취는 $x^2 - y^2 = 1$ 인 쌍곡선의 일부가 됨을 알 수 있다. 이 문제는 좌표를 설정하고 자취의 식을 구하는 활동을 통해 해석기하학의 의의에 대해서도 인식할 수 있다.

<그림 14>

라. 포물선의 직관적 고찰을 통한 최적화 문제해결

포물선은 정직선과 한 정점과의 거리가 같은 점들의 집합이다. 이 정의를 이용하여 버뮤다 삼각지에서 일어나는 통신장애에 관련된 실생활 문제를 해결해 보자.

문제 7. 오른쪽 그림과 같이 버뮤다 제도를 한 점으로 하고, 플로리다와 푸에르토리코를 잇는 선을 밑변으로 하는 삼각형의 해역을 “버뮤다 삼각지역”이라 한다. 이 구역에서는 전자기기들이 작동되지 않아 오래 전부터 많은 선박, 항공기 등이 실종되었으므로 버뮤다 삼각지역을 “마의 바다”라고도 부른다.

버뮤다 삼각지역과 같이 전자기기가 작동되지 않는 지역을 “위험지역”이라 하자. 위 그림에서 “위험지역”은 버뮤다 삼각지대라 불리는 삼각형 내부와 경

계에 분포한다. “위험지역” 내에 전자기기들이 작동될 수 있는 점 또는 지역을 “안전지역”이라 하자. “안전지역”은 “위험지역” 내의 한 정점 X 에서 어느 한 경계선과의 거리가 같은 점들의 집합이다. 안전지역들이 두 개 이상 겹치는 점 또는 지역을 “최적화된 안전지역”이라 하자.

(1) 그림과 같은 정삼각형의 내부와 경계가 “위험지역”이고, 이때 무게중심을 X 라 하자. 이 “위험지역”에서 “최적화된 안전지역”은 몇 군데이며, 그 위치는 어디인지 설명하시오.

(2) 그림과 같은 일반적인 삼각형의 내부와 경계가 “위험지역”이고, 한 정점을 X 라 하자. 이 “위험지역”에서 “최적화된 안전지역”은 몇 군데이며, 그 위치는 어디인지 설명하시오. 점 X 의 위치를 변화시킨다면 “최적화된 안전지역”의 위치와 개수는 어떻게 되는지 설명하시오.

<문제해결활동>

문제 7의 (1)에서 최적화된 안전지역은 경계와 무게중심 X 와의 거리가 같은 지점들의 집합을 찾고, 그 집합들의 교점을 찾는 것이다. 이러한 것들을 GeoGebra를 통해 직관적으로 관찰할 수 있다.

<그림 15> 정삼각형에서의 안전지역의 위치와 개수

이 지역에서의 최적화된 안전지역은 세 군데이며, 이를 찾는 과정을 예를 들어 설명하면 최적화된 안전지역 a 는 정삼각형의 영역 안에서 경계 $\overline{BC}$ 와 무게중심

X 로 만들어지는 집합과 $\overline{AB}$ 와 무게중심 X 로 만들어지는 집합과의 교점으로 찾아낼 수 있다. 이러한 지역을 찾아내는데 있어 정직선과 한 정점과의 거리가 같은 점들의 집합인 포물선은 훌륭한 도구가 된다.

문제 7의 (2)의 답은 일반적인 삼각형에서의 위험지역 내부의 점의 변화에 따른 안전지역의 위치와 개수 변화를 그림과 같이 관찰하여 직관적으로 얻었다.

<그림 16> 일반적 삼각형의 점 X 의 위치에 따른 최적화된 안전지역의 변화

위의 같이 삼각형의 내부의 점 X 의 위치에 따라 최적화된 안전지역의 개수와 위치가 변하는 것을 관찰할 수 있으며, 처음 주어진 삼각형의 모양에 따라서 최적화된 안전지역의 위치와 모양은 더 다양하게 변화함을 확인할 수 있다.

결론적으로 학생들은 GeoGebra를 사용함으로써 점 X 의 위치에 따라 최적화된 안전지역의 위치와 개수가 다양하게 변함을 직관적으로 관찰할 수 있었다. 삼각형 모양으로 주어진 지역 외에도 다각형, 원 등 변화 가능한 다양한 모양이 존재한다. 이때 학생들이 수학적으로 계산하여 안전지역을 찾아내는 것은 거의 불가능하지만, 이 문제는 이차곡선(포물선)과 관련된 문제이므로 규칙성을 가지고 있고, GeoGebra를 활용함으로써 이 문제 상황을 직관적으로 학생들이 접근할 수 있기 때문에 문제해결이 가능해진다.

III. 결론

학교수학에서 다루는 최적화 문제는 수치적·대수적 상황에 국한되어 학생들이 알고리즘만 익히면 해결할 수 있는 것이 대부분이었다. 이러한 문제는 ‘대칭하여 직선을 이용한다’와 ‘삼각부등식’이란 수학적 원리를 익히게 하는데 최적화되어 있으나 현실 상황에서의 적용도는 미흡하다는 한계를 가지고 있다. 따라서 학생들은 최적화 문제를 다루는 의의를 충분히 인식할 수 없으며, 이러한 인위성으로 인해 학생들은 수학에 대한 실용성을 이해하지 못하게 되고, 물론 수학에 대한 흥미도 가지기 어렵다. 더구나 현실 상황에서 최적화 문제는 양적 접근, 질적 접근이 모두 가능한 경우도 있으나, 그렇지 못한 상황도 있어 다양한 해결전략과 관점이 필요하다.

본 연구에서는 학교수학의 한계를 보완하고자 ‘대칭하여 직선을 이용한다’와 ‘삼각부등식’이란 수학적 원리 이외의 원리와 해결전략을 필요로 하는 최적화 문제를 수업에 도입하고, 학생들의 이해와 문제해결을 돕는 도구로 동적기하프로그램인 GeoGebra를 활용한 문제해결활동을 하였다.

선정된 최적화 문제해결에 있어서 이차곡선의 정의, 예를 들어 타원의 ‘두 정점으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 집합’이라는 정의를 이용하여 두 정점 A, B 로부터 거리의 합이 같은 점들의 집합을 등고선이라는 개념으로 정의하고, $\overline{PA} + \overline{PB} = k$ (상수)에서 k 를 연속적으로 변화시켜 보았을 때, 언제 거리의 합이 최소가 되는지를 학생들이 직관적으로 발견할 수 있는 등고선 방법을 활용하였다. 이때 GeoGebra를 활용하여 등고선의 움직임을 연속적으로 구현하게 하여 학생들이 수학적 개념을 형성하고 사고력을 향상시키는데 도움을 주고자 하였다.

이처럼 이차곡선의 직관적인 고찰을 통해 최적화 문제를 해결함으로써 학생들이 최적화 문제에 대한 기하적인 새로운 접근 방법을 익히고, 이차곡선에 대한 보다 깊은 이해를 할 것이다. 그리고 최적화 문제와 별개로 배웠던 이차곡선을 활용함으로써 수학 교과와 단원 간의 통합적이고 창의적인 사고력을 기르며, 수학 학습에 있어서 신선함을 느끼는 기회가 될 것이다. 뿐만 아니라 학생들이 조작하기 쉬운 GeoGebra를 활용하여 실생활에서 고려되어야 할 여러 가지 복합적인 상황을 시뮬레이션 해봄으로써 실제적인 수학을 배우고, 수학에 대한 유용성과 흥미를 느끼게 될 것이다.

본 연구 자료는 수학의 상위권 학생들을 대상으로 하는 심화동아리와 같은 수업에서 창의적인 지도소재가 될 수 있을 것으로 기대된다. GeoGebra를 활용함으로써 자기주도적 탐구학습을 향상시키는 물론, 수학적 문제를 다양한 측면에서 관찰하게 하는 태도와 수학적 의사소통 능력을 향상시키는 데도 도움이 될 것이

다.

본 연구 결과의 활용과 기여도는 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 이차곡선을 활용하여 최적화 문제를 기하학적으로 해결해 보는 활동을 통해 기존의 수치적·대수적 상황을 벗어나 다양한 문제해결전략을 탐색할 수 있는 상황을 다룰 수 있다. 이때 GeoGebra는 학생활동을 도울 수 있는 중요하고 유용한 수단이 된다.

둘째, 문제이해와 문제해결탐색 그리고 문제해결이라는 일련의 문제해결활동을 하는 과정에서 폭넓고 창의적이며 통합적인 사고를 신장시킬 수 있다.

셋째, 수학이 실생활에 활용되는 구체적인 예로써, 고등학교 수학 심화반 학생들을 지도하는 교사들이 현장에서 심화 수업을 하는데 도움을 줄 수 있다.

본 연구에서는 지도소재에 대한 제안을 주요 목표로 삼았으므로, 추후 구체적인 수업내용과 수업 효과에 대한 연구가 필요할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

- [1] 서울대학교 입학처(2010), 2010학년도 서울대학교 구술 면접 기출 문제, 서울대학교.
- [2] 신항균 외 4명(2008), 고등학교 수학 익힘책, 지학사.
- [3] 우정호 외 9명(2008), 고등학교 수학 익힘책, 두산동아.
- [4] 이상희·이종학·김원경(2012), 부등식 영역의 최대·최소 문제에서 학생들의 수학적 사고에 GeoGebra가 미치는 영향 : 등고선 개념을 중심으로, 교원교육 제28권 제4호, pp.1-44, 한국교원대학교 교육연구원.
- [5] 이준열 외 6명(2008), 고등학교 수학 익힘책, 천재교육.
- [6] 정석영·정순진(2011), Soccer Angles와 이차곡선, 한국수학교육학회 제 47회 전국수학교육연구회프로시딩, 251-258.
- [7] 정자옥(2012), GeoGebra를 이용한 미적분 수업의 질적 사례연구, 건국대학교 교육대학원 석사학위논문.
- [8] 최용준 외 4명(2008), 고등학교 수학 교과서, 천재교육.
- [9] 황우형 외 10명(2008), 고등학교 수학 익힘책, 미래엔.
- [10] 황혜정 외 5명(2001), 수학교육학신문, 문음사.
- [11] G. Polya 지음, 이만근 외 4명 옮김(2003), 수학과 개연추론 I 권 수학에서의 귀납과 유추, 교우사.

- [12] James King and Doris Schattschneider(1997), Geometry Turned On!: Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research, Cambridge University Press.
- [13] http://www.cut-the-knot.com/Generalization/fermat_point.html

Kim, Jung Soo
Pusan Science High School
Busan, 609-310, Republic of Korea

Jeon, Bo Hyun
Centem High School
Busan, 612-050, Republic of Korea

Chung, Young Woo
Kyungsung University
Busan, 608-736, Republic of Korea
e-mail : young38woo@daum.net

Kim, Boo Yoon
Pusan National University
Busan, 609-735, Republic of Korea

Lee, Yang
Pusan National University
Busan, 609-735, Republic of Korea