이산시간 상태지연 시스템을 위한 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 고장검출 및 분리

$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Fault Detection and Isolation for Discrete-Time Delayed Systems

지 성 철, 이 호 재*
 (Sung Chul Jee¹ and Ho Jae Lee¹)

¹School of Electronic Engineering, Inha University

Abstract: In this paper, an $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fault detection and isolation (FDI) observer design problem is investigated for discrete-time delayed systems. To that end, a bank consisting of the sensor's number of observers is introduced. Each residual should be sensitive to a certain partial group of faults, but robust against the disturbance as far as possible. We formulate this multiobjective FDI problem as $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ observers design problem. Sufficient design condition is expressed as iterative linear matrix inequalities. The fault is then detected and isolated by evaluating the residuals through an FDI decision logic. A computer simulation is provided for verification of the proposed technique.

Keywords: delayed system, fault detection and isolation (FDI), observer, $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ performance

I. 서론

최근 유비쿼터스 센서 네트워크(ubiquitous sensor network)의 급속한 확산과 더불어 자율 컴퓨팅(autonomic computing)과 같은 컴퓨터 기반의 제어시스템의 역할이 중요해지고 있다. 자율 컴퓨팅 시스템은 기존의 컴퓨팅 시스템에 제어시스템의 능동적 피드백을 적용하여 자원을 배분하거나 환경 변화에 적응하는 등 스스로 판단하고 제어임무를 수행한다[1]. 따라서 과거 컴퓨팅 시스템보다 처리해야 할 연산량이 많고 연산 과정이 복잡하기 때문에 시간지연 현상이 빈번하게 발생하며 이는 제어시스템의 신뢰도와 안정성에 악영향을 미친다. 지난 수 년간 이러한 시간지연 문제를 해결하기 위해 다양한 연구가 진행되었다[2-9,18,19].

그 중 고장진단(fault diagnosis) 문제는 제어공학 분야에서 가장 중요한 문제 중 하나로 인식되고 있다. 고장진단은 고장의 유무를 판단하는 고장검출(fault detection), 고장의 발생 위치를 판단하는 고장분리(fault isolation), 고장의 발생 시간, 크기, 특성을 판단하는 고장식별(fault identification)의 과정을 포함한다.

특히 모델 기반의 고장검출 기법은 기존의 잘 개발된 관측기 설계 이론을 고장검출 문제에 적용할 수 있다는 장점이 있어 널리 사용된다[6-9]. 모델 기반 기법에서 관측기는 추정된 오차로부터 잔여오차(residual)를 생성하고 고장 여부는 고장 판단 논리(fault decision logic)에 의해 결정된다[10]. 한편 고장분리는 고장의 특정 집단에 민감하도록 설계된 관측기로부터 잔여오차를 생성하고 그것에 상응하는 적절한 판단 논리를 사용한다[11]. 고장분리는 고장검출 이론을 직접적으로 응용한 분야임에도 불구하고 고장검출과 같이 다양한 시스-

템에 적용되지 않았으며 특히 시간지연 시스템에 대한 연구 성과는 아직 전무한 상태이다.

연속 시간지연 시스템을 위한 고장검출 문제는 이미 많은 연구에서 언급되었다[2-5]. 반면 이산 시간지연 시스템에 대한 연구는 거의 진행되지 않았는데 자율컴퓨팅과 같이 실생활에 밀접한 관계를 맺고 있는 이산 시간지연 시스템의 고장 문제는 반드시 다루어져야 할 연구 주제이다.

다양한 제어 문제에서 입력에 대한 출력의 강인성을 보장하기 위한 성능 지표로 $\mathcal{H}_\infty$ 를 사용한다[12,13]. 이와는 반대로 $\mathcal{H}_2$ 성능은 입력에 대한 출력의 민감도를 나타낸다. 고장검출 문제에서는 고장에 대한 잔여오차의 $\mathcal{H}_2$ 성능을 높일수록 고장 여부의 판단이 용이하다. 따라서 외란과 고장을 동시에 고려하는 경우 외란의 영향을 최소화하고 고장을 최대한 반영하는 다목적 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 설계 기법이 필요하다[10,14-16].

본 논문은 이산시간 상태지연 시스템의 고장검출 및 분리 문제를 논한다. 이를 위하여 센서의 수와 같은 수의 관측기로 구성된 뱅크(bank)를 도입한다[11]. 각 관측기는 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 성능을 고려하여 외란에 강인하지만 고장의 특정 집합에는 민감하도록 설계된다. 설계조건은 선형행렬부등식을 포함한 반복알고리즘으로 제시된다.

본 논문은 표준 표기법을 따른다. $A = A^T < 0$ 는 음한정 행렬을 의미한다. $\|x\|_2$ 는 유클리디안 놈을 의미하며 $\|x\|_1$ 는 l_1 놈을 의미한다. *는 대칭행렬의 대각 전치요소를 의미한다. 수식의 간략한 표현을 위해 생략법 $\text{He}\{S\} := S + S^T$ 이 사용된다. 임의의 벡터 $y \in \mathbb{R}^m$ 과 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$y^{\bar{p}} := \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{p-1} \\ y_{p+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad C^{\bar{p}} := \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{p-1,1} & \cdots & C_{p-1,n} \\ C_{p+1,1} & \cdots & C_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 5. 3., 수정: 2011. 8. 17., 채택확정: 2011. 9. 2.

지성철, 이호재: 인하대학교 전자공학부

(jeesch@inha.edu/mylchi@inha.ac.kr)

※ 이 논문은 인하대학교의 지원과 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임 (2011-0005656).

II. 이산시간 상태지연 시스템

다음 형태의 시간지연을 가지는 자율 컴퓨팅 시스템을 고려하자.

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bx_{k-d_k} \\ y_k = Cx_k + Dw_k + f_k \end{cases} \quad (1)$$

여기서 $x_k \in \mathbb{R}^n$ 는 상태, $y_k \in \mathbb{R}^m$ 는 출력, $d_k \in \mathbb{Z}_{[d_L, d_U]}$, $d_L, d_U \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $d_L < d_U$ 는 시변 지연시간이며 알 수 있음을 가정한다. $w_k \in \mathbb{R}^l$ 와 $f_k \in \mathbb{R}^m$ 는 $l_2[0, \infty)$ 공간에 속하며 각각 외란과 고장을 의미한다.

고장의 검출 및 분리를 위해 m 개의 관측기로 구성된 관측기 뱅크가 사용된다. p 번째 관측기는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + B\hat{x}_{k-d_k} - L(y_k^{\hat{p}} - C^{\hat{p}}\hat{x}_k) \\ \hat{y}_k = C\hat{x}_k \\ r_k = H(y_k^{\hat{p}} - C^{\hat{p}}\hat{x}_k) \end{cases} \quad (2)$$

여기서 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ 는 추정된 상태, $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ 는 관측기 출력, $r \in \mathbb{R}^{m-1}$ 는 잔여오차다. 행렬 L 과 H 는 각각 설계되어야 할 관측기와 잔여오차 이득이다[11].

초기상태 $x_0 = \hat{x}_0 = 0$ 를 가정하자. 상태추정오차 $e_k := x_k - \hat{x}_k$ 를 정의하면 오차동역학은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{cases} e_{k+1} = (A + LC^{\hat{p}})e_k + Be_{k-\tau} + LD^{\hat{p}}w_k + Lf_k^{\hat{p}} \\ r_k = HC^{\hat{p}}e_k + HD^{\hat{p}}w_k + Hf_k^{\hat{p}} \end{cases} \quad (3)$$

식 (1)과 (3)으로부터 다음의 확장된 시스템을 구성할 수 있다[12].

$$\begin{cases} z_{k+1} = \hat{A}z_k + \hat{B}z_{k-d_k} + \hat{L}D^{\hat{p}}w_k + \hat{L}f_k^{\hat{p}} \\ r_k = H\hat{C}z_k + HD^{\hat{p}}w_k + Hf_k^{\hat{p}} \end{cases} \quad (4)$$

여기서 $z_k = \text{col}\{x_k, e_k\}$, $\hat{A}_L = \hat{A} + \hat{L}\hat{C}$ 이고

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & A \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B & * \\ 0 & B \end{bmatrix}, \hat{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}, \hat{C} = [0 \quad C^{\hat{p}}]$$

이다.

정의 1 ($\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_\infty$ 성능): 오차동역학 (3) 또는 확장된 시스템 (4)에서 $f^{\hat{p}}$ 에서 r 까지 $\mathcal{H}_\infty$ 성능은 다음과 같이 정의한다[10].

$$\|\mathcal{O}\|_- := \inf_{f_k^{\hat{p}} \in l_2 \setminus \{0\}} \frac{\|r_k\|_{l_2}}{\|f_k^{\hat{p}}\|_{l_2}} = \inf_{f_k^{\hat{p}} \in l_2 \setminus \{0\}} \frac{\sqrt{\sum_{\tau=0}^{\infty} \|r_\tau\|^2}}{\sqrt{\sum_{\tau=0}^{\infty} \|f_\tau^{\hat{p}}\|^2 d\tau}}$$

또한 w 에서 r 까지 $\mathcal{H}_\infty$ 성능을 다음과 같이 정의한다.

표 1. 고장검출 및 분리 논리.

Table 1. Fault detection and isolation logic.

상태	판단
$\begin{cases} J_{r_p} \leq J_{th_p}, p \in \mathcal{J}_M \\ J_{r_q} > J_{th_q}, p \in \mathcal{J}_M \setminus \{p\} \end{cases}$	p 번째 고장이 검출 및 분리됨.
$J_{r_p} \leq J_{th_p}, \text{ for all } p \in \mathcal{J}_M$	고장이 검출되지 않음.
그 밖의 경우	고장이 검출되었지만 분리되지 않음.

$$\|\mathcal{O}\|_\infty := \sup_{w \in l_2 \setminus \{0\}} \frac{\|r_k\|_{l_2}}{\|w\|_{l_2}} = \sup_{w \in l_2 \setminus \{0\}} \frac{\sqrt{\sum_{\tau=0}^{\infty} \|r_\tau\|^2}}{\sqrt{\sum_{\tau=0}^{\infty} \|w_\tau\|^2}}$$

식 (3)에서는 p 번째 요소를 제외한 센서신호가 잔여오차에 반영된다. 따라서 p 번째 관측기가 $\mathcal{H}_\infty$ 성능을 만족한다면 r 에 미치는 $f^{\hat{p}}$ 의 영향이 명확하게 나타난다.

정의 2 (고장검출 및 분리 논리): 다음과 같은 잔여오차 평가함수

$$J_r := \sqrt{\frac{1}{K_W} \sum_{\tau=k-K_W+1}^k \|r_\tau\|^2}$$

와 문턱함수

$$J_{th} := \sup_{w \in l_2, f=0} \sqrt{\frac{1}{K_W} \sum_{\tau=k-K_W+1}^k \|r_\tau\|^2} + \inf_{w=0, f \in l_2} \sqrt{\frac{1}{K_W} \sum_{\tau=k-K_W+1}^k \|r_\tau\|^2}$$

를 정의한다. 여기서 $K_W \in \mathbb{Z}_{>0}$ 는 상수 시간 창이다. J_r 과 J_{th} 가 p 번째 잔여오차로부터 유도된 경우 J_{r_p} 과 J_{th_p} 라고 표기하자. 표 1은 고장검출 및 분리 논리를 정의한다.

문제 1 (β, γ - $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_\infty$ 고장검출 및 분리): 주어진 $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 관측기 (2)의 이득행렬들 L, H 를 구하라.

C1) $f=0, w=0$ 인 경우 (4)는 점근적으로 안정하다.

C2) $w=0$ 인 경우 초기 값 $x_0 = \hat{x}_0 = 0$ 에 대하여 $\|\mathcal{O}\|_- > \beta$ 를 만족한다.

C3) $f=0$ 인 경우 초기 값 $x_0 = \hat{x}_0 = 0$ 에 대하여 $\|\mathcal{O}\|_\infty < \gamma$ 를 만족한다.

III. 주요결과

본 논문의 주요결과를 유도하기 위하여 다음의 보조정리를 사용한다.

보조정리 1 [17]: 주어진 적절한 크기의 행렬들 $Q, R, \bar{Q}, \bar{R}$ 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} Q^T \\ R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix} \succ \begin{bmatrix} \text{He}\{Q^T \bar{Q}\} & * \\ R^T \bar{Q} + \bar{R}^T Q & \text{He}\{R^T \bar{R}\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{Q}^T \\ \bar{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{R} \end{bmatrix}$$

보조정리 2 [2,5]: 임의의 벡터 a, b 에 대하여 다음을 만족하는 적절한 크기의 행렬 $X = X^T \succ 0, Z = Z^T \succ 0, M, N, Y$ 가 존재한다.

$$-2a^T N b \leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & * \\ Y^T - N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

정리 1 ((β, γ) - $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_\infty$ 고장검출 및 분리): 주어진 $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대하여, 다음 행렬부등식을 만족하는 행렬들 $W, M, Y, P := \text{blockdiag}\{P_1, P_2\} = P^T \succ 0, Q = Q^T \succ 0, X = X^T \succ 0, Z = Z^T \succ 0, \bar{H}^T = \bar{H} \succ 0$ 가 존재한다면 관측기 (2)는 (β, γ) - $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_\infty$ 고장검출 및 분리 성능을 가지며 오차시스템 (3)은 점

근적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} -P + d_U X + \text{He}\{Y\} + (d_U - d_L + 1)Q & * & * \\ -Y^T & -Q & * \\ P\hat{A} + M\hat{C} & P\hat{B} & * \\ P\hat{A} + M\hat{C} - P & P\hat{B} & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -P & * & * \\ 0 & -d_U^{-1} P Z^{-1} P & * \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} -P + d_U X + \text{He}\{Y\} + (d_U - d_L + 1)Q & * & * \\ -Y^T & -Q & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \\ W\hat{C} & 0 & W D^{\bar{p}} \\ P\hat{A} + M\hat{C} & P\hat{B} & M D^{\bar{p}} \\ P\hat{A} + M\hat{C} - P & P\hat{B} & M D^{\bar{p}} \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -\bar{H}^T \bar{H} & * & * \\ 0 & -P & * \\ 0 & 0 & -d_U^{-1} P Z^{-1} P \end{bmatrix} \prec 0 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{\hat{C}^T W \hat{C} - Y\} + P - d_U X - (d_U - d_L + 1)Q & * & * \\ Y^T & Q & * \\ \text{He}\{W\} \hat{C} & 0 & * \\ \bar{H} \hat{C} & 0 & * \\ P\hat{A} + M\hat{C} & P\hat{B} & * \\ P\hat{A} + M\hat{C} - P & P\hat{B} & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ \text{He}\{W\} - \beta^2 I & * & * \\ \bar{H} & I & * \\ M & 0 & P \\ M & 0 & 0 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (7)$$

증명: 리아푸노프(Liapunov) 함수 $V_k = V_{1_k} + V_{2_k} + V_{3_k} + V_{4_k}$

를 도입하자. 여기서

$$\begin{aligned} V_{1_k} &:= z_k^T P z_k \\ V_{2_k} &:= \sum_{i=k-d_k}^{k-1} z_i^T Q z_i \\ V_{3_k} &:= \sum_{j=-d_U+1}^{-d_L+1} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} z_i^T Q z_i \\ V_{4_k} &:= \sum_{i=-d_U}^{-1} \sum_{l=k+i}^{k-1} \Delta z_l^T Z \Delta z_l \end{aligned}$$

이다. $\Delta V_k := V_{k+1} - V_k$ 로 정의하자. ΔV_{1_k} 에 보조정리 2를 적용하기 위해 다음 등식이 성립함을 이용하면

$$z_k - z_{k-d_k} = \sum_{l=k-d_k}^{k-1} \Delta z_l$$

식 (4)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있으며

$$z_{k+1} = (\hat{A}_L + \hat{B})z_k - \hat{B} \sum_{l=k-d_k}^{k-1} \Delta z_l + \hat{L} D^{\bar{p}} w_k + \hat{L} f_k^{\bar{p}}$$

ΔV_{1_k} 은 아래와 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \Delta V_{1_k} &= z_{k+1}^T P z_{k+1} - z_k^T P z_k \\ &= z_k^T ((\hat{A}_L + \hat{B})^T P (\hat{A}_L + \hat{B}) - P) z_k \\ &\quad + \sum_{l=k-d_k}^{k-1} \Delta z_l^T \hat{B}^T P \hat{B} \sum_{l=k-d_k}^{k-1} \Delta z_l \\ &\quad + w_k^T (\hat{L} D^{\bar{p}})^T P \hat{L} D^{\bar{p}} w_k \\ &\quad + (f_k^{\bar{p}})^T \hat{L}^T P \hat{L} f_k^{\bar{p}} \\ &\quad + 2 z_k^T (\hat{A}_L + \hat{B})^T P (-\hat{B} \sum_{l=k-d_k}^{k-1} \Delta z_l + \hat{L} D^{\bar{p}} w_k + \hat{L} f_k^{\bar{p}}) \\ &\quad - 2 \sum_{l=k-d_k}^{k-1} \Delta z_l^T \hat{B}^T P (\hat{L} D^{\bar{p}} w_k + \hat{L} f_k^{\bar{p}}) \\ &\quad + 2 w_k^T (\hat{L} D^{\bar{p}})^T P \hat{L} f_k^{\bar{p}} \end{aligned}$$

여기서 보조정리 2로부터 $N = (\hat{A}_L + \hat{B})^T P \hat{B}$, $a = z_k$, $b = \Delta z_l$ 인 경우를 고려하면

$$\begin{aligned} &\sum_{l=k-d_k}^{k-1} (-2 z_k^T (\hat{A}_L + \hat{B})^T P \hat{B} \Delta z_l) \\ &\leq d_U z_k^T X z_k + 2 z_k^T (Y - (\hat{A}_L + \hat{B})^T P \hat{B}) \sum_{l=k-d_U}^{k-1} \Delta z_l \\ &\quad + \sum_{l=k-d_U}^{k-1} \Delta z_l^T Z \Delta z_l \end{aligned}$$

이 성립하고 위 식으로부터 다음의 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Delta V_{1_k} &\leq \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \\ w_k \\ f_k^{\bar{p}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{A}_L^T P \hat{A}_L - P + d_U X + \text{He}\{Y\} & * \\ -Y^T + \hat{B}^T P \hat{A}_L & \hat{B}^T P \hat{B} \\ (\hat{L} D^{\bar{p}})^T P \hat{A}_L & (\hat{L} D^{\bar{p}})^T P \hat{B} \\ \hat{L}^T P \hat{A}_L & \hat{L}^T P \hat{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \\ w_k \\ f_k^{\bar{p}} \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{l=k-d_U}^{k-1} \Delta z_l^T Z \Delta z_l \end{aligned}$$

한편, ΔV_{2_k} , ΔV_{3_k} , ΔV_{4_k} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta V_{2_k} &= \sum_{i=k+1-d_{k+1}}^k z_i^T Q z_i - \sum_{i=k-d_k}^{k-1} z_i^T Q z_i \\ &\leq z_k^T Q z_k - z_{k-d_k}^T Q z_{k-d_k} + \sum_{i=k+1-d_U}^{k-d_L} z_i^T Q z_i \\ \Delta V_{3_k} &= \sum_{j=-d_U+1}^{-d_L+1} (z_k^T Q z_k - z_{k+j-1}^T Q z_{k+j-1}) \\ &= (d_U - d_L) z_k^T Q z_k - \sum_{i=k+1-d_U}^{k-d_L} z_i^T Q z_i \\ \Delta V_{4_k} &= d_U \Delta z_k^T Z \Delta z_k - \sum_{l=k-d_U}^{k-1} \Delta z_l^T Z \Delta z_l \end{aligned}$$

위 식들로부터 ΔV_k 를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= \Delta V_{1_k} + \Delta V_{2_k} + \Delta V_{3_k} + \Delta V_{4_k} \\ &\leq \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \\ w_k \\ f_k^{\bar{p}} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \hat{A}_L^T P \hat{A}_L - P + d_U X \\ + \text{He}\{Y\} + (d_U - d_L + 1)Q \\ -Y^T + \hat{B}^T P \hat{A}_L \\ (\hat{L} D^{\bar{p}})^T P \hat{A}_L \\ \hat{L}^T P \hat{A}_L \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \\ w_k \\ f_k^{\bar{p}} \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{B}^T P \hat{B} - Q & * & * \\ (\hat{L} D^{\bar{p}})^T P \hat{B} & (\hat{L} D^{\bar{p}})^T P \hat{L} D^{\bar{p}} & * \\ \hat{L}^T P \hat{B} & (\hat{L} D^{\bar{p}})^T P \hat{L} & \hat{L}^T P \hat{L} \end{bmatrix} + d_U \\ & \times \begin{bmatrix} (\hat{A}_L - I)^T \\ \hat{B}^T \\ (\hat{L} D^{\bar{p}})^T \\ \hat{L}^T \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} \hat{A}_L - I & \hat{B} & \hat{L} D^{\bar{p}} & \hat{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \\ w_k \\ f_k^{\bar{p}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$f = 0, w = 0$ 인 경우 식 (8)의 우변은 다음과 같이 축소되며 다음 부등식을 만족한다면 (4)는 점근적으로 안정하다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \hat{A}_L^T P \hat{A}_L - P + d_U X \\ + \text{He}\{Y\} + (d_U - d_L + 1)Q \\ -Y^T + \hat{B}^T P \hat{A}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ \hat{B}^T P \hat{B} - Q \end{bmatrix} \right) \\ & + d_U \begin{bmatrix} (\hat{A}_L - I)^T \\ \hat{B}^T \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} \hat{A}_L - I & \hat{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \end{bmatrix} < 0 \\ & \Leftrightarrow (5) \end{aligned}$$

여기서 슈어여수법(schur complement)과 $P\hat{L} = M$ 의 변수치환을 사용하면 동치관계가 성립한다.

이제 C3)의 설계조건을 증명하자. (8)에서 $f_k = 0, w_k \neq 0$ 인 경우 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \Delta V_k & \leq \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \\ w_k \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} -P + d_U X + \text{He}\{Y\} \\ + (d_U - d_L + 1)Q \\ -Y^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ -Q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ & + \begin{bmatrix} \hat{A}_L^T P & (\hat{A}_L - I)^T P \\ \hat{B}^T P & \hat{B}^T P \\ (\hat{L} D^{\bar{p}})^T P & (\hat{L} D^{\bar{p}})^T P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & * \\ 0 & d_U^{-1} P Z^{-1} P \end{bmatrix}^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} P \hat{A}_L & P \hat{B} & P \hat{L} D^{\bar{p}} \\ P(\hat{A}_L - I) & P \hat{B} & P \hat{L} D^{\bar{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \\ w_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

다음 형태의 해밀턴-자코비-벨만(Hamilton-Jacobi-Bellman) 부등식을 도입하자.

$$\|r_k\|^2 - \gamma^2 \|w_k\|^2 + \Delta V_k < 0 \quad (9)$$

식 (9)를 τ 에 대하여 0에서 ∞ 까지 더하면 다음 동치 관계가 성립한다.

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \|r_\tau\|^2 - \gamma^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \|w_\tau\|^2 < V(e_0) - V(e_\infty) \leq V(e_0) = 0$$

$\Leftrightarrow$ C3)

이는 C3) $\Leftrightarrow$ (9)를 의미하며 다음 관계가 성립한다[17].

$$\begin{aligned} (9) & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -P + d_U X + \text{He}\{Y\} \\ + (d_U - d_L + 1)Q \\ -Y^T \\ 0 \\ H\hat{C} \\ P\hat{A}_L \\ P\hat{A}_L - P \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * \\ -Q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P\hat{B} \\ P\hat{B} \end{bmatrix} \\ * & * \\ * & * \\ -\gamma^2 I & * \\ H\hat{D}^{\bar{p}} & -I \\ P\hat{L} D^{\bar{p}} & 0 \\ P\hat{L} D^{\bar{p}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ -d_U^{-1} P Z^{-1} P \end{bmatrix} < 0 \\ & \Leftrightarrow (6) \end{aligned}$$

여기서 첫 번째 동치관계를 위해 슈어여수법을 사용한다. $\text{blockdiag}\{I, I, I, \bar{H}, I, I\}$ 에 의한 합동변환(congruence transform)과 $\bar{H}^T H = W, P\hat{L} = M$ 의 변수치환을 사용하면 마지막 동치관계가 성립한다.

마지막으로 C2)의 설계조건을 증명하자. (8)에서 $f_k \neq 0, w_k = 0$ 인 경우 ΔV_k 는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} \Delta V_k & \leq \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \\ f_k^{\bar{p}} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} -P + d_U X + \text{He}\{Y\} \\ + (d_U - d_L + 1)Q \\ -Y^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ -Q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ & + \begin{bmatrix} \hat{A}_L^T P & (\hat{A}_L - I)^T P \\ \hat{B}^T P & \hat{B}^T P \\ \hat{L}^T P & \hat{L}^T P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & * \\ 0 & d_U^{-1} P Z^{-1} P \end{bmatrix}^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} P \hat{A}_L & P \hat{B} & P \hat{L} \\ P(\hat{A}_L - I) & P \hat{B} & P \hat{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-d_k} \\ f_k^{\bar{p}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

다음 형태의 해밀턴-자코비-벨만 부등식을 도입하자.

$$\|r_k\|^2 - \beta^2 \|f_k^{\bar{p}}\|^2 - \Delta V_k > 0 \quad (10)$$

식 (10)을 τ 에 대하여 0에서 ∞ 까지 더하면 다음 동치 관계가 성립한다.

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \|r_\tau\|^2 - \beta^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \|f_\tau^{\bar{p}}\|^2 > V(e_\infty) - V(e_0) \geq -V(e_0) = 0$$

$\Leftrightarrow$ C2)

보조정리 1로부터 $Q = H\hat{C}, R = H, \bar{Q} = \bar{H}\hat{C}, \bar{R} = \bar{H}$ 인 경우 설계 조건은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} (10) & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{He}\{(H\hat{C})^T \bar{H}\hat{C} - Y\} + P \\ -d_U X - (d_U - d_L + 1)Q \\ Y^T \\ \text{He}\{H^T \bar{H}\}\hat{C} \\ \bar{H}\hat{C} \\ P\hat{A}_L \\ P\hat{A}_L - P \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * \\ Q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P\hat{B} \\ P\hat{B} \end{bmatrix} \\ * & * \\ * & * \\ \text{He}\{H^T \bar{H}\} - \beta^2 I & * \\ \bar{H} & I \\ P\hat{L} & 0 \\ P\hat{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ P \\ d_U^{-1} P Z^{-1} P \end{bmatrix} \succ 0 \\ & \Leftrightarrow (7) \end{aligned}$$

여기서 슈어여수법이 사용되었다. $\bar{H}^T H = W, P\hat{L} = M$ 의 변수치환을 사용하면 마지막 동치관계가 성립한다. 정리 1의 설계조건들은 $\bar{H}^T \bar{H}, PZ^{-1}P$ 항을 포함한 비선형행렬부등식이다. 비선형행렬부등식의 해는 선형행렬부등식의 반복알고리즘으로 구할 수 있다. 먼저 $\bar{H}^T \bar{H} \succ V, PZ^{-1}P \succ S$ 를 가정하자. 슈어여수법에 의해 다음과 같은 동치관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \bar{H}^T \bar{H} \succ V & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V^{-1} & * \\ \bar{H}^{-1} & I \end{bmatrix} \succ 0 \\ PZ^{-1}P \succ S & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} S^{-1} & * \\ P^{-1} & Z^{-1} \end{bmatrix} \succ 0 \end{aligned}$$

다음 선형행렬부등식을 만족하는 행렬들 $J \succ P^{-1}$,

$U \succ S^{-1}$, $R \succ Z^{-1}$, $L \succ \bar{H}^{-1}$, $N \succ \bar{V}^{-1}$ 을 가정하자.

$$\begin{bmatrix} U & * \\ J & R \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} N & * \\ L & I \end{bmatrix} \succ 0$$

식 (5), (6), (7)에서 $\bar{H}^T \bar{H} = V$, $PZ^{-1}P = S$ 의 변수 치환을 하고 위 식들을 사용하면 정리 1은 다음과 같은 선형행렬부등식을 포함한 비선형 최소화문제로 바꿀 수 있으며 Algorithm 1으로 풀 수 있다.

Algorithm 1 반복 선형행렬부등식 알고리즘

- 1: **Procedure** ILM1 (β, γ)
- 2: $k \leftarrow 0$
- 3: Find solution set S_k subject to (11), (12), (13), (14)
- 4: **repeat**
- 5: $S_{k+1} \leftarrow \arg \min \{ \text{trace}(P_k J + Z_k R + S_k U + P J_k + Z R_k + S U_k) + \text{trace}(\bar{H}_k L + V_k N + \bar{H} L_k + V N_k) \}$
subject to (11), (12), (13), (14)
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: **until** $\text{trace}(P_k J_k + S_k U_k + Z_k R_k - I) + \text{trace}(\bar{H}_k L_k + V_k N_k - I) < \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$
- 8: **return** S_k
- 9: **end procedure**

$$\text{Minimize}_{S := \{P, Q, X, \bar{H}, V, S, W, M, Y, U, J, R, Z, N, L\}} \left\{ \begin{array}{l} \text{trace}(PJ + ZR + SU) \\ + \text{trace}(\bar{H}L + VN) \end{array} \right\}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -P + d_U X + \text{He}\{Y\} \\ +(d_U - d_L + 1)Q \end{pmatrix} & * & * & * \\ -Y^T & -Q & * & * \\ P\hat{A} + M\hat{C} & P\hat{B} & -P & * \\ P\hat{A} + M\hat{C} - P & P\hat{B} & 0 & -d_U^{-1}S \end{bmatrix} \prec 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -P + d_U X + \text{He}\{Y\} \\ +(d_U - d_L + 1)Q \end{pmatrix} & * & * \\ -Y^T & -Q & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \\ WD^{\bar{p}} & W\hat{C} & 0 \\ MD^{\bar{p}} & P\hat{A} + M\hat{C} & P\hat{B} \\ MD^{\bar{p}} & P\hat{A} + M\hat{C} - P & P\hat{B} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -V & * & * \\ 0 & -P & * \\ 0 & 0 & -d_U^{-1}S \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \text{He}\{\hat{C}^T W \hat{C} - Y\} + P \\ -d_U X - (d_U - d_L + 1)Q \end{pmatrix} & * & * \\ Y^T & Q & * \\ \text{He}\{W\} \hat{C} & 0 & \text{He}\{W\} - \beta^2 I \\ \bar{H} \hat{C} & 0 & \bar{H} \\ P\hat{A} + M\hat{C} & P\hat{B} & M \\ P\hat{A} + M\hat{C} - P & P\hat{B} & M \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ I & * & * \\ 0 & P & * \\ 0 & 0 & d_U^{-1}S \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} U & * \\ J & R \end{bmatrix} \succ 0, \begin{bmatrix} P & * \\ I & J \end{bmatrix} \succ 0, \begin{bmatrix} S & * \\ I & U \end{bmatrix} \succ 0, \begin{bmatrix} Z & * \\ I & R \end{bmatrix} \succ 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} N & * \\ L & I \end{bmatrix} \succ 0, \begin{bmatrix} \bar{H} & * \\ I & L \end{bmatrix} \succ 0, \begin{bmatrix} V & * \\ I & N \end{bmatrix} \succ 0$$

IV. 모의실험

다음과 같은 시스템 행렬로 표현되는 (1) 형태의 이산시간 시스템을 고려하자[7].

$$A = \begin{bmatrix} 0.800 & 0.000 \\ 0.050 & 0.900 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.100 & 0.000 \\ -0.200 & -0.100 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \\ 1.000 & 0.500 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.100 \\ 0.100 & 0.200 \\ 0.000 & 0.100 \end{bmatrix}$$

이분법(bisection method)을 사용하여 $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.5$ 를 선정하고 Algorithm 1을 적용하면 문제 1을 만족하는 이득행렬들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.0069 & -0.0157 \\ -0.0035 & 0.0080 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 2.4148 & -0.7927 \\ -1.0783 & 4.3176 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -0.0174 & 0.0148 \\ 0.0439 & -0.0373 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 5.9091 & -2.7227 \\ -1.5002 & 4.8572 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} -0.0150 & 0.0064 \\ 0.0082 & -0.0035 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 3.9719 & -0.9662 \\ -0.5196 & 2.3105 \end{bmatrix}$$

여기서 첨자들은 벡터 내 각각의 관측기들을 표시한다. 시간 구간 $k \in [0, 50]$ 에서 모의실험을 시행한다. 외란 $w_k \in \mathbb{R}^2$ 는 크기 구간 $(-1, 1)$ 에서 불규칙적으로 발생하고 고장 $f_k \in \mathbb{R}^3$ 는 다음과 같은 패턴으로 발생함을 가정하자.

$$f_k = \begin{cases} (1, 0, 0), & k \in [5, 15) \\ (0, 1, 0), & k \in [20, 30) \\ (0, 0, 1), & k \in [35, 45) \\ (0, 0, 0), & \text{otherwise} \end{cases}$$

잔여오차 평가함수와 문턱함수의 관계를 살펴보기 위해 고장이 없는 경우, 외란이 없는 경우, 고장과 외란을 모두 가지고 있는 경우로 나누어 실험을 진행한다. $K_W = 5$, $d_U = 3$, $d_L = 0$ 으로 정한다.

그림 1은 실험 구간 내에서 고장이 발생하지 않은 경우의 잔여오차 평가함수를 보여준다. 외란이 불규칙하게 발생하였지만 실험 구간 내에서 J_{r_p} , $p \in \{1, 2, 3\}$ 의 크기가 문턱 값 J_{th_p} 를 넘지 못하였기 때문에 표 1의 판단 논리에 의해 고장이 발생하지 않았다고 판단하고 실제와 일치함을 확인할 수 있다. 그림 2는 외란 없이 고장만 발생한 경우를 보여준다. 표 1의 판단 논리에 의해 각각 고장의 발생 시간보다 지연되어 시간 구간 $k \in [6, 17]$, $k \in [23, 30]$, $k \in [36, 47]$ 에 $f = (1, 0, 0)$, $f = (0, 1, 0)$, $f = (0, 0, 1)$ 이 각각 검출 및 분리되었음을 알 수 있다. 그림 3은 외란과 고장이 모두 발생한 경우 잔여오차 평가함수를 보여준다. 불규칙한 외란이 발생했음에도 불구하고 그림 2와 유사한 패턴으로 시간구간 $k \in [7, 16]$, $k \in [24, 29]$, $k \in [36, 47]$ 에 $f = (1, 0, 0)$, $f = (0, 1, 0)$, $f = (0, 0, 1)$ 이 각각 검출 및 분리되었음을 알 수 있다.

그림 1. $f = 0$, $w \neq 0$ 일 때의 잔여오차 평가: J_r (실선), J_{th} (괘선).

Fig. 1. Residual evaluation when $f = 0$ but $w \neq 0$: J_r (solid) and J_{th} (dashed).

그림 2. $w = 0$, $f \neq 0$ 일 때의 잔여오차 평가: J_r (실선), J_{th} (괘선).

Fig. 2. Residual evaluation when $w = 0$ but $f \neq 0$: J_r (solid) and J_{th} (dashed).

그림 3. $f \neq 0$, $w \neq 0$ 일 때의 잔여오차 평가: J_r (실선), J_{th} (괘선).

Fig. 3. Residual evaluation when $f \neq 0$ and $w \neq 0$: J_r (solid) and J_{th} (dashed).

V. 결론

본 논문은 상태 지연을 갖는 이산시간 시스템의 고장검출 분리 문제를 다루었다. 고장검출 및 분리를 위하여 관측기뱅크를 도입했다. 각 관측기는 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 성능을 만족하도록 설계되었다. 설계조건은 비선형행렬부등식으로 나타냈으며 이를 풀기 위해 비선형 최소화 문제를 포함한 선형행렬부등식의 반복알고리즘을 제시하였다. 모의실험을 통해 관측기뱅크의 고장검출 및 분리 성능을 확인하였다.

참고문헌

- [1] H. Tianfield and R. Unland, "Towards autonomic computing systems," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 17, no. 7, pp. 689-699, 2004.
- [2] P. Park, "A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 4, pp. 876-877, 1999.
- [3] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon, and Y. S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," *International Journal of Control*, vol. 74, no. 14, pp. 1447-1455, 2001.
- [4] Y. He, Q.-G. Wang, and C. Lin, "An improved H_∞ filter design for systems with time-varying interval delay," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 53, no. 11, pp. 1235-1239, 2006.
- [5] H. Gao, J. Lam, C. Wang, and Y. Wang, "Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 151, no. 6, pp. 691-698, Nov. 2004.
- [6] K. Zhang, B. Jiang, and A. Shumsky, "A new criterion of fault estimation for neutral delay systems using adaptive observer," *Acta Automatica Sinica*, vol. 35, no. 1, pp. 85-91, 2009.
- [7] L. Bai, Z. Tian, and S. Shi, "Design of H_∞ robust fault detection filter for linear uncertain time-delay systems," *ISA Trans.*, vol. 45, no. 4, pp. 491-502, 2006.
- [8] L. Bai, Z. Tian, and S. Shi, "Robust fault detection for a class of nonlinear time-delay systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 344, pp. 873-888, 2007.
- [9] H. Karimi, M. Zapateiro, and N. Luo, "A linear matrix inequality approach to robust fault detection filter design of linear systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 347, no. 6, pp. 957-973, 2010.
- [10] J. Guo, X. Huang, and Y. Cui, "Design and analysis of robust fault detection filter using LMI tools," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 57, pp. 1743-1747, 2009.
- [11] F. Caliskan and I. Genc, "A robust fault detection and isolation method in load frequency control loops," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 23, pp. 1756-1767, 2008.
- [12] Z. Wang, B. Huang, and H. Unbehauen, "Robust H_∞ observer design of linear time-delay systems with parametric uncertainty," *Systems & Control Letters*, vol. 42, no. 4, pp. 303-312, 2001.
- [13] D. Huang and S. K. Nguang, "Robust fault estimator design for uncertain networked control systems with random time delays: An ilmi approach," *Information Sciences*, vol. 180, no. 3, pp. 465-480, 2010.
- [14] J. Liu, J. L. Wang, and G.-H. Yang, "An LMI approach to

minimum sensitivity analysis with application to fault detection,” *Automatica*, vol. 41, no. 11, pp. 1995-2004, 2005.

- [15] I. M. Jaimoukha, Z. Li, and V. Papakos, “A matrix factorization solution to the H/H_∞ fault detection problem,” *Automatica*, vol. 42, pp. 1907-1912, 2006.
- [16] J. L. Wang, G-H. Yang, and J. Liu, “An LMI approach to H index and mixed H/H_∞ fault detection observer design,” *Automatica*, vol. 43, pp. 1656-1665, 2007.
- [17] S. C. Jee, H. J. Lee, and Y. H. Joo, “ H/H_∞ sensor fault detection observer design for nonlinear systems in Takagi–Sugeno’s form,” *Nonlinear Dynamics*, pp. 1-9, 2011.
- [18] W. H. Lee, C. G. Park, D. H. Lee, and K. H. Kim, “Improvement of the double fault detection performance of extended parity space approach,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 15, no. 10, pp. 1002-1008, 2009.
- [19] H. J. Lee and D. W. Kim, “ H fault detection observer design for large scale time-invariant systems,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 15, no. 8, pp. 818-822, 2009.

지 성 철

2009년 인하대학교 전자공학부(공학사).
2011년 인하대학교대학원 전자공학과
(공학석사). 2011년~현재 동 대학원 전
자공학과 박사과정 재학중. 관심분야는
고장 진단 시스템, 퍼지 시스템, 디지털
제어 시스템.

이 호 재

1998년 연세대학교 전기공학과(공학사).
2000년 연세대학교대학원 전기컴퓨터공
학과(공학석사). 2004년 동 대학원 전기
전자 공학과(공학박사). 2005년 University
of Houston, Houston, TX, USA 방문조교
수. 현재 인하대학교 전자전기공학부
조교수. 관심분야는 비선형 샘플치제어, 편대비행 제어, 디지
털 재설계.