확장된 터미널 슬라이딩 모드 제어기의 설계

Design of Extended Terminal Sliding Mode Control Systems

조영훈, 이용화, 박강박*
 (Young-Hun Jo¹, Yong-Hwa Lee¹, and Kang-Bak Park¹)

¹Korea University

Abstract: The terminal sliding mode control schemes have been studied a lot since they can guarantee that the state error gets to zero in a finite time. However, the conventional terminal sliding surfaces have been designed using power function whose exponent is a rational number between 0 and 1, and whose numerator and denominator should be odd integers. It is clearly restrictive. Thus, in this paper, we propose a novel terminal sliding surface using power function whose exponent can be a real number between 0 and 1.

Keywords: terminal sliding surface, SMC (Sliding Mode Control), nonlinear control

I. 서론

슬라이딩 모드 제어기는 모델의 불확실성이나 외란 등에 대해 강건한 성능을 나타내는 기법이다. 일반적인 슬라이딩 모드 제어기는 상태 공간(state space)에서 슬라이딩 평면(sliding surface)을 안정한 특성을 갖도록 설계하고, 시스템의 상태가 이 평면에 구속되도록 빠르게 스위칭하는 제어기를 설계한다[1-3]. 여기서 슬라이딩 평면은 주로 상태변수들의 선형 1차 결합(linear combination)의 형태로 안정하도록 설계된다. 그런데 안정한 선형 시스템은 지수함수적으로 안정한(exponentially stable) 특성을 갖게 되므로 오차가 0으로 수렴하는데 시간이 무한히 오래 걸리는 반면, 실제 많은 적용 사례들에서는 오차가 유한 시간 안에 수렴함을 보장할 수 있는 것이 매우 중요하다.

Zhihong 등은 터미널 슬라이딩 평면을 제안하여 유한한 시간 안에 오차가 0으로 수렴함을 보장하는 터미널 슬라이딩 모드 제어기를 제안하였으며[4], Park 등은 기존의 터미널 슬라이딩 평면에 제약조건이 필요함을 발견하여 수정된 터미널 슬라이딩 평면을 제안하였다[5]. 이를 활용하여 여러 분야에 적용한 논문들이 최근에 많이 제안되어 오고 있다[6,7].

본 논문에서는 기존의 터미널 슬라이딩 평면의 설계범위를 확장한 새로운 터미널 슬라이딩 평면을 제안한다. 종래의 터미널 슬라이딩 평면은 지수함수를 사용하며, 지수는 0에서 1사이의 유리수의 형태를 갖으면서 분자 및 분모가 모두 홀수(정수)이어야 했으나, 제안된 터미널 슬라이딩 평면은 지수가 0에서 1사이의 모든 실수를 가질 수 있도록 설계하였다. 제안된 방법의 유효성을 입증하기 위하여 DC motor에 적용하여 실험을 수행하였다.

II. 문제 정의

다음과 같은 제어 가능한 기준형(canonical form)을 갖는 2차 시스템에 대해 생각하자.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

여기서 $x = [x \ \dot{x}]^T \in R^2$, $u \in R$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 이다. 위 시스템에 대해서 다음과 같은 터미널 슬라이딩 평면을 제안한다.

$$s = \dot{x} + c|x|^p \operatorname{sgn}(x). \quad (2)$$

여기서 c 는 양의 상수이고, $\operatorname{sgn}(x)$ 은 부호함수(signum function)이며, p 는 $0 < p < 1$ 을 만족하는 실수이다. 기존의 연구에서는 아래의 (3)과 같은 함수로 설계했었으며, 여기서 p 는 $0 < p < 1$ 을 만족하는 유리수이면서 분자 및 분모가 모두 홀수이어야만 했다[5-7].

$$s = \dot{x} + cx^p. \quad (3)$$

그러나 본 논문에서는 이를 같은 범위를 갖는 모든 실수로 확장하였다.

III. 제어기 설계

먼저, 제안된 터미널 슬라이딩 평면을 이용하면, 시스템이 슬라이딩 모드에 있을 때 상태변수가 유한한 시간 안에 0으로 수렴함을 보인다.

정리 1: 만일 시스템이 슬라이딩 모드에 있다면, 즉 $s(x(0)) = 0$ 이라면, 상태변수는 유한한 시간 안에 0에 도달하며 도달시간(relaxation time, t_r)은 다음과 같다.

$$t_r = \frac{|x(0)|^{1-p}}{1-p}. \quad (4)$$

증명: $s(x(0)) = 0$ 이고 $x(0) \geq 0$ 이면, (2)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2010. 12. 19., 수정: 2010. 12. 27., 채택확정: 2010. 12. 30.

조영훈, 이용화, 박강박: 고려대학교 제어계측공학과

(heyguy84@korea.ac.kr/now1217@korea.ac.kr/kbpark@korea.ac.kr)

$$\dot{x} + cx^p = 0. \quad (5)$$

따라서 x 가 0이 되었을 때의 도달시간(relaxation time)을 t_r 이라고 한다면, 이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -cx^p \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{x^p} &= -c dt \\ \Leftrightarrow \int_0^{t_r} x^{-p} dx &= -c \int_0^{t_r} dt \\ \Leftrightarrow \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_0^{t_r} &= -c t_r. \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $x(t_r) = 0$ 이므로, 위 식으로부터 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_0^{t_r} &= -c t_r \\ \Leftrightarrow -\frac{x(0)^{1-p}}{1-p} &= -c t_r \\ \Leftrightarrow t_r &= \frac{x(0)^{1-p}}{1-p}. \end{aligned} \quad (7)$$

또한 $s(x(0)) = 0$ 이고 $x(0) < 0$ 이면, (2)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{x} - c(-x)^p = 0. \quad (8)$$

(8)에 대해서 (6)~(7)과 유사한 방식으로 유도하면 도달시간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$t_r = \frac{(-x(0))^{1-p}}{1-p}. \quad (9)$$

따라서 (7)과 (9)로부터 도달시간을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$t_r = \frac{|x(0)|^{1-p}}{1-p}. \quad (10)$$

(10)의 결과는 슬라이딩 모드에 있을 때에만 유효하므로, 유한한 시간 안에 슬라이딩 모드에 구속되도록 하는 제어를 설계해야한다. 아래의 정리에서 이러한 제어를 제안한다.

정리 2: 시스템 (1)에 대해, 다음과 같은 제어를 적용하면 상태변수가 유한한 시간 안에 0에 도달함을 보장한다.

$$u = \left[-a_1 x - a_2 \dot{x} - cps|x|^{p-1} - k_1 s + c^2 p|x|^{2p-1} \operatorname{sgn}(x) - k_2 \operatorname{sgn}(s) \right] / b_2. \quad (11)$$

여기서 k_1 및 k_2 는 양의 상수이다.

증명: 다음과 같은 리아프노프 함수 후보를 설정하자.

$$V = \frac{1}{2} s^2. \quad (12)$$

만일 $x \geq 0$ 이면, 이 함수의 시간에 대한 미분은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} \\ &= s(\ddot{x} + cpx^{p-1}\dot{x}) \\ &= s(a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + u + cpx^{p-1}\dot{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

또한 $x \geq 0$ 일 때, (2)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$s = \dot{x} + cx^p \Leftrightarrow \dot{x} = s - cx^p. \quad (14)$$

(14)의 $\dot{x}$ 을 (13)에 대입하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s(a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + b_2 u + cpx^{p-1}\dot{x}) \\ &= s(a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + b_2 u + cpx^{p-1}(s - cx^p)) \\ &= s(a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + cpsx^{p-1} - c^2 px^{2p-1} + b_2 u). \end{aligned} \quad (15)$$

$x < 0$ 인 경우에도 위와 유사한 방식으로 유도하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} \\ &= s(\ddot{x} + cp(-x)^{p-1}\dot{x}) \\ &= s(a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + b_2 u + cp(-x)^{p-1}\dot{x}) \\ &= s(a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + b_2 u \\ &\quad + cp(-x)^{p-1}(s + c(-x)^p)) \\ &= s(a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + cps(-x)^{p-1} \\ &\quad + c^2 p(-x)^{2p-1} + b_2 u). \end{aligned} \quad (16)$$

(15) 및 (16)의 u 에 제안된 제어기 (11)을 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{V} = s\dot{s} = -k_1 s^2 - k_2 |s|. \quad (17)$$

(17)에서 k_1 및 k_2 는 양수이므로, s 가 초기치에서 0에 도달하는데 걸리는 시간(t_{reach})은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$t_{reach} \leq \frac{|s(0)|}{k_2} \quad (18)$$

따라서 (18)로부터 시스템의 초기치가 어디에 있던지 유한한 시간 안에 제안된 터미널 슬라이딩 평면에 도달함을 알 수 있다. 또한 (12)는 s 에 대한 양의 정부호 함수(positive definite function)이고, (17)은 s 에 대한 음의 정부호 함수(negative definite function)이므로 한 번 슬라이딩 평면($s = 0$)에 도달한 이후에는 여기에서 벗어나지 못하고 슬라이딩 모드($s = 0$)에 머물러 있음을 알 수 있다. 아울러 정리 1에서 시스템이 슬라이딩 모드에 있으면 상태변수가 유한한 시간 안에 0에 도달함을 보였다. 그러므로 제안된 제어기는 상태변수를 유한한 시간 안에 0에 도달하게 함을 알 수 있다. ■

기존의 터미널 슬라이딩 모드 제어기들처럼 제안된 터미널 슬라이딩 평면을 사용해도 특이점(singular point)이 존재한다. 이를 피하기 위해 기존에 활용되어왔던 방법처럼 제어를 다음과 같은 형태로 수정하는 것이 낫다.

$$u = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ (11) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (19)$$

IV. 실험 결과

제안된 방법의 유효성을 보이기 위해 DC 모터 시스템 ($a_1 = 0$, $a_2 = 40.65$, $b_2 = 46.67$)에 적용해보았다. DSP를 이용하여 제어하였으며, 샘플링 주기는 1msec로 설정하였고, $c = 10$, $k_1 = 70$, $k_2 = 160$ 으로 설정하여 실험을 수행했다.

앞서 언급했듯이, 기존의 터미널 슬라이딩 평면은 (3)에서 p 가 0과 1사이의 유리수이면서 분모 및 분자 모두 홀수이어야만 했었다[5-7]. 본 논문에서는 유리수였던 범위를 실수로 확장하였으므로, 지수가 무리수인 경우 및 유리수이면서 분모 및 분자가 모두 홀수이지는 않은 경우에 대해서도 잘 동작함을 보이면 충분하다. 따라서 p 가 무리수인 경우, $\frac{\text{홀수}}{\text{짝수}}$ 인 경우, $\frac{\text{짝수}}{\text{홀수}}$ 인 경우에 대해 실험을 수행하였다.

그림 1~4는 p 가 무리수인 경우로, $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 으로 설정한 경우의 실험결과이다. 그림 1은 출력을 보여주고 있으며, 여기서 볼 수 있듯이 출력이 유한 시간 안에 0으로 수렴함을 볼 수 있다.

그림 2는 제안된 터미널 슬라이딩 평면 변수 s 를 나타

그림 1. 출력 (x) ($p = 1/\sqrt{3}$).

Fig. 1. The output (x) ($p = 1/\sqrt{3}$).

그림 2. 슬라이딩 변수 (s) ($p = 1/\sqrt{3}$).

Fig. 2. The sliding variable (s) ($p = 1/\sqrt{3}$).

낸 것이다. 이 그림으로부터 볼 수 있듯이, 유한 시간 안에 시스템이 슬라이딩 모드에 들어가며, 한 번 슬라이딩 모드에 들어간 이후로는 거기서 벗어나지 않음을 알 수 있다.

그림 3은 상태 궤적을 나타낸 것이며, 그림 4는 입력 신호

그림 3. 상태 궤적 ($p = 1/\sqrt{3}$).

Fig. 3. The phase portrait ($p = 1/\sqrt{3}$).

그림 4. 입력 (u) ($p = 1/\sqrt{3}$).

Fig. 4. The input (u) ($p = 1/\sqrt{3}$).

그림 5. 출력 (x) ($p = 1/2$).

Fig. 5. The output (x) ($p = 1/2$).

호를 나타낸 것이다.

그림 5-6은 p 가 $\frac{\text{홀수}}{\text{짝수}}$ 인 경우로, $p = \frac{1}{2}$ 로 설정한 경우의 실험결과이다. 그림 5는 출력을 보여주고 있으며, 여기서 볼 수 있듯이, 출력이 유한 시간 안에 0으로 수렴했음을 볼 수 있다.

그림 6은 상태 궤적을 나타낸 것으로 제어가 잘 되고 있음을 볼 수 있다.

그림 7-8은 p 가 $\frac{\text{짝수}}{\text{홀수}}$ 인 경우로, $p = \frac{6}{11}$ 으로 설정한 경우의 실험결과이다. 그림 7은 출력을 보여주고 있으며, 여기서 볼 수 있듯이, 출력이 유한 시간 안에 0으로 수렴했음을 볼 수 있다.

그림 8은 상태 궤적을 나타낸 것으로 제어가 잘 되고 있음을 볼 수 있다.

위 실험 결과들로부터 알 수 있듯이, 제안된 확장된 터미널 슬라이딩 평면을 이용한 슬라이딩 모드 제어기를 적용하면 지수함수의 지수가 0에서 1사이의 임의의 실수인 경우에 대해서도 제어가 잘 됨을 볼 수 있다.

그림 6. 상태 궤적 ($p = 1/2$).

Fig. 6. The phase portrait ($p = 1/2$).

그림 7. 출력 (x) ($p = 6/11$).

Fig. 7. The output (x) ($p = 6/11$).

그림 8. 출력 (x) ($p = 6/11$).

Fig. 8. The output (x) ($p = 6/11$).

V. 결론

본 논문에서는 기존의 터미널 슬라이딩 평면의 설계 조건을 완화하였다. 즉, 기존의 터미널 슬라이딩 평면은 지수함수를 활용하였으며, 지수가 0과 1사이의 유리수이면서 분모 및 분자가 모두 홀수이어야만 했으나, 제안된 슬라이딩 평면은 0과 1사이의 모든 실수로 확장하였다. 제안된 방법의 유효성은 실험을 통해 입증하였다.

참고문헌

- [1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding mode," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, Apr. 1977.
- [2] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: a survey," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, Feb. 1993.
- [3] C. Edwards and S. K. Spurgeon, *Sliding Mode Control*, Taylor & Francis Ltd, 1998.
- [4] M. Zhihong, A. P. Paplinski, and H. R. Wu, "A robust terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, no. 12, pp. 2464-2469, Dec. 1994.
- [5] K. B. Park and J. J. Lee, "Comments on a robust terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 41, no. 5, pp. 761-762, May 1996.
- [6] L. Wang, T. Chai, and L. Zhai, "Neural-network based terminal sliding-mode control of robotic manipulators including actuator dynamics," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 9, pp. 3296-3304, Sep. 2009.
- [7] Y. Feng, J. Zheng, X. Yu, and N. V. Truong, "Hybrid terminal sliding-mode observer design method for a permanent-magnet synchronous motor control system," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 9, pp. 3424-3431, Sep. 2009.

조영훈

2009년 고려대학교 제어계측공학과 졸업. 2009년~현재 고려대학교 대학원 제어계측공학과 메카트로닉스전공 석사과정 재학중. 관심분야는 비선형제어, 디지털제어.

이용화

2010년 고려대학교 제어계측공학과 졸업. 2010년~현재 고려대학교 대학원 제어계측공학과 메카트로닉스전공 석사과정 재학중. 관심분야는 비선형제어, 디지털제어.

박강박

1990년 고려대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1992년 한국과학기술원(KAIST) 전기 및 전자공학과(공학석사). 1997년 동 대학원 박사. 1997년~1999년 2월 정보전자연구소 연구원. 1997년 12월~1999년 2월 큐슈공업대학(KIT) 객원교수.

1999년 3월~현재 고려대학교 제어계측공학과 교수. 관심분야는 비선형제어, 슬라이딩모드제어, 샘플치 시스템, 로봇제어 등.