직사각형 후판의 면외 진동인텐시티 해석

김국현* · 조대승**

*동명대학교 조선공학과

**부산대학교 조선해양공학과

Out-of-plane Structural Intensity Analysis of Rectangular Thick Plate

Kookhyun Kim* and Dae-Seung Cho**

*Department of Naval Architecture, Tongmyong University, Busan, Korea

**Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University, Busan, Korea

KEY WORDS: Structural intensity 진동인텐시티, Out-of-plane vibration 면외진동, Rectangular thick plate 직사각형 후판, Assumed mode method 모드가정법, Lagrange's equation 라그랑지 방정식, Timoshenko beam function 티모센코 보합수

ABSTRACT: A numerical method is presented for an out-of-plane structural intensity analysis of rectangular thick plates with arbitrary elastic edge constraints. The method adapts an assumed mode method based on Timoshenko beam functions to obtain the velocities and internal forces needed for a structural intensity analysis. To verify the presented method, the structural intensity of a square thick plate under harmonic force excitation, for which four edges are simply supported, is analyzed, and the result is compared with existing solutions using the assumed mode method based on trigonometric functions. In addition, numerical analyses are carried out for a rectangular-shaped thick plate under harmonic force excitations, of which three edges are simply supported and one edge utilizes an arbitrary elastic edge constraint. These numerical examples show the good accuracy and applicability of the presented method for rectangular thick plates with arbitrary edge constraints.

1. 서 론

선박, 해양플랜트 등과 같은 대형 구조물의 설계 및 건조에 있어서 진동은 제품의 구조적 안전성과 승조원의 안락성을 결정하는 주요 성능에 해당하며, 최근 대형화, 경량화 요구에 따라 한층 그 중요성이 더욱 부각되고 있다. 이에 선박 및 해양구조물의 주요 기진원, 전달경로, 수진체 등에 대해 적절한 방진대책이 설계단계에서부터 수립/적용되고 있다. 엔진, 보조기기류 등과 같이 선박 및 해양플랜트에 탑재되는 기진원들은 운용 중 진동을 유발하며, 다양한 전달경로를 통해 수진체로 전달된다. 따라서 효과적인 방진대책 수립을 위해서는 입력되는 진동에너지의 크기와 전달경로에 대한 정량적 평가방법 개발이 요구된다.

국부구조의 단위면적당 진동과위를 의미하는 진동인텐시티는 국부구조물에 발생하는 내력(응력)과 속도의 곱으로 정의된다. 진동인텐시티는 공간에 대한 벡터량으로, 대상 구조물에 대한 직관적인 진동에너지 흐름과약을 위한 유용한 도구가 된다. 최근 구조물의 진동인텐시티(Structural intensity) 기반의 진동에너지 흐름 해석방법들이 제안되고 있으며, 평판구조물, 원통형 구조물과 같은 단순형상뿐 아니라, 상자형 구조물, 선박 구조물 등과 같은 복합구조물에 대한 적용사례가 보고되고 있다. Pavic

(1976), Fahy and Pierri(1977), Verheij(1980) 등은 측정된 진동의 크기와 유한차분법(Finite difference method)으로 추정된 내력을 이용해 주파수 영역 또는 시간 영역에서의 평판 진동과위를 산정하는 방법을 제시하였으며, Pavic(1990)은 해석적 접근방법을 통해 원통형 박판구조물에 대한 진동인텐시티 해석을 수행한 바 있다. 또한, Xu and Koss(1995)는 균질의 무한 보 및 평판의 진동인텐시티에 대한 주파수 응답을 구하였으며, Hambric(1990)과 Gavric and Pavic(1993)는 유한 크기의 평판에 대해, Alfredsson et al.(1996)은 프레임 구조물과 원통형 구조물에 대해, Xu et al.(2004a)은 유공 복합재 평판에 대해, Xu et al.(2004b)은 보강 평판에 대해, Lee and Cho(2001)는 선박과 유사한 형태의 상자형 구조물에 대해 진동인텐시티 해석을 수행하되 유한요소법기반의 수치해석방법을 제시하였다. 뿐만 아니라, Cho et al.(2010)은 대형컨테이너 선박에 대한 진동인텐시티 해석을 수행함으로써 유한요소해석을 이용한 진동인텐시티 해석방법의 실선으로의 적용성을 보인 바 있다. 그럼에도 불구하고, 이상의 연구결과들은 전단변형 및 회전관성 효과가 무시되는 얇은 평판과 그 조합구조물에 대한 것이 대부분이다. 따라서 선박 및 해양플랜트의 주요 강력부재로 많이 사용되고 있는 후판의 진동인텐시티 해석에 대한 연구는 찾아보기 힘들어 이에 대한 기

교신저자 조대승: 부산광역시 금정구 부산대학로63번길 2(장전동), 051-510-2482, daecho@pusan.ac.kr

본 연구는 2012년 춘계 소음진동 학술대회에 발표된 논문을 근간으로 보완연구를 수행한 결과임을 밝힙니다.

초연구가 필요할 것으로 사료된다.

한편, 진동인텐시티를 정도 높게 추정하기 위해서는 국부구조에 대한 내력과 속도를 효율적으로 계산할 수 있는 강제진동해석(Forced vibration analysis)기법이 요구된다. 평판구조물에 대한 강제진동해석은 모드중첩법을 이용해 수행이 가능하며, 모드중첩법에 사용되는 모드해석을 위한 수치해석방법으로는 해석적 방법(Analytic method)과 모드가정법(Assumed mode method, AMM), 유한요소해석방법(Finite element method) 등의 근사적 해석방법(Approximate method)이 있다. 해석적 방법은 정형화된 추정식과 기 정의된 모드 형상을 이용함으로써 설계 초기단계에서 쉽게 적용할 수 있는 반면 그 적용범위가 고정지지, 단순지지, 자유단 등 고전적 구속조건에 한정되어 있다. 모드가정법은 다양한 구속조건을 만족하는 직교 다항식들을 조합하여 유도한 다자유도계 행렬 운동방정식으로부터 대상구조물의 모드해석을 수행하는 방법으로, 직사각형, 원형 등과 같은 정형화된 평판구조물의 진동해석에 쉽게 활용될 수 있으며, 비교적 알고리즘 구현이 간단하다는 장점이 있다. 또한 유한요소해석방법이 활용될 수 있으나, 형상 및 구속조건에 대한 모델링 과정이 복잡해 설계자들이 현장에서 활용하기에는 어려움이 있다. 모드해석을 위한 해석적 방법으로, Leissa(1969)는 삼각함수를 이용해 고정지지, 단순지지, 자유단 등의 고전적 구속조건을 갖는 직사각형 평판에 대한 엄밀 해를 제시한 바 있으며, Mindlin et al.(1956)은 4변이 고정 또는 단순지지된 직사각형 평판에 대한 엄밀 해를 유도한 바 있다. 또한 모드가정법을 이용한 근사적 해석방법으로, Hwang et al.(1989)은 리츠 방법(Ritz method)과 겔러킨 방법(Galerkin method)을 이용해 비균질 탄성 기초위에 놓여있는 직사각형 평판의 고유 진동수를 추정하였으며, Chung et al.(1993)은 고전적 구속조건은 물론 4변이 병진방향으로 구속되어 있으나 회전방향으로 임의 탄성지지되어 있는 직사각형 평판에 대해 티모센코 보합수(Timoshenko beam function) 성질을 갖는 다항식을 이용한 모드 해석이론을 제시한 바 있다. 또한, Zhou(2001), Kim et al.(2012) 등은 티모센코 보합수 성질을 갖는 다항식을 이용하되 병진 및 회전방향 모두에 대해 임의 탄성지지되어 있는 직사각형 평판에 대한 모드해석의 근사이론을 제시한 바 있다. 또한 최근 전산기의 발달로 정도 높은 유한요소해석방법 적용이 가능해짐에 따라 상용 프로그램인 ANSYS (2004), NASTRAN(MSC, 2010)등을 활용한 해석이 일반화되고 있다.

본 연구에서는 모드가정법을 이용해 임의 경계조건을 갖는 직사각형 후판(Rectangular thick plate)의 면외(Out-of-plane) 진동인텐시티해석을 위한 수치해석방법을 제시한다. 후판에서 나타나는 전단변형 및 회전관성 효과를 고려하기 위해 티모센코 보합수 특성을 갖는 다항식(Kim et al. 2012)을 모드가정법의 기저함수로 이용하여 강제진동해석을 수행하고, 이로부터 구한 내력과 변위(속도)를 이용해 직사각형 후판의 면외 진동인텐시티를 해석한다. 제안된 해석방법의 검증은 위해 4변이 단순지지된 직사각형 후판에 대한 수치해석을 수행하고 그 결과를 Park and Hong(2008)이 제시한 수식에 의한 결과와 비교한다. 또한, 3변이 단순지지이고 1변이 임의 경계조건을 갖는 직사각형 후판에 대한 수치해석을 통해 경계조건에 따른 진동에너지 흐름 특성을 고찰한다.

2. 해석 이론

2.1 진동인텐시티

진동인텐시티는 국부구조물에 대한 단위면적당 진동파워를 의미한다. 또한 주파수영역에서의 복소 진동인텐시티 $\Pi_k(\omega)$ 는 식 (1)과 같이 정의된다(Xu et al. 2004a).

$$\Pi_k(\omega) = - \sum_{l=1}^3 \sigma_{kl} v_l^*(\omega) = I_k(\omega) + jJ_k(\omega), \quad (k = x, y, z) \quad (1)$$

여기서, σ_{kl} 은 l -방향에 대한 k -방향 응력(Stress)을 의미하며, v_l 은 l -방향 속도를 나타낸다. 또한, ω 은 각진동수(Angular frequency)를, x, y, z 는 직교좌표를, 상첨자 *는 켈레복소수를, j 는 단위허수를 각각 의미한다. 한편, I_k 와 J_k 는 각각 k 방향 복소 진동인텐시티의 실수부와 허수부로, active 및 reactive 진동인텐시티를 의미한다.

한편, Fig. 1에 보인 바와 같이 크기가 $a \times b$ 이고 두께가 h 인 직사각형 후판이 직교좌표계에 대해 $x - y$ 평면에 놓여 있는 경우, 면외 진동인텐시티는 식 (1)에서 정의한 active 진동인텐시티 I_k 만을 고려해 식 (2)와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} I_x &= -0.5\omega \text{Im} [M_x \psi_x^* + M_{xy} \psi_y^* + Q_x w^*], \\ I_y &= -0.5\omega \text{Im} [M_y \psi_y^* + M_{yx} \psi_x^* + Q_y w^*] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, I_x 와 I_y 는 각각 x -축 및 y -축 면외 진동인텐시티를 의미하며, $\text{Im}[\cdot]$ 는 복소수의 허수부를, w 는 면외 변위를, ψ_x 와 ψ_y 는 x -축 및 y -축에 대한 회전각을 각각 나타낸다. 또한 $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, Q_x, Q_y$ 등은 국부구조에 발생하는 단위 폭당 복소(Complex) 굽힘모멘트, 비틀림 모멘트, 전단력이며, 등방성(Isotropic) 후판에 대해 각각 식 (3) 및 식 (4), 식 (5)와 같이 정의된다.

$$M_x = B \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \quad M_y = B \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \quad (3)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = B \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \quad (4)$$

$$Q_x = K G h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right), \quad Q_y = K G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \quad (5)$$

여기서, B 는 단위 길이당 굽힘강성($= E h^3 / 12(1-\nu^2)$), E : 탄성계수이다. 또한, ν 는 포아송비, G 는 전단탄성계수, K 는 전단수정계수를 의미한다.

Fig. 1 Cartesian coordinate system for tick rectangular plate

2.2 모드가정법을 이용한 강제진동해석

앞에서 정의한 진동인텐시티를 추정하기 위해서는 면외 변위 및 회전각을 도출하기 위한 강제진동해석이 선행되어야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 식 (6) 및 식 (7), 식 (8)에 보인 바와 같이 민들린 판 이론(Mindlin et al. 1956)에 근거한 지배방정식을 고려하고, 이에 대한 에너지방정식을 이용해 라그랑지 방정식(Lagrange's equation, Meirovitch 1967)을 만족하는 운동방정식을 유도한다.

$$\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - B \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - KGh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) = T_x(x_0, y_0, t) \quad (6)$$

$$\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - B \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - KGh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) = T_y(x_0, y_0, t) \quad (7)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - KGh \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) = F(x_0, y_0, t) \quad (8)$$

여기서, $T_x(x_0, y_0, t)$, $T_y(x_0, y_0, t)$, $F(x_0, y_0, t)$ 는 x - y 평면 상 임의 위치(x_0 , y_0)에 작용하는 x -축 및 y -축방향 모멘트와 z -축방향 기진력을 각각 의미하며, t 는 시간을, ρ 는 판의 밀도를 의미한다.

한편, x 와 y 에 대응하는 무차원 길이좌표 $\xi(=x/a)$ 와 $\eta(=y/b)$ 를 도입하고, 평판에 대한 변형에너지 $V(t)$ 와 운동에너지 $T(t)$ 에 대한 산식을 구하여 정리하면 식 (9) 및 식 (10)과 같다.

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{B}{2\alpha} \left[\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} \right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} \right)^2 + 2\nu\alpha \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} \right. \right. \\ & + \int_0^1 \{ K_{Rx1} \psi_\xi^2(0, \eta, t) + SK_{Tx1} w^2(0, \eta, t) \} d\eta \\ & + \frac{1-\nu}{2} \left(\alpha \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \xi} \right)^2 + S \left(\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \alpha \psi_\xi \right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \alpha \psi_\eta \right)^2 \right) \Big] d\xi d\eta \\ & + \alpha^2 \int_0^1 \{ K_{Ry1} \psi_\eta^2(\xi, 0, t) + SK_{Ty1} w^2(\xi, 0, t) \} d\xi \\ & + \int_0^1 \{ K_{Rx2} \psi_\xi^2(1, \eta, t) + SK_{Tx2} w^2(1, \eta, t) \} d\eta \\ & + \alpha^2 \int_0^1 \{ K_{Ry2} \psi_\eta^2(\xi, 1, t) + SK_{Ty2} w^2(\xi, 1, t) \} d\xi \Big] \quad (9) \end{aligned}$$

$$T(t) = \frac{\rho ab}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{h^3}{12} (\dot{\psi}_\xi^2 + \dot{\psi}_\eta^2) + h \dot{w}^2 \right\} d\xi d\eta \quad (10)$$

여기서, 상첨자 $\cdot$ 는 시간미분을 의미하며, $\alpha = a/b$, $S = KGh/B$ 이다. K_{Tx1} , K_{Tx2} , K_{Ty1} , K_{Ty2} 는 각각 $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ 에서의 단위 길이당 병진스프링 강성 k_{Tx1} , k_{Tx2} , k_{Ty1} , k_{Ty2} 에 대한 무차원 파라미터이며, 식 (11)와 같이 정의된다.

$$K_{Tx1} = \frac{k_{Tx1}a}{KGh}, \quad K_{Tx2} = \frac{k_{Tx2}a}{KGh}, \quad K_{Ty1} = \frac{k_{Ty1}b}{KGh}, \quad K_{Ty2} = \frac{k_{Ty2}b}{KGh} \quad (11)$$

또한 K_{Rx1} , K_{Rx2} , K_{Ry1} , K_{Ry2} 는 각각 $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ 에서 평판을 지지하는 단위 길이당 회전스프링 강성 k_{Rx1} , k_{Rx2} , k_{Ry1} , k_{Ry2} 에 대한 무차원 파라미터이며, 식 (12)와 같이 정의된다.

$$K_{Rx1} = \frac{k_{Rx1}a}{B}, \quad K_{Rx2} = \frac{k_{Rx2}a}{B}, \quad K_{Ry1} = \frac{k_{Ry1}b}{B}, \quad K_{Ry2} = \frac{k_{Ry2}b}{B} \quad (12)$$

본 연구에서는 모드가정법을 도입하기 위해 임의의 4변 탄성 지지조건을 만족하는 직교다항식의 합으로 구성된 식 (13) ~ 식 (15)의 근사식을 적용한다.

$$w(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) X_m(\xi) Y_n(\eta) \quad (13)$$

$$\psi_\xi(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{mn}(t) \Psi_m(\xi) Y_n(\eta) \quad (14)$$

$$\psi_\eta(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn}(t) X_m(\xi) \Phi_n(\eta) \quad (15)$$

여기서, $X_m(\xi)$, $Y_n(\eta)$, $\Psi_m(\xi)$, $\Phi_n(\eta)$ 는 대상 평판의 ξ - 및 η -방향으로 임의의 탄성지지조건을 만족하는 직교 다항식이며, $a_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$, $c_{mn}(t)$ 는 각각의 다항식 조합에 대한 기여도를 나타내는 영향계수이다. 또한, M 과 N 은 각각 ξ - 및 η -방향에 대해 사용되는 직교다항식의 개수이다.

이 때, 식 (13) ~ 식 (15)를 행렬식으로 나타내면 식 (16)이 된다.

$$\{z(\xi, \eta, t)\} = [D(\xi, \eta)] \{q(t)\} \quad (16)$$

여기서,

$$\{z(\xi, \eta, t)\} = \{w(\xi, \eta, t), \psi_\xi(\xi, \eta, t), \psi_\eta(\xi, \eta, t)\}^T \quad (17)$$

$$[D(\xi, \eta, t)] = \begin{bmatrix} X_1 Y_1 \cdots X_M Y_N & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Psi_1 Y_1 \cdots \Psi_M Y_N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \Phi_1 \cdots X_M \Phi_N \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\{q(t)\} = \{a_{11} \cdots a_{MN} \ b_{11} \cdots b_{MN} \ c_{11} \cdots c_{MN}\}^T \quad (19)$$

한편, 식 (9) 및 식 (10)을 식 (20)의 라그랑지 운동방정식에 대입하여 정리하면, 식 (21)과 같은 $3 \times M \times N$ 의 유한 자유도를 갖는 이산계 행렬 운동방정식이 구해진다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(t)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T(t)}{\partial q_i} + \frac{\partial V(t)}{\partial q_i} = Q_i \quad (20)$$

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = [D]_o^T \{F(t)\}_o \quad (21)$$

여기서, 상첨자 $\ddot{\cdot}$ 는 시간에 대한 2계 미분을 의미하며, $[\cdot]^T$ 는 전치행렬을 나타낸다. q_i 는 식 (19)에 정의된 영향계수벡터 $\{q(t)\}$ 의 i -번째 요소이며, $[M]$ 와 $[K]$ 는 각각 관성 및 강성행렬이다. 또한, $\{F(t)\}_o (= \{F, T_\xi, T_\eta\}^T)$ 는 (x_0, y_0) 에서의 외력벡터를, $\{F, T_\xi, T_\eta\}$ 는 면외력과 ξ - 및 η -방향 모멘트이다.

또한, 식 (21)에서 조화운동을 가정하고 우변의 외력항을 무시하면 전형적인 고유치 문제가 되며, 이로부터 고유치와 고유치벡터를 구할 수 있다. 고유벡터를 이용해 영향계수벡터를 식 (22)와 같이 선형변환 후 구조감쇠를 고려하여 식 (21)에 대입하여 정리하면 식 (23)을 얻을 수 있게 되며, 최종적으로 식 (16)을 이용해 면외 변위 및 회전각을 계산할 수 있다.

$$\{q(t)\} = [V] \{\epsilon(t)\} \quad (22)$$

$$\{\ddot{\epsilon}(t)\} + [\cdot \omega^2 \cdot] (1 + j\delta) \{\epsilon(t)\} = [V]^T [D]_i^T \{F(t)\}_i \quad (23)$$

여기서, $[\cdot, \omega^2 \cdot]$ 와 $[V]$ 는 고유치 대각행렬과 고유치벡터행렬을 각각 나타내며, δ 는 구조 감쇠비이다.

2.3 티모센코 보 함수 특성을 갖는 직교다항식

모드가정법을 이용해 정도 높은 해를 구하기 위해서는 대상 구조에 적합한 진동과형 가정함수 또는 다항식의 적용이 요구된다. 이를 위해 본 연구에서는 대상 평판의 단위 스트립(Strip)이 식 (24) 및 식 (25)에 정의한 티모센코 보의 횡진동 방정식을 만족하도록 직교다항식을 유도하고 이를 모드가정법의 기저함수로 사용한다(Kim et al. 2012).

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - KAG \left\{ \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t) \right\} = 0 \quad (24)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - KAG \left\{ \frac{\partial w^2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right\} = 0 \quad (25)$$

여기서, $w(x,t)$ 와 $\psi(x,t)$ 는 각각 보의 횡변위와 굽힘에 대한 회전각이며, A 와 I 는 보의 단면적과 2차모멘트를 각각 나타낸다.

보의 양단이 병진과 회전에 대해 임의 탄성지지되어 있는 상태에서 조화진동 ($w(x,t) = W(x)e^{j\omega t}$, $\psi(x,t) = \Psi(x)e^{j\omega t}$)을 가정하면, 식 (24)과 식 (25)을 만족하는 k -차 직교다항식 $W_k(\zeta)$ 와 $\Psi_k(\zeta)$ 는 식 (26)에서 식 (31)과 같이 유도된다.

$$\Psi_1(\zeta) = A_1(A_{31}\zeta^3 + A_{21}\zeta^2 + A_{11}\zeta + 1) \quad (26)$$

$$W_1(\zeta) = A_1 L \{ A_{31}\zeta^4/4 + A_{21}\zeta^3/3 + (A_{11}/2 - 3A_{31}s^2)\zeta^2 + (1 - 2A_{21}s^2)\zeta + C \} \quad (27)$$

$$\Psi_2 = A_2(\zeta^4 + A_{32}\zeta^3 + A_{22}\zeta^2 + A_{12}\zeta + A_{02}) \quad (28)$$

$$W_2 = A_2 L \{ \zeta^5/5 + A_{32}\zeta^4/4 + (A_{22}/3 - 4s^2)\zeta^3 + (A_{12}/2 - 3A_{32}s^2)\zeta^2 + (A_{02} - 2A_{22}s^2)\zeta + D \} \quad (29)$$

$$W_k = A_k \{ (\zeta - B_k) W_{k-1} - C_k W_{k-2} \} \quad (30)$$

$$\Psi_k = A_k \{ (\zeta - B_k) \Psi_{k-1} - C_k \Psi_{k-2} + W_{k-1}/L \} \quad (31)$$

이 때, $A_k(k=1,2,\dots)$ 는 식 (17)의 $m=n=k$ 인 경우에 대한 다항식 간의 직교성으로부터 구할 수 있다. 또한, 다항식에 사용

된 계수들은 식 (32)에 정의된 무차원 계수들을 사용하여 유도하였으며, 그 결과는 부록에 별도로 정리한 바와 같다.

$$\begin{aligned} \zeta &= x/L, \quad K_{T1} = k_{T1}L/(KGA), \quad K_{R1} = k_{R1}L/(EI), \\ K_{T2} &= k_{T2}L/(KGA), \quad K_{R2} = k_{R2}L/(EI), \\ r^2 &= I/(AL^2), \quad s^2 = EI/(KAGL^2) \end{aligned} \quad (32)$$

여기서, k_{T1} , k_{R1} , k_{T2} , k_{R2} 는 각각 보 양단의 병진 및 회전에 대한 스프링 강성이다.

3. 수치해석 및 고찰

3.1 단순지지 정사각형 후판

제안된 진동인텐시티 해석기법의 검증을 위해 4변이 단순지지된 정사각형 후판에 대한 수치해석을 수행하고 그 결과를 기존 연구결과와 비교하였다. 기존 연구결과로는 Park et al.(2008)이 삼각함수를 기저함수로 하는 모드가정법을 이용해 유도한 수식을 적용하였으며, 이때 적용한 기저함수의 최대 차수($M \times N$)는 100×100 이다.

정사각형 후판은 그 크기가 $1\text{m} \times 1\text{m}$ 이며, 두께는 0.1m 이다. 정사각형 후판의 재질은 강으로, 탄성계수는 $2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, 밀도는 7850 kg/m^3 , 프아송비는 0.3 이다. 기진력으로 대상모델의 1차 고유진동수에 해당하는 475.8Hz 의 주파수에 대해 대상모델의 정중앙 위치(0.5m , 0.5m)에 조화기진력(1N)이 수직방향으로 작용하는 것으로 가정하였다. 이 때, 구조감쇠비는 0.01 , 전단수정 계수는 $\pi^2/12$ (Mindlin et al., 1956)으로 설정하였다.

Fig. 2는 대상모델의 대각선 위치에서의 강제진동해석결과를 나타낸 것으로, 모드가정법에 사용된 직교다항식의 최대 차수를 $5(\text{AMM_}5 \times 5)$, $10(\text{AMM_}10 \times 10)$, $20(\text{AMM_}20 \times 20)$, $35(\text{AMM_}35 \times 35)$ 등으로 설정하여 구한 면외 변위(Fig. 2(a))와 회전각(Fig. 2(b))을 기존 연구결과(Reference)와 함께 도시한 것이다. 위치번호(Position number)는 대상모델에 대해 대각선을 그었을 때 시작점을 0 으로 하고 끝점을 50 으로 하여 등간격으로 부여한 일련 번호이다. 참고로, 최대차수를 35×35 로 설정한 것은

(a)

(b)

Fig. 2 Forced vibration analysis results for $1\text{m} \times 1\text{m}$ square thick plate: (a) out-of-plane displacement ($\text{Re}[W]$) and (b) rotation angle ($\text{Re}[\psi_x]$ & $\text{Re}[\psi_y]$)

Fig. 3 Structural intensity analysis results for 1m x 1m square thick plate: (a) vector component (I_x & I_y) and (b) absolute value ($abs[I]$)

본 연구를 위해 작성한 프로그램이 그 이상의 차수에서 메모리 한계로 구동되지 않기 때문이며, 향후 코드 최적화 등 이에 대한 개선이 필요할 것으로 사료된다. 그럼에도 불구하고 직교다항식의 최대차수가 증가할수록 해의 정확도가 증가함을 알 수 있으며, 직교다항식의 최대차수를 35 x 35만 고려하더라도 기진점(위치번호=25)을 제외한 모든 위치에서 기존 연구결과와 잘 일치하고 있다. 이는 직교다항식의 최대차수를 적절히 선정할 경우, 기진점 부근을 제외한 위치에 대해 정도 높은 해석이 가능함을 의미한다.

Fig. 3은 대상모델의 대각선 위치에서의 면의 진동인텐시티 해석결과를 나타낸 것으로 가로 및 세로방향 성분(I_x 및 I_y)과 절

대값($abs[I]$)으로 구분하여 도시한 것이다. 앞의 강제진동해석결과와 마찬가지로 직교다항식의 최대차수가 증가할수록 해의 정확도가 증가하며, 기진점을 제외하면, 최대 차수를 35 x 35만 고려하더라도 정도 높은 해를 구할 수 있음을 알 수 있다.

한편, 대상모델에 대한 진동에너지 흐름 파악을 위해 진동인텐시티 해석결과를 무차원(Non-scaled) 등고선(Contour), 무차원 벡터장(Vector field), 유선(Streamlines) 등으로 중첩시켜 Fig. 4에 도시하였다. 정확도 비교를 위해 기존 연구결과(Fig. 4(d))도 함께 나타내었다. 중앙에서 입력된 진동에너지가 모든 방향으로 분산되다가 꼭지점 근방에서 수렴하면서 소산되는 형태를 보이고 있다. 또한, 앞의 강제진동 해석결과와 마찬가지로 직교다항식의 최대차수가 높아질수록 진동인텐시티 벡터와 유선의 정확도가 증가함을 알 수 있다.

3.2 임의의 경계조건을 갖는 직사각형 후판

임의의 경계조건을 갖는 직사각형 후판에 대한 수치해석을 통해 경계조건에 따른 진동에너지 흐름의 특성을 파악한다. 이를 위해 크기가 2m x 1m이며, Fig. 5에 도시한 바와 같이 3-변이 단순지지, 1-변이 k_{y1} 의 병진스프링으로 지지되어 있는 직사각형 후판에 대한 진동인텐시티 해석을 수행하였다. 이 때, 대상 모델의 물성치는 정사각형 후판의 것과 동일하며, 주파수가 500 Hz인 면의 조화기진력이 작용하는 것으로 가정하였다.

Fig. 4 Non-scaled contour, vector field, and streamline of structural intensity for 1m x 1m square thick plate; (a) AMM_5x5, (b) AMM_20x20, (c) AMM_35x35, and (d) reference (by Park and Hong, 2008)

Fig. 5 Edge boundary conditions and lateral excitation point of rectangular thick plate

Fig. 6 Non-scaled contour, vector field, and streamline of structural intensity for 2m x 1m rectangular thick plate having arbitrary 1-edge boundary condition; (a) $k_{y1}=1e7$ N/m², (b) $k_{y1}=1e8$ N/m², (c) $k_{y1}=1e9$ N/m², (d) $k_{y1}=1e10$ N/m²

Fig. 6은 대상모델의 1-변을 지지하고 있는 병진스프링의 강성 k_{y1} 이 $1e7 \sim 1e10$ N/m²으로 변할 경우에 대한 진동인텐시티 해석결과를 도시한 것이다. 병진스프링 강성이 낮은 경우 ($k_{y1}=1e7$ 및 $1e8$ N/m²) 진동에너지는 병진스프링이 지지되어 있는 변을 향해 흐르다가 끝단에 이르러 반사를 일으키며, 최종적으로는 우측 하단부위에서 소용돌이 형태로 소멸하고 있다. 반면, 병진 스프링 강성이 높은 경우($k_{y1}=1e9$ 및 $1e10$ N/m²) 앞의 결과와는 달리 진동에너지가 대상모델의 중앙부를 향해 흐르다가 우측 최종적으로는 우측 변을 향해 흐르는 양상을 보이고 있다. 이와 같이 동일한 직사각형 후판이 다른 경계조건을 갖는 경우 진동에너지 흐름특성이 매우 다르게 나타남을 알 수 있으며, 이러한 특성을 이용해 직사각형 후판의 경계조건을 조절하여 진동에너지 흐름 제어가 가능함도 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 모드가정법을 이용해 임의의 경계조건을 갖는 직사각형 후판의 면외 진동인텐시티 해석을 위한 수치해석방법을 제시하였다. 제시된 수치해석방법에서는 후판에서 나타나는 전단변형 및 회전관성 효과를 고려하기 위해 티모센코 보합수 특성을 갖는 다항식을 모드가정법의 기저함수로 이용하여 강제진동해석을 수행하고, 이로부터 구한 내력과 변위(속도)를 이용해 직사각형 후판의 면외 진동인텐시티 해석을 수행하는 절차를 따른다. 4변이 단순지지된 직사각형 후판에 대한 수치해석을 수행하고 그 결과를 Park and Hong(2008)이 제시한 이론식에 의한 결과와 비교하여 본 연구에서 제시한 수치해석방법의 정확도를 검증하였다. 직교다항식의 개수를 증가시킬수록 해의 정확도가

증가하였으며, 직교다항식의 최대 차수를 적절히 선정할 경우 기진점을 제외한 영역에서 정도 높은 진동인텐시티 해석이 가능함을 확인하였다. 또한, 3변이 단순지지이고 1-변이 임의의 경계조건을 갖는 직사각형 후판에 수치해석을 수행하였다. 1-변에 적용된 스프링 강성에 따라 진동에너지 흐름 특성이 상이하게 나타남을 확인하였다. 따라서 본 연구결과를 이용해 임의의 경계조건을 갖는 직사각형 후판에 대한 진동에너지 흐름에 대한 수치해석적 평가가 가능하며, 경계조건을 이용한 진동에너지 흐름 제어가 가능함을 알 수 있었다. 한편, 선박 및 해양플랜트에는 유공판, 보강판 등 다양한 형태의 후판이 사용된다. 따라서 향후 이들에 대한 진동인텐시티 해석기법 개발이 이루어져야 할 것으로 사료된다.

후 기

이 논문은 2011년도 정부교육과학기술부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아수행된 연구임(NO. 2011-0030669)

참 고 문 헌

- Alfredsson, K.S., Josefson, B.L. and Wilson, M.A. (1996). "Use of the Energy Flow Concept in Vibration Design". Journal of AIAA, Vol 34, No 6, pp 1250-1255.
- ANSYS (2004). ANSYS Structural Analysis Guide, ANSYS Inc.
- Cho, D.S., Kim, K.S. and Kim, B.H. (2010). "Structural Intensity Analysis of a Large Container Carrier under Harmonic Excitations of Propulsion System", International Jour-

- nal of Naval Architecture and Ocean Engineering, Vol 2, No 2, pp 87-95.
- Chung, J.H., Chung, T.Y. and Kim, K.C. (1993). "Vibration Analysis of Orthotropic Mindlin Plates with Edges Elasticallly Restrained Against Rotation", Journal of Sound and Vibration, Vol 163, No 1, pp 151-163.
- Fahy, F.J. and Pierri, R. (1977). "Application of Cross-spectral Density to a Measurement of Vibration Power Flow between Connected Plates", Journal of the Acoustical Society of America, Vol 62, No 5, pp 1297-1298.
- Gavric, L. and Pavic, G. (1993). "A Finite Element Method for Computation of Structural Intensity by the Normal Mode Approach", Journal of Sound and Vibration, Vol 164, No 1, pp 29-43.
- Hambric, S.A. (1990). "Power Flow and Mechanical Intensity Calculations in Structural Finite Element Analysis", ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol 112, pp 542-549.
- Hwang, J.I., Kim, Y.C. and Lee, T.S. (1989). "Natural Frequency of a Rectangular Plate on Non-homogeneous Elastic Foundations", Journal of Ocean Engineering and Technology, Vol 3, No 2, pp 570-576.
- Kim, K., Kim, B.H., Choi, T.M. and Cho, D.S. (2012). "Free Vibration Analysis of Rectangular Plate with Arbitrary Edge Constraints Using Characteristic Orthogonal Polynomials in Assumed Mode Method", International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering, Vol 4, No 3. (to be published)
- Lee, D.H. and Cho, D.S. (2001). "Structural Intensity Analysis of Local Ship Structures using Finite Element Method", Journal of the Society of Naval Architects of Korea, Vol 38, No 3, pp 62-73.
- Leissa, A.W. (1969). Vibration of Plates. NASA Report No SP-160.
- Meirovich, L. (1967). Analytical Methods in Vibrations. Macmillan Publishing Co., Inc.
- Mindlin, R.D., Schacknow, A. and Deresiewicz, H. (1956). "Flexural Vibration of Rectangular Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol 23, pp 430-436.
- MSC (2010). MD Nastran 2010 Dynamic Analysis User's Guide, MSC Software.
- Park, Y.H. and Hong, S.Y. (2008). "Vibrational Power Flow Models for Transversely Vibrating Finite Mindlin Plate", Journal of Sound and Vibration, Vol 317, Issue 3-5, pp 800-840.
- Pavic, G. (1976). "Measurement of Structure Borne Wave Intensity, Part I: Formulation of the Methods", Journal of Sound and Vibration, Vol 49, Issue 2, pp 221-230.
- Pavic, G. (1990). "Vibrational Energy Flow in Elastic Circular Cylindrical Shells", Journal of Sound and Vibration, Vol 142, Issue 2, pp 293-310.
- Verheij, J.W. (1980). "Cross Spectral Density Methods for Measuring Structure Borne Power Flow on Beams and Pipes", Journal of Sound and Vibration, Vol 70, No 1, pp 133-139.
- Xu, W. and Koss, L.L. (1995). "Frequency Response Functions for Structural Intensity, Part I: Theory", Journal of Sound and Vibration, Vol 185 No 2, pp 299-334.
- Xu, X.D., Lee, H.P. and Lu, C. (2004a). "The Structural Intensities of Composite Plates with a Hole", Composite Structures, Vol 65, pp 493-498.
- Xu, X.D., Lee, H.P., Wang, Y.Y. and Lu, C. (2004b). "The Energy Flow Analysis in Stiffened Plates of Marine Structures", Thin-Walled Structures, Vol 42, pp 979-994.
- Zhou, D. (2001). "Vibrations of Mindlin Rectangular Plates with Elastically Restrained Edges Using Static Timoshenko Beam Functions with the Rayleigh-Ritz Method", International Journal of Solids and Structures, Vol 38, pp 5565-5580.

부 록

식 (26)에서 식 (31)까지 사용된 계수들은 다음과 같다(Kim et al. 2012).

$$A_{11} = K_{R1}, \quad A_{21} = K_{T1} C / (2s^2), \quad A_{31} = -\hat{K}_1 - K_{T1} \hat{K}_2 C / (2s^2),$$

$$C = \hat{P} / \hat{Q}, \quad \hat{K}_1 = (K_{R1} + K_{R1} K_{R2} + K_{R2}) / (K_{R2} + 3),$$

$$\hat{K}_2 = (K_{R2} + 2) / (K_{R2} + 3),$$

$$\hat{P} = \hat{K}_1 (K_{T2} / 4 + 6s^2 - 3s^2 K_{T2}) - K_{T2} (K_{R1} / 2 + 1),$$

$$\hat{Q} = - (K_{T2} / 4 + 6s^2 - 3s^2 K_{T2}) \hat{K}_2 K_{T1} / (2s^2) + (K_{T2} / 3 - 2s^2 K_{T2} + 2s^2) K_{T1} / (2s^2) + K_{T2},$$

$$A_{32} = -\hat{D} / \hat{C}, \quad A_{22} = A_{32} \bar{A} + \bar{B}, \quad A_{12} = -\bar{T} A_{22} - \bar{S} A_{32} - \bar{R},$$

$$A_{02} = A_{12} / K_{R1}, \quad D = 2A_{22} s^2 / K_{T1},$$

$$\bar{K}_1 = K_{R1} / (K_{R1} + K_{R1} K_{R2} + K_{R2}),$$

$$\bar{T} = \bar{K}_1 (K_{R2} + 2), \quad \bar{S} = \bar{K}_1 (K_{R2} + 3), \quad \bar{R} = \bar{K}_1 (K_{R2} + 4)$$

$$\bar{A} = \left[\frac{1}{4} - 3s^2 - \frac{6s^2}{K_{T2}} - \bar{S} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{K_{R1}} \right) \right]$$

$$/ \left[\bar{T} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{K_{R1}} \right) + 2s^2 \left(1 - \frac{1}{K_{T2}} - \frac{1}{K_{T1}} \right) - \frac{1}{3} \right]$$

$$\bar{B} = \left[\frac{1}{5} + \frac{12s^2}{K_{T2}} - 4s^2 - \bar{R} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{K_{R1}} \right) \right]$$

$$/ \left[\bar{T} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{K_{R1}} \right) + 2s^2 \left(1 - \frac{1}{K_{T2}} - \frac{1}{K_{T1}} \right) - \frac{1}{3} \right]$$

$$\bar{C} = \int_0^1 \left[\rho A L \left(\frac{\zeta^4}{4} + \frac{\bar{A} \zeta^3}{3} - \left(\frac{\bar{T} \bar{A} + \bar{S}}{2} + 3s^2 \right) \zeta^2 \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\overline{TA}+\overline{S}}{K_{R1}}+2s^2\overline{A}\right)\zeta+\frac{2s^2\overline{A}}{K_{T1}}\Big\}Y_1 \\
& +\rho I\left\{-\frac{\overline{TA}+\overline{S}}{K_{R1}}-(\overline{TA}+\overline{S})\zeta+\overline{A}\zeta^2+\zeta^3\right\}\Psi_1\Big]d\zeta \\
\overline{D} & =\int_0^1\left[\rho AL\left\{\frac{\zeta^5}{5}+\left(\frac{\overline{B}}{3}-4s^2\right)\zeta^3-\left(\frac{\overline{R}+\overline{TB}}{2}\right)\zeta^2\right.\right. \\
& \left.-\left(\frac{\overline{TB}+\overline{R}}{K_{R1}}+2s^2\overline{B}\right)\zeta+\frac{2s^2\overline{B}}{K_{T1}}\right\}Y_1 \\
& \left.+\rho I\left\{-\frac{\overline{TB}+\overline{R}}{K_{R1}}-(\overline{TB}+\overline{R})\zeta+\overline{B}\zeta^2+\zeta^4\right\}\Psi_1\right]d\zeta \\
B_k & =\int_0^1\left[\zeta\{\rho AW_{k-1}^2+\rho I\Psi_{k-1}^2\}\right]d\zeta, \\
C_k & =\int_0^1\left[\zeta\{\rho AW_{k-1}W_{k-2}+\rho I\Psi_{k-1}\Psi_{k-2}\}\right]d\zeta \\
& ,
\end{aligned}$$

이 때, 사용된 무차원 계수들은 다음과 같이 정의된다.

$$\zeta=x/L, \quad K_{T1}=k_{T1}L/(KGA), \quad K_{R1}=k_{R1}L/(EI)$$

$$K_{T2}=k_{T2}L/(KGA), \quad K_{R2}=k_{R2}L/(EI),$$

$$r^2=I/(AL^2), \quad s^2=EI/(KAGL^2)$$

여기서, k_{T1} , k_{R1} , k_{T2} , k_{R2} 는 각각 보 양단의 병진 및 회전에 대한 스프링 강성이다.

2012년 6월 4일 원고 접수

2012년 7월 26일 심사 완료

2012년 8월 20일 게재 확정