고정 파라미터를 갖는 단순화된 퍼지 PID제어기의 제안과 안정도 분석

Stability Analysis and Proposal of the Simplified Form of a Fuzzy PID Controller with Fixed Parameters

이병결* · 김인환** · 김종화***

Byungkyul Lee, Inhwan Kim and Jonghwa Kim

* 한국해양대학교 대학원 제어계측공학과

** 전주산업대학교 기계공학과

*** 한국해양대학교 IT공학부

요 약

본 논문은 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 설계방법을 기술하고 컴퓨터 연산 시간을 줄일 수 있는 단순화된 퍼지 PID제어기를 제안하며 제안한 제어기의 안정도를 분석한다. 안정도 분석을 위해 사용한 소이득 정리로부터 전체 피드백 시스템의 BIBO 안정도의 실제적인 충분조건을 유도하고, 유도한 안정 조건으로부터 안정한 선형 PID제어기의 파라미터로부터 퍼지 PID제어기의 파라미터를 결정하는 방법을 고찰한다. 마지막으로 선형 시스템과 비선형 시스템에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 실시하고 비선형 퍼지 PID제어기의 시뮬레이션 결과를 선형 PID제어기의 시뮬레이션 결과와 비교하여 성능을 확인한다.

Abstract

This paper describes the design principle of a fuzzy PID controller with fixed parameters, proposes the simplified form of a fuzzy PID controller to increase the computational efficiency and analyzes stability of a proposed fuzzy PID controller. After a detailed stability analysis using 'small gain theorem', a simple and practical sufficient condition for the BIBO stability of the overall feedback control system is derived. The derived stability condition offers a calculation method to obtain parameters of a fuzzy PID controller from parameters of a stable PID controller. Finally several computer simulations are executed to confirm the effectiveness of the fuzzy PID controller with fixed parameters.

Key words : 퍼지 제어기, 퍼지 PID 제어기, 비선형 제어, 안정도 분석, 소이득 정리

1. 서 론

PID제어기는 구조가 간단하여 적용이 쉽고, 제어 성능이 우수하며 제어이득 조정이 비교적 쉽기 때문에 산업현장에서 80%이상을 차지할 정도로 많이 사용되고 있다. PID제어기는 우수한 성능에도 불구하고 단일 입력 출력 시스템에만 적용가능하고 선형제어기로서 비선형성이 강한 플랜트에서 적용시 만족할 만한 성능을 얻기가 어렵다는 단점을 가지고 있다. 비선형 시스템을 제어하는 방법으로 퍼지이론을 응용한 연구들이 진행되고 있다[1,2]. 퍼지제어기의 도입시 논의가 되었던 안정도 문제가 여러 연구자들에 의해 해석됨에 따라 실제 플랜트에 적용을 위한 연구들이 수행되고 있다[3]. 퍼지제어기는 다른 다양한 제어이론과 접목하여 다양한 제어기가 설계되고 있다. 특히, PID제어기에 기초한 퍼지 PID제어기는 퍼지제어 초기부터 연구되었다. 퍼지 PID제

기는 일반적인 퍼지제어기의 설계 과정에 따라 유도된다. 유도된 퍼지 PID제어기는 일반적인 PID제어기의 이산시간 퍼지형 제어기가 되고, 선형 PID제어기와 동일한 제어기 구조를 갖지만 제어기의 계인은 가변된다. 퍼지 PID제어기의 계인은 입력신호에 대한 비선형 함수형태가 되어 일반적인 선형 PID제어기에 비해 향상된 비선형 보상 능력과 자기동조 능력을 갖는다.

본 논문은 퍼지 PID제어기의 계인은 가변되지만, 제어기의 파라미터가 고정되는 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 설계방법을 기술하고[4] 컴퓨터 연산 시간을 줄일 수 있는 간단한 형태의 제어기를 제안한다. 제안한 제어기에 대한 안정도를 분석하고, 안정도 분석을 위해 사용한 소이득 정리로부터 전체 피드백 시스템의 BIBO 안정도의 실제적인 충분조건을 유도한다. 선형 시스템과 비선형 시스템에 대한 시뮬레이션을 통해 선형 디지털 PID제어기와 비교하여 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 성능을 확인한다.

접수일자 : 2004년 9월 1일

완료일자 : 2004년 12월 9일

2. 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기

2.1 기본구조

고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기 구성도는 그림 1과 같다[4]. FLC는 목표값에 대한 오차, 오차의 변화율, 오차의 변화율에 대한 변화율을 입력으로 사용하고, 퍼지 제어규칙과 비퍼지화기를 각각 포함하는 서로 다른 두 개의 퍼지 제어 블록으로 구성된다.

$$e(nT) = ref(nT) - y(nT) \quad (1)$$

$$e^* = GE \times e(nT) \quad (2)$$

$$r(nT) = [e(nT) - e(nT - T)] / T \quad (3)$$

$$r^* = GR \times r(nT) \quad (4)$$

$$a(nT) = [r(nT) - r(nT - T)] / T \quad (5)$$

$$= [e(nT) - 2e(nT - T) + e(nT - 2T)] / T^2 \quad (5)$$

$$a^* = GA \times a(nT) \quad (6)$$

$$dU(nT) = dU_1(nT) + dU_2(nT) \quad (7)$$

$$du(nT) = GU \times dU(nT) \quad (8)$$

$$u(nT) = du(nT) + u(nT - T) \quad (9)$$

여기서 n 과 T 는 양의 정수와 샘플링 시간, $y(nT)$, $e(nT)$, $r(nT)$, $a(nT)$ 는 각각 샘플링 시각 nT 에서 플랜트의 출력, 오차(error), 오차의 시간 변화율(rate), 오차의 시간 변화율의 변화율(acc)을 나타내며 GE , GR , GA , GU 는 각각 error, rate, acc, u 의 퍼지화 스케일 상수이며, 퍼지 PID제어기의 파라미터이다. dU_1 , dU_2 는 퍼지 제어 블록 1, 2의 출력, u 는 제어 입력을 의미한다.

퍼지 PID제어기의 스케일 상수 GE , GR , GA , GU 와 퍼지 분할변수 L 이 고정되므로 우리는 이 제어기를 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기라 부른다.

2.2 퍼지화 알고리즘

그림 2는 스케일된 입력변수들의 소속함수를 보여준다. error는 EP와 EN, rate는 RP와 RN, acc는 AP, AN 각각 두 개의 멤버를 갖는다[4].

그림 3은 출력변수들의 소속함수를 나타낸다. output1은 그림 3(a)와 같이 OP, OZ, ON 세 개의 멤버를 갖고, output2는 그림 3(b)와 같이 OPM, ONM 두 개의 멤버를 갖는다.

그림 2 e^* , r^* , a^* 의 소속함수

Fig. 2 Membership functions of e^* , r^* and a^*

(a) 퍼지 제어블록 1

(b) 퍼지 제어블록2

그림 3. 출력 소속함수

Fig. 3 Output membership functions

2.3 퍼지 제어규칙

퍼지 제어블록1과 퍼지 제어블록2에 대한 퍼지 제어 규칙은 다음과 같다[4].

fuzzy control block 1

- (R1)₁: IF error=EP and rate=RP THEN output=OP
- (R2)₁: IF error=EP and rate=RN THEN output=OZ
- (R3)₁: IF error=EN and rate=RP THEN output=OZ
- (R4)₁: IF error=EN and rate=RN THEN output=ON

fuzzy control block 2

- (R1)₂: IF rate=RP and acc=AP THEN output=OPM
- (R2)₂: IF rate=RP and acc=AN THEN output=ONM
- (R3)₂: IF rate=RN and acc=AP THEN output=OPM
- (R4)₂: IF rate=RN and acc=AN THEN output=ONM

그림 1. 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 구조

Fig. 1 Structure of a fuzzy PID control system with fixed parameters

퍼지 추론논리를 적용하기 위한 입력공간은 그림 4와 같이 분할된다. 그림 4(a)는 제어블록1의 e^* 와 r^* 에 대한 입력공간 분할을 나타낸 것이고, 그림 4(b)는 제어블록2의 r^* 와 a^* 에 대한 입력공간 분할을 나타낸 것이다.

그림 4. 입력 공간 분할
Fig. 4 Possible input combinations

2.4 비퍼지화 알고리즘

비퍼지화기는 식 (10)과 같은 중심평균법을 사용하였다[1,2].

$$dU = \frac{\sum_{i=0}^n \mu_{output}(w_i) \times w_i}{\sum_{i=0}^n \mu_{output}(w_i)} \quad (10)$$

여기서 n 은 규칙의 수, w_i 는 멤버의 값, $\mu_{output}(w_i)$ 는 소속정도를 나타낸다.

퍼지 제어블록1에 대해 출력 퍼지집합을 L 구간 내에서 비퍼지화하면 다음과 같다,

$$IF \quad GR \times |r(nT)| \leq GE \times |e(nT)| \leq L, \quad (11)$$

$$dU_1(nT) = \frac{0.5 \times L}{2L - GE \times |e(nT)|} [GE \times e(nT) + GR \times r(nT)]$$

$$IF \quad GE \times |e(nT)| \leq GR \times |r(nT)| \leq L, \quad (12)$$

$$dU_1(nT) = \frac{0.5 \times L}{2L - GR \times |r(nT)|} [GE \times e(nT) + GR \times r(nT)]$$

퍼지 제어블록2에 대해 출력 퍼지집합을 L 구간 내에서 비퍼지화하면 다음과 같다.

$$IF \quad GA \times |a(nT)| \leq GR \times |r(nT)| \leq L,$$

$$dU_2(nT) = \frac{0.25 \times L}{2L - GR \times |r(nT)|} [GA \times a(nT)] \quad (13)$$

$$IF \quad GR \times |r(nT)| \leq GA \times |a(nT)| \leq L,$$

$$dU_2(nT) = \frac{0.25 \times L}{2L - GA \times |a(nT)|} [GA \times a(nT)] \quad (14)$$

퍼지 제어블록 1의 e^* 나 r^* 가 $[-L, L]$ 의 구간 밖에 존재하는 경우와 퍼지 제어블록2의 r^* 나 a^* 의 값이 구간 $[-L, L]$ 을 벗어나는 경우에 대한 출력값은 표1과 같다.

따라서 FLC의 출력 $dU(nT)$ 는 식 (15)와 같이 퍼지 제어블록1의 출력 $dU_1(nT)$ 와 퍼지 제어블록2의 출력 $dU_2(nT)$ 의 산술적인 합이 되고, 제어신호의 증분 $dU(nT)$ 는 식 (16)과 같이 출력 스케일러 GU 를 곱하여 생성한다.

$$dU(nT) = dU_1(nT) + dU_2(nT) \quad (15)$$

$$du(nT) = GU \times dU(nT) \quad (16)$$

표 1 $[-L, L]$ 구간을 벗어난 경우의 퍼지 제어블록1과 퍼지 제어블록 2에 대한 증분 출력

Table 1 The incremental outputs of fuzzy control block 1 and 2 when e^* or r^* and r^* or a^* are out of $[-L, L]$

Input combinations		Output	
fuzzy control block 1	e^* & r^*	(IC9) ₁ , (IC10) ₁ (IC11) ₁ , (IC12) ₁ (IC13) ₁ , (IC14) ₁ (IC15) ₁ , (IC16) ₁ (IC17) ₁ (IC18) ₁ , (IC20) ₁ (IC19) ₁	$[GR \times r(nT) + L] / 2$ $[GE \times e(nT) + L] / 2$ $[GR \times r(nT) - L] / 2$ $[GE \times e(nT) - L] / 2$ L 0 $-L$
	r^* & a^*	(IC9) ₂ , (IC10) ₂ , (IC13) ₂ , (IC14) ₂ (IC11) ₂ , (IC12) ₂ , (IC17) ₂ , (IC18) ₂ (IC15) ₂ , (IC16) ₂ , (IC19) ₂ , (IC20) ₂	$0.5 \times GA \times a(nT)$ $0.5 \times L$ $-0.5 \times L$

2.5 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 제어칙

제어칙은 입력 범위에 따라 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 1) \quad & IF \quad GR \times |r(nT)| \leq GE \times |e(nT)| \leq L \\ & \text{and} \quad GA \times |a(nT)| \leq GR \times |r(nT)| \leq L, \\ & du(nT) = \frac{0.5 \times L \times GU}{2L - GE \times |e(nT)|} [GE \times e(nT) + GR \times r(nT)] \\ & + \frac{0.25 \times L \times GU}{2L - GR \times |r(nT)|} [GA \times a(nT)] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & IF \quad GR \times |r(nT)| \leq GE \times |e(nT)| \leq L \\ & \text{and} \quad GR \times |r(nT)| \leq GA \times |a(nT)| \leq L, \\ & du(nT) = \frac{0.5 \times L \times GU}{2L - GE \times |e(nT)|} [GE \times e(nT) + GR \times r(nT)] \\ & + \frac{0.25 \times L \times GU}{2L - GA \times |a(nT)|} [GA \times a(nT)] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & IF \quad GE \times |e(nT)| \leq GR \times |r(nT)| \leq L \\ & \text{and} \quad GA \times |a(nT)| \leq GR \times |r(nT)| \leq L, \\ & du(nT) = \frac{0.5 \times L \times GU}{2L - GR \times |r(nT)|} [GE \times e(nT) + GR \times r(nT)] \\ & + \frac{0.25 \times L \times GU}{2L - GR \times |r(nT)|} [GA \times a(nT)] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & IF \quad GE \times |e(nT)| \leq GR \times |r(nT)| \leq L \\ & \text{and} \quad GR \times |r(nT)| \leq GA \times |a(nT)| \leq L, \\ & du(nT) = \frac{0.5 \times L \times GU}{2L - GR \times |r(nT)|} [GE \times e(nT) + GR \times r(nT)] \\ & + \frac{0.25 \times L \times GU}{2L - GA \times |a(nT)|} [GA \times a(nT)] \end{aligned} \quad (20)$$

위의 식 (17)을 정리하면 다음과 같다.

$$du(nT) = K_i e(nT) + K_p r(nT) + K_d a(nT) \quad (21)$$

여기서 K_i , K_p , K_d 는 다음과 같다.

$$K_i = \frac{0.5 \times L \times GU \times GE}{2L - GE \times |e(nT)|} \quad (22)$$

$$K_p = \frac{0.5 \times L \times GU \times GR}{2L - GE \times |e(nT)|} \quad (23)$$

$$K_d = \frac{0.25 \times L \times GU \times GA}{2L - GR \times |r(nT)|} \quad (24)$$

식 (21)의 퍼지 PID제어기는 일반적인 디지털 PID 제어기와 동일한 구조를 갖는다. 식 (22), (23), (24)에서 보듯 일반적인 PID제어기의 계인은 고정되지만, 퍼지 PID제어기의 적분계인 K_i , 비례계인 K_p , 미분계인 K_d 는 *error*, *rate*, *acc*의 값에 따라 가변된다. 다른 입력 공간에 대한 계인 K_i , K_p , K_d 는 식 (18), (19), (20)을 통하여 구할 수 있다. 퍼지 PID제어기의 계인은 *error*, *rate*, *acc*가 0에 아주 가까운 값을 가질 때, 즉 정상상태에서 식(25)와 같은 상수값 계인을 갖는다.

$$K_p^* = \frac{GU \times GR}{4}, K_i^* = \frac{GU \times GE}{4}, K_d^* = \frac{GU \times GA}{8} \quad (25)$$

2.6 단순화된 퍼지 PID제어기의 제안

표 1과 식 (17)~식 (20)으로 표현되는 퍼지 PID제어기는 조건문이 많아 일반적인 PID제어기에 비해 컴퓨터 연산이 증대되는 단점을 갖고 있다. 퍼지 입력공간을 분석하여 단순화된 형태의 퍼지 PID제어기를 제안한다. 퍼지화기에 의해 생성되는 퍼지 입력공간은 표 2와 같다.

표 2 퍼지화기에 의해 분할되는 퍼지 입력공간
Table 2 Fuzzy spaces generated by fuzzifier

	below $-L$	between $-L$ and L	above L
e^*	$-L$	$GE \cdot e$	L
r^*	$-L$	$GR \cdot r$	L
a^*	$-L$	$GA \cdot a$	L

퍼지 입력공간을 전건부로 표현하면 식 (26)과 같은 단순화된 퍼지 PID제어기 제어칙을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{IF } GE \cdot |e| > L \quad \text{THEN } GE \cdot |e| = L \\ \text{IF } GR \cdot |r| > L \quad \text{THEN } GR \cdot |r| = L \\ \text{IF } GA \cdot |a| > L \quad \text{THEN } GA \cdot |a| = L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} du(nT) &= K_i e(nT) + K_p r(nT) + K_d a(nT) \\ &= \frac{0.5 \times L \times GU \times GE}{2L - \max(GE \cdot |e(nT)|, GR \cdot |r(nT)|)} e(nT) \\ &\quad + \frac{0.5 \times L \times GU \times GA}{2L - \max(GE \cdot |e(nT)|, GR \cdot |r(nT)|)} r(nT) \\ &\quad + \frac{0.25 \times L \times GU \times GA}{2L - \max(GR \cdot |r(nT)|, GA \cdot |a(nT)|)} a(nT) \end{aligned} \quad (26)$$

3. 안정도 분석

퍼지제어기의 안정도를 분석하기 위한 많은 노력이 있었다[5~9]. 특히, 소이득정리[10,11]를 이용하여 퍼지 PI제어기[12]와 퍼지 PD제어기[3]의 안정도를 다루는 연구들이 수행되었다. 본 절은 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기를 선형 PID제어기와 비교하여 퍼지 PID제어기의 안정도를 분석한다. 이를 위해 선형 PID 제어기의 증분형 이산시간 PID제어기를 유도한다.

3.1 선형 PID제어기의 증분형 이산시간 PID제어기의 유도

선형 PID제어기를 라플라스 변환하면

$$U_{pid}(s) = (K_p^c + sK_d^c + \frac{K_i^c}{s}) E(s) \quad (27)$$

가 되고, 미분하면 식 (28)과 같다.

$$sU_{pid}(s) = (sK_p^c + s^2K_d^c + K_i^c) E(s) \quad (28)$$

샘플링 시간 T 에서 식 (29)의 backward difference[13]를 적용하여 z -영역으로 사상하면 식 (30)과 같다.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1-z^{-1}}{T} \\ \frac{1-z^{-1}}{T} U_{pid}(z) &= \left\{ \frac{1-z^{-1}}{T} K_p^c + \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^2 K_d^c + K_i^c \right\} E(z) \end{aligned} \quad (30)$$

여기서, K_p^c , K_d^c , K_i^c 는 선형PID제어기와 디지털 PID 제어기의 비례, 미분, 적분 계인이다.

역 z -변환을 하고,

$$\begin{aligned} \frac{u_{pid}(nT) - u_{pid}(nT-T)}{T} &= \\ K_p^c \frac{e(nT) - e(nT-T)}{T} &+ \\ K_d^c \frac{e(nT) - 2e(nT-T) + e(nT-2T)}{T^2} &+ \\ K_i^c e(nT) \end{aligned} \quad (31)$$

$\Delta u_{pid}(nT)$, $r(nT)$, $a(nT)$ 를 다음과 같이 정의한 후,

$$\Delta u_{pid}(nT) = \frac{u_{pid}(nT) - u_{pid}(nT-T)}{T} \quad (32)$$

$$r(nT) = \frac{e(nT) - e(nT-T)}{T} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} a(nT) &= \frac{r(nT) - r(nT-T)}{T} \\ &= \frac{e(nT) - 2e(nT-T) + e(nT-2T)}{T^2} \end{aligned} \quad (34)$$

식 (32), (33), (34)를 식 (31)에 대입하면 식 (35)와 같은 증분형 제어규칙을 얻는다.

$$\Delta u_{pid} = K_i^c e(nT) + K_p^c r(nT) + K_d^c a(nT) \quad (35)$$

일반적인 디지털 PID 제어기의 제어입력은 다음과 같다.

$$u_{pid}(nT) = u_{pid}(nT-T) + T \cdot \Delta u_{pid}(nT) \quad (36)$$

식 (35)는 계인이 고정되었다는 차이점이 있지만 식 (21)의 퍼지 PID제어기와 동일한 형태가 된다.

3.2 소이득정리에 의한 안정도 분석

Theorem 1 소이득정리 (Small Gain Theorem)

그림 5와 같은 시스템에서 S_1 과 S_2 가 causal이고 L_p -stable wb(wb : with finite gain and zero bias)라면 제어기 S_1 의 계인 $\gamma_{S_1} = \gamma_p(S_1)$ 와 비선형 플랜트 S_2 의 계인 $\gamma_{S_2} = \gamma_p(S_2)$ 에 대해 식 (37)을 만족하면 제어시스템은 L_p -stable wb이다[10,11].

$$\gamma_{S_1} \cdot \gamma_{S_2} < 1 \quad (37)$$

그림 5 폐루프 제어 시스템

Fig. 5 An equivalent closed-loop control system

비선형 제어대상 플랜트 N 과 식 (21), (26)의 증분형 퍼지 PID제어칙과 기준입력 $ref(nT)$ 에 대하여 다음과 같이 정의하면[10,11],

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1(nT) = e(nT) \\ e_2(nT) = u_{fpid}(nT) \\ u_1(nT) = ref(nT) \\ u_2(nT) = u_{fpid}(nT - T) \\ S_1(e_1(nT)) = GU\Delta u_{fpid}(nT) \\ S_2(e_2(nT)) = N(e_2(nT)) \end{array} \right. \quad (38)$$

그림 5의 페루프 시스템에서 다음을 구할 수 있다.

$$\begin{cases} u_1(nT) = \text{ref}(nT) & = e(nT) + N(u(nT)) \\ & = e_1(nT) + S_2(e_2(nT)) \\ u_2(nT) = u_{fpid}(nT - T) & = u_{fpid}(nT) + G\Delta u_{fpid}(nT) \\ & = e_2(nT) + S_1(e_1(nT)) \end{cases} \quad (39)$$

퍼지 PID제어기의 제어칙에 대한 노옴은 식(40)과 같다.

$$\begin{aligned}
\|S_1(e_1(nT))\| &= \left| \frac{L \cdot GU \cdot (GE \cdot e(nT) + GR \cdot r(nT))}{2(2L - \max(|GEe(nT)|, |GRr(nT)|))} + \frac{0.5L \cdot GU \cdot GA \cdot a(nT)}{2(2L - \max(|GRr(nT)|, |GAa(nT)|))} \right| \\
&\leq \left| \frac{L \cdot GU \cdot (GE \cdot e(nT) + GR \cdot r(nT))}{2(2L - \max(|GEe(nT)|, |GRr(nT)|))} + \frac{0.5L \cdot GU \cdot GA \cdot a(nT)}{2(2L - \max(|GRr(nT)|, |GAa(nT)|))} \right| \\
&\leq \frac{L \cdot GU \cdot (|GE \cdot e(nT)| + |GR \cdot r(nT)|)}{2(2L - \max(|GEe(nT)|, |GRr(nT)|))} + \frac{0.5L \cdot GU \cdot GA \cdot |a(nT)|}{2(2L - \max(|GRr(nT)|, |GAa(nT)|))} \\
&\leq \frac{L \cdot GU \cdot (|GE \cdot e(nT)| + |GR \cdot r(nT)|) + 0.5GA \cdot |a(nT)|}{2(2L - \max(|GEe(nT)|, |GRr(nT)|, |GAa(nT)|))} \\
&\leq \frac{L \cdot GU \cdot (GE + \frac{2GR}{T} + \frac{2GA}{T^2})}{2(2L - \max(|GEe(nT)|, |GRr(nT)|, |GAa(nT)|))} \cdot |e(nT)| \\
&\leq \gamma_{10} \cdot |e(nT)| \quad (40)
\end{aligned}$$

여기서,

$$\gamma_{1p} = \frac{L \cdot GU \cdot (GE + \frac{2GR}{T} + \frac{2GA}{T^2})}{2(2L - \max(|GE|e(nT)|, |GR|\mathcal{r}(nT)|, |GA|a(nT)|))}$$

$$\sup|\mathcal{r}(nT)| = \sup\left|\frac{e(nT) - e(nT - T)}{T}\right| = \sup\frac{2}{T}|e(nT)|$$

$$\sup|a(nT)| = \sup\left|\frac{\mathcal{r}(nT) - \mathcal{r}(nT - T)}{T}\right| = \sup\frac{4}{T^2}|e(nT)|$$

이다. 일반적으로 목표치 추종문제에서 $\sup |e(nT)|$ 는 목표치나 최대 오버슈트값이 된다.

비선형 플랜트에 대한 노옴은 식 (41)과 같다.

$$\|S_2(e_2(nT))\| \leq \|N\| |e_2(nT)| \leq \gamma_{2n} \cdot |e_2(nT)| \quad (41)$$

여기서, $\gamma_{2b} = \|N\|$ 이고 $\|N\|$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\|N\| := \sup \frac{|N(v_1(nT)) - N(v_2(nT))|}{|v_1(nT) - v_2(nT)|} \quad (42)$$

그러므로, 식 (37)의 소이득 정리에 의하여 퍼지 PID제어 시스템이 안정하기 위한 조건은 다음과 같다.

Theorem 2 퍼지 PID제어 시스템에 대한 BIBO
안정도 충분조건

(1) 비선형 플랜트의 노옴이 유한하다.

$$\|N\| < \infty$$

(2) 퍼지 PID제어기의 파라미터 GU , GE , GR , GA 가 식 (43)을 만족한다.

$$\frac{L \cdot GU \cdot (GE + \frac{2GR}{T} + \frac{2GA}{T^2})}{2(2L - G_{\max})} \cdot \|N\| < 1 \quad (43)$$

여기서, $G_{\max} = \max(GE|e(nT)|, GR|r(nT)|, GA|a(nT)|)$ 이다.

GU , GE , GR , GA 를 식 (43)을 만족하도록 결정하면, 전체 시스템은 안정하게 된다. 퍼지 PID 제어기의 설계 조

전에서 $0 \leq G_{\max} \leq L$ 가 되고, 식 (43)에서 $\frac{L}{2(2L-G_{\max})}$ 의 최소값은 1/4이 된다. 이 최소값은 $e(nT)=0$, $r(nT)=0$, $a(nT)=0$ 이 되는 경우 즉, 정상상태에서 얻어지는 값이다. 이 때의 조건을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{GU}{4} \cdot (GE + \frac{2GR}{T} + \frac{2GA}{T^2}) \cdot \|M\| < 1 \quad (44)$$

선형 PID제어기에 대해 소이득정리를 만족하는 조건을 식 (37)~(43)의 과정을 거쳐 구하면 식 (45)와 같다.

$$(K_i^c + \frac{2}{T} K_p^c + \frac{4}{T^2} K_d^c) \cdot \|N\| < 1 \quad (45)$$

식 (44)의 퍼지 PID제어기의 파라미터들을 식 (46)이나 식 (47)과 같이 놓으면 식 (45)의 선형 디지털 PID제어기와 동일한 형태가 된다. 이것은 퍼지 PID제어기가 선형 디지털 PID제어기와 동일한 안정도를 갖게 된다는 것을 의미한다.

$$\frac{GU \cdot GE}{4} = K_i^c, \frac{GU \cdot GR}{4} = K_p^c, \frac{GU \cdot GA}{8} = K_d^c \quad (46)$$

$$GU = T, GE = \frac{4K_i^c}{T}, GR = \frac{4K_p^c}{T}, GA = \frac{8K_d^c}{T} \quad (47)$$

비선형 플랜트 N 을 안정시키는 선형 디지털 PID 제어기의 게인은 식 (45)를 만족한다. 퍼지 PID 제어기의 게인을 선형 디지털 PID 제어기의 게인으로부터 식 (46)을 통해 결정하면, 퍼지 PID 제어기는 식 (44)의 안정도 조건을 만족한다. 결과적으로 퍼지 PID 제어기는 선형 PID 제어기와 동일한 안정도를 갖게 된다. 이것은 제어 대상 플랜트의 선형, 비선형에 관계없이 성립한다.

4. 시뮬레이션 및 고찰

제안한 퍼지 PID제어기의 성능을 검증하기 위해 선형 시스템과 비선형 시스템에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 수행한다. 먼저 안정한 디지털 PID제어기의 게인 구하고, 식 (46)을 통해 퍼지 PID제어기의 파라미터를 결정한 후, 여러 목표값에 대한 응답을 통해 제어기의 성능을 비교 분석한다.

4.1 선형 시스템에 대한 적용

식 (48)의 전달 함수를 갖는 선형 시스템은 부족감쇠 성질을 갖는 안정한 2차 선형시스템으로 단순 피드백에 의한 단위 계단입력 응답은 그림 6과 같다.

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)} \quad (48)$$

그림 6. 선형 시스템에 대한 단순 피드백 단위 계단응답
Fig. 6 Unit step response of nominal closed-loop system

선형 디지털 PID제어기, L 값이 360과 1200인 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 목표값 0.5, 1, 3, 5에 대한 출력을 그림 7(a), (b), (c), (d)에 나타내었다.

그림 7(a)의 목표값이 0.5인 경우, 선형 디지털 PID제어기, 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 응답이 동일하게 나타난다. 이는 정상 상태에서 퍼지 PID제어기와 선형 디지털 PID제어기의 게인이 동일하도록 설계되었기 때문에 제어기 입력값이 작은 경우, 즉 L 값에 비하여 목표값이 작은 영역에서는 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 게인 스케줄링 범위가 감소하여 선형 디지털 PID제어기의 게인과 비슷하기 때문이다.

그림 7(b)의 목표값이 1인 경우, L 값이 1200인 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기와 선형 디지털 PID제어기의 응답이 동일하게 나타나고, L 값이 360인 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기는 L 값이 1200인 고정 파

라미터를 갖는 퍼지 PID제어기에 비해 게인스케줄링 기능이 작용하여 빠른 응답을 나타낸다.

그림 7(c)의 목표값이 3인 경우, L 값이 360인 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기는 목표값이 증가함에 따라 L 값을 벗어난 FLC입력에 대하여 입력이 제한되어 초기에 충분한 제어입력을 생성하지 못하고 선형 디지털 PID제어기에 비해 성능이 저하된다. 이에 비해 L 값이 1200인 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기는 충분한 입력 퍼지공간을 갖고 게인 스케줄링이 작용하여 선형 디지털 PID제어기보다 나은 제어 성능을 보여준다. 그림 7(d)의 목표값이 5인 경우, 목표값이 더 증가함에 따라 L 값이 360인 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 상승시간은 더욱 지연된다.

시뮬레이션에 사용한 제어기 파라미터는 표 3과 같다.

표 3 선형 시스템의 시뮬레이션에 사용한 제어기 파라미터
Table 3 Parameters of controllers for linear system simulations

	Parameters						
	K_f^c	K_p^c	K_d^c	GE	GR	GA	GU
Linear Digital PID Controller	90	45	5				
Fuzzy PID Controller with Fixed Parameters				360	180	40	1
				360	180	40	1200

(a) in case of reference 0.5

(b) in case of reference 1.0

(c) in case of reference 3.0

(d) in case of reference 5.0

그림 7. 선형 시스템에 대한 제어기의 응답

Fig. 7 Response curves of controllers for linear system simulations

4.2 비선형 시스템에 대한 적용

식 (49)의 시스템은 그림 8과 같이 단순 피드백을 통한 단위 계단입력에 대해 시스템의 출력이 목표값에 수렴하지 못하고 발산하는 불안정한 시스템이다.

$$\ddot{y} + \dot{y} = 0.5y^2 + 2u \quad (49)$$

그림 8. 비선형 시스템의 단위 계단응답

Fig. 8 Unit step response of the nonlinear system

선형 디지털 PID제어기, L 값이 600과 1000인 퍼지 PID제어기에 대하여 목표값이 1, 10, 20, 25인 경우 각 제어기의 응답곡선을 그림 9에 나타내었다.

그림 9(a), (b)의 목표값이 1이나 10인 경우, 선형 디지털 PID제어기, 퍼지 PID제어기 모두 비슷한 제어 성능을 가진다.

그림 9(c)의 목표값이 20인 경우, 식 (49)에서 $0.5y^2$ 항의 영향으로 비선형성이 크게 나타난다. 선형 디지털 PID제어기와 L 값이 600인 퍼지 PID제어기는 오버슈트가 크게 발생하지만, L 값이 1000인 퍼지 PID제어기는 작은 오버슈트를 갖고 빨리 안정된다. L 값이 600인 퍼지 PID제어기의 오버슈트가 선형 디지털 PID제어기의 오버슈트보다 큰 것은 입력 퍼지공간이 제한되어 초기에 충분한 제어입력을 생성하지 못하기 때문이다.

그림 9(d)의 목표값이 25인 경우, 선형 디지털 PID제어기는 발산하기 시작한다. L 값이 600인 퍼지 PID제어기는 입력 퍼지공간이 제한되어 충분한 제어 입력을 생성하지 못하고 초기에 발산하지만 L 값이 1000인 퍼지 PID제어기는 정상상태에서 진동하는 안정한 부족감쇠가 된다.

시뮬레이션에 사용한 제어기의 파라미터는 표 4와 같다.

표 4 비선형 시스템 시뮬레이션에 사용한 제어기 파라미터
Table 4 Parameters of controllers for nonlinear system simulations

	Parameters						
	K_i^c	K_p^c	K_d^c	GE	GR	GA	GU
Linear Digital PID Controller	15	15	2				
Fuzzy PID Controller with Fixed Parameters				60	60	16	1
				360	180	40	1

(a) in case of reference 1

(b) in case of reference 10

(c) in case of reference 20

(d) in case of reference 25

그림 9. 비선형 시스템에 대한 제어기의 응답

Fig. 9 Response curves of controllers for nonlinear system simulations

4.3 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 게인 분석

목표값 1과 3에 대한 선형 시스템 시뮬레이션 결과에서 각각의 제어기에 대한 K_i , K_p , K_d 게인변화를 그림 10과 11에 나타내었다.

그림 10의 목표값이 1인 경우, 선형 디지털 PID제어기의 K_i , K_p , K_d 게인은 고정되고, L 값이 360인 고정파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 게인은 초기부터 게인 스케줄링이 작동한다. L 값이 1200인 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기의 게인은 게인 스케줄링이 작게 작용하여 선형 디지털 PID제어기의 게인과 비슷함을 볼 수 있다. 초기에 게인 스케줄링이 제대로 동작하여 제어입력을 생

성하는 L 값이 360인 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기는 빠른 응답을 나타낸다.

그림 11의 목표값이 3인 경우, L 값이 360인 퍼지 PID제어기는 (b)와 (c)의 $\bigcirc$ 부분에서 보는 것처럼 게인 스케줄링이 지연되지만, L 값이 1200인 퍼지 PID제어기는 초기부터 게인 스케줄링이 작용한다. L 값이 360인 퍼지 PID제어기는 L 값을 벗어난 제어기 입력 $error$, $rate$ 에 대하여 입력 공간이 L/GE , L/GR 로 제한되고, $error$ 와 $rate$ 값이 L 값 안으로 들어올 때까지 acc 의 최대 입력 L/GA 에 의해 제어 입력이 제한되어 상승시간이 지연된다. 입력공간이 제한되면, 선형시스템은 그림 7(c),

그림 10. 기준입력이 1인 경우의 제어기 파라미터 변화와 제어시스템 응답

Fig. 10 Response of control system and changes of controller parameters in case of reference 1

그림 11. 기준입력이 3인 경우의 제어기 파라미터 변화와 제어시스템 응답

Fig. 11 Response of control system and changes of controller parameters in case of reference 3

7(d)와 같이 응답속도가 저하되고, 비선형 시스템은 그림 9(c)와 같이 과도응답이 좋지 않거나 그림 9(d)와 같이 불안정해질 수 있다.

고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기는 L 값이 작으면 입력이 작은 경우 우수한 성능을 발휘하지만 입력이 큰 경우 상승시간이 지연되거나 과도응답이 나빠질 수 있다. 또한, L 값을 크게 선정하면 입력이 큰 경우 우수한 성능을 발휘하지만 입력이 작은 경우 선형 PID제어기와 동일한 성능을 발휘하게 된다. 그러므로 목표값이나 제어기 동작 범위에 따라 적절한 L 값을 선정해 주는 것이 필요하다.

5. 결 론

본 논문은 고정 파라미터를 갖는 퍼지 PID제어기를 설계하고 퍼지 입력공간을 분석하여 단순화된 제어기를 제안하고 안정도를 분석하였다. 제안된 퍼지 PID제어기에 대하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 퍼지 제어규칙 각각의 전진부와 제어칙을 통합하여 하나의 전진부와 하나의 퍼지제어칙을 갖는 단순화된 퍼지 PID제어기를 제안하였다. 제안된 제어기는 조건문의 수가 현저히 감소하여 마이크로 프로세서 등에 응용시 연산시간을 줄일 수 있다.
- (2) 소이특정리를 통해 선형 PID제어기와 연관하여 퍼지 PID제어기의 전체 피드백 시스템에 대한 BIBO 안정도에 대한 충분 조건을 유도하였다. 유도된 안정 조건으로부터 안정한 선형 PID제어기로부터 퍼지 PID제어기의 파라미터를 결정할 수 있다.
- (3) 선형과 비선형 모델에 대한 시뮬레이션을 통해 동일한 안정도를 갖는 파라미터에 대해 퍼지 PID제어기가 선형 PID 제어기에 비해 우수한 제어 성능을 가진다.

참 고 문 헌

- [1] L. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*, Prentice-Hall, 1997.
- [2] K. M. Passino and S. Yurkovich, *Fuzzy Control*, Addison Wesley, 1999.
- [3] A. Heidari, M. H. Li and G. Chen, "New Design and Stability Analysis of Fuzzy Proportional-Derivative Control Systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 2, pp. 245~254, 1994.
- [4] J. H. Kim, "A Suggestion of Nonlinear Fuzzy PID Controller to Improve Transient Responses of Nonlinear or Uncertain Systems," *한국퍼지 및 지능 시스템학회 논문지*, Vol. 5, No. 4, pp. 87~100, 1995.
- [5] S. Kitamura and T. Kurozumi, "Extended Circle Criterion and Stability Analysis of Fuzzy Control Systems," *Proceeding of International Fuzzy Engineering Symposium*, pp. 634~643, 1991.
- [6] E. Furutani, M. Saeki and M. Araki, "Shifted Popov Criterion and Stability Analysis of Fuzzy Control Systems," *Proceeding of IEEE Control and Decision Conference*, pp. 2709~2795, 1992.
- [7] S. Singh, "Stability Analysis of Discrete Fuzzy Control Systems," *Proceeding of 1st IEEE International Conference*, pp. 527~534, 1992.
- [8] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 45, pp. 135~156, 1992.

- [9] K. H. Cho, C. W. Kim and J. T. Lim, "On Stability Analysis of Nonlinear Plants with Fuzzy Logic Controllers," *IFSA '93*, pp. 1094~1097, 1993.
- [10] C. A. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, New York Academic, 1975.
- [11] R. J. P. de Figueiredo and G. Chen, *Nonlinear Feedback Control Systems: An Operator Approach*, New York Academic, 1993.
- [12] G. Chen and H. Ying, "Stability Analysis of Nonlinear Fuzzy PI Control Systems," *Proceeding of 3rd International Conference on Fuzzy Logic Application*, pp. 128~133, 1993.
- [13] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems Theory and Design*, Prentice-Hall, 1990.

저 자 소 개

이병결(Byungkyul Lee)

1993년 : 한국해양대학교 제어계측공학과 (공학사)
 1998년 : 한국해양대학교 대학원 제어계측공학과(공학석사)
 2000년 : 한국해양대학교 대학원 제어계측공학과 박사과정 수료

관심분야 : 적응제어, 퍼지제어, 선박제어 등
 E-mail : ybkl124@hanmail.net

김인환(Inhwan Kim)

1982년 : 부산대학교 기계공학과(공학사)
 1989년 : 부산대학교 대학원 기계공학과(공학석사)
 2004년 : 한국해양대학교 대학원 제어계측공학과(공학박사)
 1982년~1988년 : 국방과학연구소 연구원
 1992년~현재 : 진주산업대학교 기계공학과 교수

관심분야 : 적응추적론, 적응제어, 퍼지제어 등
 E-mail : ihkim@cjcc.jinju.ac.kr

김종화(Jonghwa Kim)

1981년 : 부산대학교 기계공학과(공학사)
 1985년 : 부산대학교 대학원 기계공학과(공학석사)
 1989년 : 부산대학교 대학원 기계공학과(공학박사)
 1990년~현재 : 한국해양대학교 IT공학부 교수

1996~1997 : University of Wales, Cardiff 연구교수
 관심분야 : 적응제어, 퍼지제어, 지능제어, 시스템 식별 등
 E-mail : kimjh@mail.hhu.ac.kr