새로운 구조의 L-K함수를 이용한 시간 지연 선형시스템의 시간 종속 안정성

Delay Dependent Stability of Time-delayed Linear Systems using New Structure of L-K Function

김진훈*
(Jin-Hoon Kim)

Abstract - In this paper, we consider the stability of linear systems without delay decomposition. A less conservative result obtained without delay decomposition is strongly required since it is a basis to get an improved result by applying simple delay decomposition. Unlike the most popular Lyapunov-Krasovskii(L-K) function, we consider the cross terms between variables. Based on this new structure of L-K function, we derive a delay-dependent stability criterion in the form of linear matrix inequality(LMI). Finally, we show, by well-known two examples, that our result is less conservative than the recent results.

Keywords : Stability, Time-delay, Cross terms of variables, No delay decomposition, LMI

1. 서 론

시간지연 선형시스템은 시스템이 갖고 있는 시간지연 항은 전체 시스템의 불안정성이나 성능하락의 주요 요소 중 하나이기에, 오랫동안 많은 연구자들에 의하여 연구되어지고 있는 문제들 중 하나이다. 시간지연 선형시스템에 대한 안정성 해석 혹은 안정화 문제는 크게 시간지연 독립과 시간지연 종속의 두 가지로 분류할 수 있다. 시간지연 독립에 대한 결과는 시간지연의 크기와 무관한 결과이기에 시간지연의 크기에 따라 안정성을 보장해주는 시간지연 종속 안정성보다 만족하는 결과를 얻기가 더욱 어렵고, 대부분의 경우 시간지연의 범위가 정하여져 있기에 시간지연 종속 안정성에 더 많은 관심이 있어 왔다[15].

시간지연이 상수인 경우에는 주파수 영역에서 다룰 수 있으나, 본 연구에서의 시간지연 요소는 시간에 따라 변화하는 시간지연을 대상으로 하기에 시간 영역에서만 가능하다. 시간영역에서의 연구는 초기에는 Razumikhin정리[15]가 사용되었으나, 이는 L-K함수를 이용하는 것의 특별한 경우이기에, 현재 대부분의 연구는 L-K함수를 이용한 좀 더 나은 시간지연종속 안정성에 대한 결과를 얻고자 노력하고 있다.

다음으로 기술되는 전형적인 시변 시간지연을 갖는 시간지연 시스템을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (1)$$

여기서 $x \in R^n$ 은 상태벡터, 행렬 $A, A_d \in R^{n \times n}$ 은 상수 행렬, 초기상태 $\phi(t)$ 는 연속 미분 가능 벡터이고, 시간지연은 다음을 만족한다.

$$0 < h \leq d(t) \leq h, \text{ and } \dot{d}(t) \leq \mu, \forall t \geq 0. \quad (2)$$

또한 시간지연의 변화율이 알려지지 않은 경우에는 $\mu \rightarrow \infty$ 로 하면 된다.

시간종속 안정성 문제는 수식 (2) 주어진 μ 에 대하여 시스템 (1)의 안정성을 보장하는 최대의 h 를 구하는 문제이다. 이를 해결하기 위하여 대부분의 경우에 사용되어지는 L-K함수는 다음의 형태이다[1]-[12],[15].

$$\begin{aligned} V(x_t) = & x^T(t)Px(t) + \int_{t-d(t)}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta \\ & + \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta)R\dot{x}(\theta)d\theta ds \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 1차적분항은 시간지연 변화율 μ 에 종속인 결과를 얻기 위하여, 그리고 2차적분항은 시간지연의 크기 h 에 종속인 결과를 얻기 위하여 필수적인 항이다. 그리고 (3)의 2차적분항은 가중된 1차적분, $\int_{t-h}^t (h-t+s)\dot{x}^T(\theta)R\dot{x}(\theta)d\theta$ 와 동치이다.

지금까지의 연구는 (3)의 L-K함수를 바탕으로 좀 더 나은 결과를 얻기 위하여 많은 노력이 있어왔다. 대표적인 것으로는 시스템 모델변환[1][15], Jensen의 부등식[15], 삼차적분[9][13], 준양확정행렬의 추가[4], 변수추가[10], 영(zero) 더미(dummy) 함수 추가[5], 그리고 구간 분할[3][7][8]등이 있다. 이중 구간분할은 시간지연을 N 개의 부구간으로 나누고,

* Corresponding author: Dept. of Electronics Engineering, Chungbuk National University, Korea.

E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr

Received : November 12, 2012; Accepted : January 15, 2013

즉 $[0, h] = \cup_{k=1}^N [(k-1)\bar{h}, k\bar{h}]$, $\bar{h} = \frac{h}{N}$, (3)의 L-K 함수에

$$\int_{t-h}^t [x^T(s) \quad x^T(s-\bar{h}) \cdots x^T(s-(N-1)\bar{h})] Z [x^T(s) \quad x^T(s-\bar{h}) \cdots x^T(s-(N-1)\bar{h})]^T ds$$

의 항을 더하고, 마지막 이중적분항을 $\sum_{k=1}^N \int_{-kh_0}^{-(k-1)\bar{h}} \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta) R_k \dot{x}(\theta) d\theta ds$ 로 치환한 후 $d(t)$ 가

각 부구간(sub-interval)에 속할 때 기존의 결과를 이용하여 안정성 조건을 유도하는 단순한 응용이다. 따라서 구간분할 없이 좀 더 나은 결과를 얻을 수만 있다면, 구간 분할을 이용하여 이를 개선할 수 있다. 따라서 구간 분할 없이 안정성을 보장하는 결과를 얻는 것이 매우 필요하기에, 본 논문에서의 주 관심은 구간 분할 없이 기존의 결과보다 우수한 안정성 조건의 제시이다.

구간 분할 없이, 안정성 개선을 위하여 이루어진 결과를 보이기 위하여, 결과들의 비교에 가장 많이 사용된 다음 행렬 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}$, $A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ 을 갖는 시스템 (1)을 생각하자. 저자가 아는 한, 이 시스템의 안정성을 보장하는 결과는 수년간 $\lim_{\mu \rightarrow 0} h \leq 4.47$, $\lim_{\mu \rightarrow \infty} h \leq 1.86$ 로 고정되어 있었다. 그러다가 최근에 Kim[13]은 안정성을 보장하는 개선된 새로운 결과 $\lim_{\mu \rightarrow 0} h \leq 4.97$ 을 제시하였다.

본 논문에서는 구간분할 없이, 시스템 (1)의 시간중속 안정성에 대한 개선된 결과를 제시하는 것이 주 목적이며, 이를 얻기 위한 주요 아이디어는 다음과 같다.

(i) 지금까지 사용되어진 L-K함수 (3)에서는 $x(\theta)$ 와 $\dot{x}(\theta)$ 의 2차함수 즉, $x^T(\theta) Q x(\theta)$ 와 $\dot{x}^T(\theta) R \dot{x}(\theta)$ 만이 사용되어지고 이의 크로스 항은 사용되어지지 않은 점에 주목하여, 이의 크로스 항을 L-K함수에 도입하는 것이다.

(ii) L-K 함수에 상태 및 이의 시간 미분항에 적당한 가중함수를 도입하는 것, 즉 $(h-t+s)^{n_1} x(\theta)$ 과 $(h-t+s)^{n_2} \dot{x}(\theta)$, $n_1 \in [0, 2]$, $n_2 \in [0, 4]$ 을 도입하여 이의 2차항 뿐만 아니라 크로스 항까지도 도입하는 것이다.

2. 예비 결과

다음의 보조정리들은 본 논문의 주요 결과를 얻는데 사용되어지는 결과들이다.

보조정리 1. 행렬 $W = W^T > 0$, 함수 $f(t, s) \in R^n$, 그리고 스칼라 함수 $\varphi(t, s) \geq 0, \forall t \in [t-h, t]$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{t-h}^t \varphi(t, s) f^T(t, s) W f(t, s) ds \leq h_a \cdot \xi^T(t) F W^{-1} F^T \xi(t) + 2\xi^T(t) F \int_{t-h}^t \varphi(t, s) f(t, s) ds \quad (4)$$

여기서, $h_a = \int_{t-h}^t \varphi(t, s) ds$ 이고, 적분변수에 독립인 적당한 차원의 벡터 $\xi(t)$, 그리고 적당한 차원의 행렬 F 이다.

증명. Schur complement[14]에 의하여

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F W^{-1} F^T & F \\ F^T & W \end{bmatrix} \geq 0 &\Rightarrow \varphi(t, s) \begin{bmatrix} F W^{-1} F^T & F \\ F^T & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ \Rightarrow \int_{t-h}^t \begin{bmatrix} \xi^T(t) \\ f^T(t, s) \end{bmatrix} \varphi(t, s) \begin{bmatrix} F W^{-1} F^T & F \\ F^T & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ f(t, s) \end{bmatrix} ds \geq 0 \\ \Rightarrow h_a \xi^T(t) F W^{-1} F^T + 2\xi^T(t) F \int_{t-h}^t \varphi(t, s) f(t, s) ds \\ + \int_{t-h}^t \varphi(t, s) f^T(t, s) W f(t, s) ds \geq 0 \\ \Leftrightarrow (4). \end{aligned}$$

이것으로 증명을 마친다. $\square$

보조정리 2. 대칭행렬 $W_i \in R^{n \times n}, i=1, 2, \dots, 5$ 에 대하여 $f(\alpha)$ 를 다음으로 정의하자

$$f(\alpha) = \alpha^2 W_1 + (h^2 - \alpha^2) W_2 + (h - \alpha) W_3 + \alpha W_4 + W_5.$$

그러면 임의의 대칭행렬 $\Gamma \in R^{n \times n}$ 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} &\{(i) h W_3 + W_5 < \Gamma, (ii) h W_4 + W_5 < \Gamma \\ &\{(iii) h^2 W_1 + \Gamma < 0, (iv) h^2 W_2 + \Gamma < 0 \\ &\Rightarrow f(\alpha) < 0, \forall \alpha \in [0, h] \end{aligned}$$

증명. 먼저 선형성에 의하여

$$\begin{aligned} (i), (ii) &\Rightarrow (h - \alpha) W_3 + \alpha W_4 + W_5 < \Gamma, \forall \alpha \in [0, h] \\ (iii), (iv) &\Rightarrow \alpha^2 W_1 + (h^2 - \alpha^2) W_2 + \Gamma < 0, \forall \alpha \in [0, h] \end{aligned}$$

따라서

$$f(\alpha) < \alpha^2 W_1 + (h^2 - \alpha^2) W_2 + \Gamma, \forall \alpha \in [0, h], \text{ by (i), (ii)} \\ < 0, \text{ by (iii), (iv)}$$

이것으로 증명을 마친다. $\square$

이 논문에서 사용되는 기호는 표준적인 것이다. 먼저, $R^n, R^{n \times m}$ 은 n 차원의 실수 벡터, $n \times m$ 차원의 실수 행렬을 의미하고, $(\cdot)^T$ 는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 나타낸다. 다음으로 대칭행렬 X 에 대하여, $X > 0$ (또는 $X \geq 0$)은 음 확정(또는 양 확정) 행렬을 나타낸다. 다음으로 비대칭행렬 $W \in R^{n \times n}$ 에 대하여 $2W = W + W^T$ 을 나타낸다. 끝으로 $0_{n \times m}$, I_n 은 $n \times m$ 차원의 영(zero)행렬, $n \times n$ 항등행렬을 나타낸다.

3. 주요 결과

시간지연에 대한 조건(2)를 갖는 시변 시간지연을 갖는 시간지연 선형시스템(1)의 안정성을 보장하는 결과를 LMI로 나타낸 것이 다음의 정리 1이다.

정리 1. 대칭 행렬 $P \in R^{4n \times 4n}$, $Q_1, Q_2 \in R^{n \times n}$, $\Gamma \in R^{8n \times 8n}$, $R_1, R_2, R_3 \in R^{3n \times 3n}$ 과 직사각형 행렬 $F_1, F_2, F_3, F_4 \in R^{8n \times 3n}$ 에 대하여, 다음의 LMI를 만족하면

$$(a) \begin{bmatrix} h\phi_{30} + \Phi_5 - \Gamma & hF_1 \\ hF_1^T & -h(R_2 + 2R_1E_1) \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

$$(b) \begin{bmatrix} \Phi_5 - \Gamma & hF_2 \\ hF_2^T & -h(R_2 + 2R_1E_1 + \bar{Q}_2) \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$(c) \begin{bmatrix} h^2\phi_{10} + \Gamma & \frac{1}{2}hF_3 \\ \frac{1}{2}hF_3^T & -\frac{1}{2}(2R_3 + 2R_2E_1 + 2R_3E_2) \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

$$(d) \begin{bmatrix} \Gamma & \frac{1}{2}hF_4 \\ \frac{1}{2}hF_4^T & -\frac{1}{2}(2R_3 + 2R_2E_1 + 2R_3E_2) \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$(e) \begin{aligned} P > 0, Q_1 > 0, Q_1 + hQ_2 > 0, \\ R_1 > 0, R_3 > 0, R_1 + hR_2 + h^2R_3 > 0 \end{aligned} \quad (9)$$

조건 (2)를 갖는 시간지연 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다. 여기서 $\phi_{10}, \Phi_{30}, \Phi_5, \bar{Q}_2$ 는 다음으로 정의되며

$$\begin{aligned} \phi_{10} &= 2(F_3 - F_4) \begin{bmatrix} e_0 \\ e_0 \\ e_2 \end{bmatrix}, \\ \phi_{30} &= -(1-\mu)e_2^T Q_2 e_2 + 2(F_1 - F_2) \begin{bmatrix} e_0 \\ e_0 \\ e_2 \end{bmatrix} + 2(F_3 - F_4) \begin{bmatrix} e_0 \\ e_2 \\ e_0 \end{bmatrix} \\ \Phi_5 &= 2[e_1^T \ e_3^T \ (e_5 + e_6)^T (e_7 + e_8)^T] P \begin{bmatrix} A_c \\ e_4 \\ e_1 - e_3 \\ he_1 - (e_5 + e_6) \end{bmatrix} \\ &+ e_1^T (Q_1 + hQ_2) e_1 - (1-\mu)e_2^T Q_1 e_2 \\ &+ \begin{bmatrix} e_1 \\ A_c \\ hA_c \end{bmatrix}^T (R_1 + hR_2 + h^2R_3) \begin{bmatrix} e_1 \\ A_c \\ hA_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \\ e_0 \end{bmatrix}^T R_1 \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \\ e_0 \end{bmatrix} \\ &+ 2F_1 \begin{bmatrix} e_5 \\ e_2 - e_3 \\ -e_5 \end{bmatrix} + 2F_2 \begin{bmatrix} e_6 \\ e_1 - e_2 \\ he_1 - e_6 \end{bmatrix} \\ &+ 2F_3 \begin{bmatrix} e_7 \\ -e_5 \\ -2e_7 \end{bmatrix} + 2F_4 \begin{bmatrix} e_8 \\ he_1 - e_6 \\ h^2e_1 - 2e_8 \end{bmatrix}, \\ \bar{Q}_2 &= [I_n \ 0_{n \times n} \ 0_{n \times n}]^T Q_2 [I_n \ 0_{n \times n} \ 0_{n \times n}], \end{aligned} \quad (10)$$

또한 상수 행렬 $E_1, E_2, e_k, \{k=0,1,2,\dots,8\}$ 는 다음이다.

$$\begin{aligned} A_c &= Ae_1 + A_d e_2, \\ e_k &= [0_{n \times (k-1)n} \ I_n \ 0_{n \times (8-k)n}]^T, k=1,2,\dots,8; \quad e_0 = 0 \cdot e_1, \\ E_1 &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_n & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & I_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

증명. 먼저 단순함수를 위하여 다음과 같은 스칼라 함수, 벡터들을 정의하자.

$$\begin{aligned} \varphi(t,s) &= h-t+s, \\ \eta(t,s) &= [x^T(s) \ \dot{x}^T(s) \ \varphi(t,s)\dot{x}^T(s)], \\ \chi(t) &= [x^T(t) \ x^T(t-h) \int_{t-h}^t x^T(s)ds \ \int_{t-h}^t \varphi(t,s)x^T(s)ds], \\ \xi^T(t) &= [x^T(t) \ x^T(t-d(t)) \ x^T(t-h) \ \dot{x}^T(t-h) \\ &\quad \int_{t-h}^{t-d(t)} x^T(s)ds \ \int_{t-d(t)}^t x^T(s)ds \\ &\quad \int_{t-h}^{t-d(t)} \varphi(t,s)x^T(s) \int_{t-d(t)}^t \varphi(t,s)x^T(s)ds], \end{aligned} \quad (12)$$

그러면 (11)에 정의된 행렬 $e_k, \{k=0,1,2,\dots,8\}$ 에 의하여 다음이 성립한다.

$$\xi^T(t)e_1^T = x^T(t), \dots, \xi^T(t)e_8^T = \int_{t-d(t)}^t \varphi(t,s)x^T(s)ds. \quad (13)$$

다음으로 $\varphi^{n_1}(t,s)x(s), \varphi^{n_2}(t,s)\dot{x}(s), n_1 \in [0,2], n_2 \in [0,4]$ 의 변수들 간의 크로스 항들을 고려한 다음의 새로운 L-K 후보 함수를 생각하자.

$$\begin{aligned} V(x_t) &= \chi^T(t)P\chi(t) + \int_{t-d(t)}^t x^T(s)(Q_1 + \varphi(t,s)Q_2)x(s)ds \\ &+ \int_{t-h}^t \eta^T(t,s)(R_1 + \varphi(t,s)R_2 + \varphi^2(t,s)R_3)\eta(t,s)ds \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 조건 (9)의 첫 번째 조건 $P > 0$, 그리고 두 번째에서 세 번째 조건에 의하여 $Q_1 + \varphi(t,s)Q_2 > 0, \forall s \in [t-h, t]$ 이고, 네 번째에서 여섯 번째 조건에 의하여 다음이 성립하므로 $R_1 + \varphi(t,s)R_2 + \varphi^2(t,s)R_3 > 0, \forall s \in [t-h, t]$, (14)에 정의된 함수는 L-K 함수로써 충분하다.

다음으로 (14)의 시스템 (1)의 궤적에 따른 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2\chi^T(t)P\dot{\chi}(t) + x^T(t)(Q_1 + hQ_2)x(t) \\ &\quad - (1-\dot{d}(t))x^T(t-d(t))(Q_1 + (h-d(t))Q_2)x(t-d(t)) \\ &\quad + \eta^T(t,t)(R_1 + hR_2 + h^2R_3)\eta(t,t) - \eta^T(t,t-h)R_1\eta(t,t-h) \\ &\quad + v_1(x_t) + v_2(x_t) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $v_1(x_t), v_2(x_t)$ 는 적분이 포함된 다음이다.

$$\begin{aligned} v_1(x_t) &= - \int_{t-d(t)}^t x^T(s)Q_2x(s)ds, \\ v_1(x_t) &= \int_{t-h}^t \frac{\partial}{\partial t} \eta^T(t,s)(R_1 + \varphi(t,s)R_2 + \varphi^2(t,s)R_3)\eta(t,s)ds \\ &= - \int_{t-h}^t \eta^T(t,s)(R_2 + 2\varphi(t,s)R_3)\eta(t,s)ds \\ &\quad - 2 \int_{t-h}^t \eta^T(t,s)(R_1 + \varphi(t,s)R_2 + \varphi^2(t,s)R_3) \frac{d}{dt} \eta(t,s)ds \\ &= - \int_{t-h}^t \eta^T(t,s)(R_2 + 2R_1E_1)\eta(t,s)ds \\ &\quad - \int_{t-h}^t \varphi(t,s)\eta^T(t,s)(2R_3 + 2R_2E_1 + 2R_3E_2)\eta(t,s)ds \end{aligned}$$

위의 마지막 두 수식을 얻는데, (11)에 정의된 행렬 E_1, E_2 과

다음의 관계식 $\frac{d}{dt}\eta(t, s) = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_0 \\ -x(s) \end{bmatrix}$ 이 사용되었다. 따라서

$d(t) \in [t-h, t]$ 임을 고려하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} v_1(x_t) + v_2(x_t) = & \\ & - \int_{t-h}^{t-d(t)} \eta^T(t, s)(R_2 + 2R_1 E_1) \eta(t, s) ds \\ & - \int_{t-d(t)}^t \eta^T(t, s)(R_2 + 2R_1 E_1 + \bar{Q}_2) \eta(t, s) ds \\ & - \int_{t-h}^{t-d(t)} \varphi(t, s) \eta^T(t, s)(2R_3 + 2R_2 E_1 + 2R_3 E_2) \eta(t, s) ds \\ & - \int_{t-d(t)}^t \varphi(t, s) \eta^T(t, s)(2R_3 + 2R_2 E_1 + 2R_3 E_2) \eta(t, s) ds \quad (16) \end{aligned}$$

여기서 $\bar{Q}_2$ 는 (10)에 정의되어 있다. 수식 (16)의 처음 두 개

에는 보조정리 1에서 $\int_{t-h}^{t-d(t)} 1 ds = h - d(t)$, $\int_{t-d(t)}^t 1 ds = d(t)$,

그리고 나머지 두 개 수식에는 $\int_{t-h}^{t-d(t)} \varphi(t, s) ds = (h - d(t))^2$,

$\int_{t-d(t)}^t \varphi(t, s) ds = \frac{1}{2}(h^2 - (h - d(t))^2)$ 를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} v_1(x_t) + v_2(x_t) \leq & \\ & (h - d(t)) \xi^T(t) F_1 (R_2 + 2R_1 E_1)^{-1} F_1^T \xi(t) + 2\xi^T(t) F_1 \int_{t-h}^{t-d(t)} \eta(t, s) ds \\ & + d(t) \xi^T(t) F_2 (R_2 + 2R_1 E_1 + \bar{Q}_2)^{-1} F_2^T \xi(t) + 2\xi^T(t) F_2 \int_{t-h}^{t-d(t)} \eta(t, s) ds \\ & + \frac{1}{2}(h - d(t))^2 \xi^T(t) F_3 (2R_3 + 2R_2 E_1 + 2R_3 E_2)^{-1} F_3^T \xi(t) \\ & + 2\xi^T(t) F_3 \int_{t-h}^{t-d(t)} \varphi(t, s) \eta(t, s) ds \\ & + \frac{1}{2}(h^2 - (h - d(t))^2) \xi^T(t) F_4 (2R_3 + 2R_2 E_1 + 2R_3 E_2)^{-1} F_4^T \xi(t) \quad (17) \\ & + 2\xi^T(t) F_4 \int_{t-d(t)}^t \varphi(t, s) \eta(t, s) ds \end{aligned}$$

따라서, (15) 과 (17)를 종합하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \leq & 2\chi^T(t) P \chi(t) + x^T(t) (Q_1 + h Q_2) x(t) \\ & - (1 - \mu) x^T(t - d(t)) (Q_1 + (h - d(t)) Q_2) x(t - d(t)) \\ & + \eta^T(t, t) (R_1 + h R_2 + h^2 R_3) \eta(t, t) - \eta^T(t, t - h) R_1 \eta(t, t - h) \\ & + (h - d(t)) \xi^T(t) F_1 (R_2 + 2R_1 E_1)^{-1} F_1^T \xi(t) \\ & + 2\xi^T(t) F_1 \int_{t-h}^{t-d(t)} \eta(t, s) ds \\ & + d(t) \xi^T(t) F_2 (R_2 + 2R_1 E_1)^{-1} F_2^T \xi(t) \\ & + 2\xi^T(t) F_2 \int_{t-h}^{t-d(t)} \eta(t, s) ds \\ & + \frac{1}{2}(h - d(t))^2 \xi^T(t) F_3 (2R_3 + 2R_2 E_1 + 2R_3 E_2)^{-1} F_3^T \xi(t) \\ & + 2\xi^T(t) F_3 \int_{t-h}^{t-d(t)} \varphi(t, s) \eta(t, s) ds \\ & + \frac{1}{2}(h^2 - (h - d(t))^2) \xi^T(t) F_4 (2R_3 + 2R_2 E_1 + 2R_3 E_2)^{-1} F_4^T \xi(t) \\ & + 2\xi^T(t) F_4 \int_{t-d(t)}^t \varphi(t, s) \eta(t, s) ds \end{aligned}$$

다음으로 다음 두 개의 관계식과

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \eta(t, s) ds = & \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} x(s) ds \\ x(t_2) - x(t_1) \\ (h - t_2) h x(t_2) - (h - t_1) x(t - t_1) - \int_{t_1}^{t_2} x(s) ds \end{bmatrix}, \\ \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t, s) \eta(t, s) ds = & \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t, s) x(s) ds \\ (h - t_2) h x(t_2) - (h - t_1) x(t - t_1) - \int_{t_1}^{t_2} x(s) ds \\ (h - t_2)^2 x(t_2) - (h - t_1)^2 x(t - t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t, s) x(s) ds \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(12)에 정의된 벡터 $\xi(t)$, 그리고 (11)에 정의된 상수행렬들을 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \leq & \xi^T(t) ((h - d(t))^2 \Phi_1 + (h^2 - (h - d(t))^2) \Phi_2 + (h - d(t)) \Phi_3 \\ & + d(t) \Phi_4 + \Phi_5) \xi(t) \quad (18) \end{aligned}$$

여기서 $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ 는 다음과 같고

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2} F_3 (2R_3 + 2R_2 E_1 + 2R_3 E_2)^{-1} F_3^T + \phi_{10} \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} F_4 (2R_3 + 2R_2 E_1 + 2R_3 E_2)^{-1} F_4^T \\ \Phi_3 &= F_1 (R_2 + 2R_1 E_1)^{-1} F_1^T + \phi_{30}, \\ \Phi_4 &= F_2 (R_2 + 2R_1 E_1 + \bar{Q}_2)^{-1} F_2^T, \end{aligned}$$

Φ_5 는 (10)에 정의된 값이다. 마지막으로 Schur complement에 의하여 다음을 얻고,

$$(5) \Leftrightarrow h \Phi_3 + \Phi_5 < \Gamma, \quad (6) \Leftrightarrow h \Phi_4 + \Phi_5 < \Gamma,$$

또한 (7), (8)에 의하여

$$h^2 \Phi_1 + \Gamma < 0, \quad h^2 \Phi_2 + \Gamma < 0$$

을 얻으므로, 보조정리 2에 의하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} ((h - d(t))^2 \Phi_1 + (h^2 - (h - d(t))^2) \Phi_2 + (h - d(t)) \Phi_3 \\ + d(t) \Phi_4 + \Phi_5 < 0, \quad \forall d(t) \in [0, h] \end{aligned}$$

따라서, (18)에 의하여 $\dot{V}(x_t) < 0, \forall \xi(t) \neq 0$ 이다. 끝으로, Lyapunov-Krasovskii 안정성 정리[13]로부터 시간지연에 대한 조건 (2)를 갖는 시간 지연 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다. 이것으로 증명을 마친다. $\square$

4. 수치 예제

위에서 새로이 제시된 정리 1의 유용성을 보이기 위해 잘 알려진 두 개의 수치 예제를 제시한다.

예제 1. 조건 (2)을 갖는 다음과 같은 잘 알려진 시간 지연 시스템을 생각하자[1]-[15].

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t-d(t))$$

이 예제 1의 시스템은 시간지연이 시간종속이 아닌 상수인 경우에 안정성을 보장하는 최대 시간지연의 크기는 $\max_{d(t)=0, \forall t} h = 6.17258$ 임이 알려져 있다[15]. 다음 표 1은 시간지연이 상수가 아닌 시변인 경우 기존의 대표적 결과와 이 논문의 정리 1을 바탕으로 구한 안정성을 보장하는 최대 h 의 값을 정리한 것이다.

표 1 여러 μ 에 따른 최대 허용 h 값

Table 1 Maximal h for various μ

	$\mu=0$	$\mu=0.1$	$\mu \rightarrow \infty$
Wu et al.[2]	4.47	3.60	-
Park & Ko[4]	4.47	3.66	1.86
Kim[13]	4.97	3.86	1.86
정리1	5.32	4.20	1.88
improvement(%)	7.04	8.80	1.07

예제 2. 조건 (2)을 갖는 다음과 같은 잘 알려진 시간 지연 시스템을 생각하자[2][4][13].

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t-d(t))$$

이 예제 2 시스템은 시간지연이 시간종속이 아닌 상수인 경우에 안정성을 보장하는 최대 시간지연의 크기 역시 다음의 값 $\max_{d(t)=0, \forall t} h = \pi$ 임이 알려져 있다[15].

다음 표 2는 시간지연이 상수가 아닌 시변인 경우 기존의 대표적 결과와 이 논문의 정리 1을 바탕으로 구한 안정성을 보장하는 최대 h 의 값을 정리한 것이다.

표 2 여러 μ 에 따른 최대 허용 h 값

Table 2 Maximal h for various μ

	$\mu=0$	$\mu=0.1$	$\mu \rightarrow \infty$
Wu et al.[2]	1.82	1.71	-
Park & Ko[4]	1.99	1.75	1.60
Kim[13]	2.52	2.02	1.60
정리1	3.08	2.38	1.64
improvement(%)	22.22	17.82	2.50

마지막으로 위의 표 1, 2에서 보듯이 새로이 제시된 정리 1의 결과는 최근의 결과와 비교할 때, $\mu \rightarrow 0$ 인 경우 뿐만 아니라, $\mu \rightarrow \infty$ 에도 기존의 결과와 비교하여 개선된 결과를 제시함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 시변 지연을 갖는 시간지연 시스템에 대해서 안정성 문제를 다루었다. 구간분할을 적용하지 않은 결과는 단순한 구간 분할에 의하여 성능이 쉽게 개선된 결과를 얻을 수 있기 때문에, 본 논문에서는 구간 분할을 적용하지 않고, 기존의 결과보다 우수한 시간종속 안정성 결과를 얻는데 주된 목적이 있다. 이를 위하여 가중된 변수들의 cross항들을 고려한 새로운 L-K함수를 제안하고, 확장된 변수들을 이용하여 시간종속안정성에 관한 결과를 LMI 형태로 제시하였다. 마지막으로 두 개의 수치 예제를 통하여 새로이 제시된 결과가 기존의 결과보다 우수함을 보였다.

감사의 글

이 논문은 2011년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음.

References

- [1] E. Fridman and U. Shaked, "A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 47, pp. 253-270, 2001.
- [2] M. Wu, Y. He, J.-H. She and G.-P. Liu, "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay system", *Automatica*, vol. 40, no. 8, pp.1435-1439, 2004.
- [3] X. Jiang and Q. L. Han, "On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay", *Automatica*, vol. 41, pp. 2099-2106, 2005.
- [4] P. Park and J.W. Ko, "Stability and robust stability for systems with a time-varying delay", *Automatica*, 43, 1855-1858, 2007.
- [5] Y. He, Q.-G. Wang, L. Xie and C. Lin, "Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay", *Automatica*, vol. 43, pp. 371-376, 2007.
- [6] H. Shao, "Improved delay-dependent stability criteria for systems with a delay varying in a range", *Automatica*, vol. 44, pp. 3215-3218, 2008.
- [7] D. Yue, E. Tian and Y. Zhang, A piecewise analysis method to stability analysis of linear continuous/discrete systems with time-varying delay, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol.19, pp. 1493-1518, 2009.
- [8] Q.-L. Han, "A discrete delay decomposition approach

to stability of linear ralpharded and neutral systems," *Automatica*, 45, 517-524, 2009.

- [9] H. Shao, "New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay, *Automatica*, 45,744-749, 2009.
- [10] J. Sun, G.-P. Liu, J. Chen and D. Rees, "Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays", *Automatica*, vol. 46, pp. 466-470, 2010.
- [11] X.L. Zhu, G.-H. Yang, "New results of stability analysis for susyems with time-varying delay", *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol.20, pp.596-606, 2010.
- [12] P. Park, J.W. Ko, and C. Jeong, "Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays," *Automatica*, 47, 235-238, 2011.
- [13] J.-H. Kim, "Note on stability of linear systems with time-varying delay", *Automatica*, 47, 2118-2121, 2011.
- [14] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied mathematics, 1994.
- [15] K. Gu, V.L. Kharitonov and J. Chen, *Stability of time-delay systems*, Birkhausser, 2003.

저 자 소 개

김 진 훈 (金 鎭 勳)

1961년10월18일생. 1985년 서울대 전기공학
학과 졸업. 1985년-1986년 신영전기(주)
연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및
전자공학과졸업(석사). 1993년 동 전기
및 전자공학과 졸업(공학박). 1993년-1994
년 경상대 제어계측공학과 전임강사.
1998년 미국 UCI 방문교수. 2008년 미국
UTA 방문교수. 1995년 - 현재 충북대학
교 전자정보대학 교수.

Tel : 043-261-2387

Fax : 043-268-2386.

E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr