전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소 탄소성해석

Elasto-Plastic Analysis Using the Generalized Finite Element Method with Global-Local Enrichment Functions

한소정* · 김대진** · 이창준***

Han, So Jeong · Kim, Dae Jin · Lee, Chang Joon

Abstract

This paper presents a procedure to numerically generate proper enrichment functions for three-dimensional elasto-plastic problems. This procedure involves the solution of boundary value problems around local regions exhibiting nonlinear behavior and the enrichment of the global solution space with the local solutions through the partition of unity method framework. This approach can produce accurate nonlinear solutions with a reduced computational cost compared to standard finite element methods since computationally intensive nonlinear iterations can be performed on coarse global meshes after the creation of enrichment functions properly describing localized nonlinear behavior. A three-dimensional nonlinear problem based on the rate-independent J_2 plasticity theory with isotropic hardening is solved using the proposed procedure to demonstrate its robustness and accuracy.

Key words : Generalized Finite Element Method, Global-Local Enrichment Functions, Elasto-Plastic Analysis, Local Nonlinear Behavior

요 지

본 논문에서는 국부적으로 비선형 거동을 보이는 고전적인 J_2 소성흐름 이론에 근거한 탄소성 문제의 해를 효율적으로 구하기 위해 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법을 제안한다. 제안된 기법은 비선형 거동을 보이는 영역을 포함하는 국부 문제의 비선형 해를 구하고 이를 일반유한요소법의 단위 오목 분할의 개념을 통해 전체 문제의 해 공간을 확장하는데 이용한다. 이는 적은 계산량으로 복잡한 탄소성문제의 정확한 해를 얻는 것을 가능하게 하며 기법의 강건성과 정확성을 입증하기 위한 수치해석 예제가 다루어진다.

핵심용어 : 일반유한요소법, 전체-국부 확장함수, 탄소성해석, 국부적 비선형 거동

1. 서 론

많은 공학 응용분야에서 대부분 선형 탄성 거동을 보이나 국부적으로 제한된 소성 거동을 보이는 복잡한 구조물을 해석하는 것은 일반적이다. 이러한 종류의 문제들을 해석하기 위해 상용 유한 요소 프로그램을 이용할 경우 일반적으로 하중 이력(load history)을 몇몇 하중 증가분(load increment)으로 나눈 뒤 각각의 증가분에 대해 뉴턴-랩슨 기법(Newton-Raphson method)을 이용하여 반복적으로(iteratively) 풀게 된다. 하지만 문제의 크기가 커지거나 하중 이력이 복잡할 경우 주어진 비선형 문제를 풀기 위한 연산량이 무척 많아지게 된다. 따라서 실무에서는 많은 경우 해의 정확성이 떨어짐에도 불구하고 단순화된 선형 탄성 해석으로 이를 대체하는 경우

가 많다.

이에 본 논문에서는 국부적으로 비선형 거동을 보이는 탄소성 해석의 계산량을 줄이면서도 정확한 해를 구할 수 있는 전체-국부 확장함수(global-local enrichment function)를 지닌 일반유한요소법(generalized finite element method)을 제안한다. 이 기법은 국부적으로 비선형 거동을 보이는 영역 주변으로 경계치 문제를 생성하여 그 해를 구한 뒤, 구해진 해를 단위 오목 분할(partition of unity)의 개념에 근거한 전체 문제의 확장함수로 이용한다. 이 방법은 라그랑지 승수법(Lagrange multiplier) 혹은 점구속(point constraints) 등과 같이 표준적인 유한요소법(standard finite element method)에 쓰이는 변분원리(variational principle)의 수정을 요구하지 않는다. 뿐만 아니라 국부적인 소성 거동을 적절히 묘사하는

*정회원 · 경희대학교 대학원 건축공학과 석사과정(E-mail : hansj@khu.ac.kr)

**정회원 · 경희대학교 공과대학 건축공학과 조교수(교신저자)

***경북대학교 공과대학 건축토목공학부 BK 연구교수

확장함수를 구성한 이후에는 많은 계산량이 요구되는 반복과정(nonlinear iterations)이 성긴 요소망으로 구성된 전체 문제에서 수행되기 때문에 비선형 문제를 풀기위한 연산량을 감소시킬 수 있다.

이와 같은 특징을 지니는 새로운 일반유한요소기법을 소개하기 위해 본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 속도에 무의존하는 J_2 소성흐름 이론과 등방경화에 근거한 탄소성해석을 요약한다. 3장에서는 일반유한요소법에 대한 간략한 소개와 함께 국부적으로 비선형 거동을 보이는 탄소성 해석을 위한 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법에 대해 논의한다. 4장은 제안된 일반요소법을 이용해 두 물질의 경계를 지니는 막대문제를 해석하고 해의 정확성을 평가하며 5장에서는 논문의 요약 및 결론을 제공한다.

2. 탄소성해석의 정식화

2.1 고전적 J_2 소성흐름이론

본 논문에서 수행되는 탄소성해석과 관련된 몇몇 개념과 수식을 소개한다. 이들은 선형 등방 경화(linear isotropic hardening)와 작은 변형률(small strain)을 가정한 고전적인 J_2 소성흐름 이론(flow theory)에 근거하고 있다(Simo and Hughes, 2000). 힘의 평형을 묘사하는 편미분방정식은 3차원 영역(domain) $\Omega_G = \Omega_G \cup \partial\Omega_G$ 에 정의되며 이의 경계는 $\partial\Omega_G^u \cap \partial\Omega_G^\sigma = \emptyset$ 를 만족시키는 두 가지 영역의 합 $\partial\Omega_G = \partial\Omega_G^u \cup \partial\Omega_G^\sigma$ 으로 구성된다. 영역 Ω_G 에 정의된 힘의 평형 방정식은

$$\nabla \cdot \sigma = 0$$

으로 정의되며 경계 조건은 $\partial\Omega_G$ 에

$$u = \bar{u} \text{ on } \partial\Omega_G^u, \quad \sigma \cdot n = \bar{t} \text{ on } \partial\Omega_G^\sigma \quad (2)$$

으로 주어진다. n 은 $\partial\Omega_G^\sigma$ 에 직교하는 바깥 방향으로의 단위 벡터이며 $\bar{t}$ 와 $\bar{u}$ 는 경계치 문제의 주어진 견인력(traction)과 변위(displacement)이다. 변형률 텐서는 변위 기울기 텐서(gradient tensor)의 대칭 부분으로 표현되며

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (3)$$

다음과 같은 탄성 및 소성 기여분의 합 분해(additive decomposition)에 근거한다.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (4)$$

응력 텐서 σ 는 단지 탄성 변형률 텐서 ε^e 에 비례하며 다음의 식으로 주어진다.

$$\sigma = C:\varepsilon^e = \left(\kappa[1 \otimes 1] + 2\mu \left[I + \frac{1}{3}1 \otimes 1 \right] \right) : \varepsilon^e \quad (5)$$

κ 는 체적탄성률을, μ 는 전단탄성계수를, I 는 4차 단위 텐서 그리고 1 는 2차 단위 텐서를 의미한다. 허용 가능한 응력 상

태는 다음과 같은 von Mises 항복 조건에 의해 정의된다.

$$f(\sigma, \alpha) = \|dev[\sigma]\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K(\alpha) \leq 0 \quad (6)$$

$\|\cdot\|$ 는 텐서의 유클리디언 노름(Euclidean norm)을, $dev[\cdot]$ 은 텐서의 편차(deviatoric)부분을, α 는 내부 상태 변수(internal state variable)을, $K(\alpha)$ 는 선형 등방 경화 관계식을 의미한다. 묘사된 탄소성 문제는 변형률 경로(strain history)에 의존하는 비선형 재료모델에 의한 비선형 거동을 보인다. 따라서 뉴턴-랩슨 방법에 의해 선형화되고 점진적인(incremental) 방법으로 이의 해를 구해야 한다. 속도에 무의존하는(rate-independent) 소성론의 관점에서 각각의 증분 단계는 유사 시간 스텝(pseudo time step) t^n 으로 정의되며 주어진 변형률 증가 $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ 에 해당하는 항복조건과 일관된 응력 텐서 σ_{n+1} 는 radial return mapping 알고리즘에 의해 구해진다(Simo and Taylor, 1985).

3. 탄소성 해석을 위한 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법

3.1. 일반유한요소법

일반유한요소법(Oden et al., 1998; Duarte et al., 2000; Strouboulis et al. 2001)은 소위 단위오목분할법(partition of unity method)의 특별한 경우로 Babuska와 Melenk(Babuska and Melenk, 1997) 및 Duarte와 Oden(Duarte and Oden, 1996)의 연구로부터 비롯되었다.

일반유한요소법의 형상함수 ϕ_{ai} 는 아래의 식에 주어진 것처럼 단위오목분할함수 φ_a 와 확장함수 L_{ai} 의 곱으로 만들어진

$$\phi_{ai} : \varphi_a L_{ai} \quad i \in I(\alpha) \quad (7)$$

φ_a 는 $\alpha = 1, \dots, N$ (은 절점의 개수)에 대해 정의된 단위오목분할함수로 전체 영역 Ω 내의 모든 점 x 에 대해 $\sum_{a=1}^N \varphi_a(x) = 1$ 와 같은 특징을 만족시킨다. 절점 x_a 에 정의된 확장함수의 인덱스 집합은 $I(\alpha)$ 로 표현한다. φ_a 의 패치(patch) $\{x: \varphi_a \neq 0\}$ 는 ω_a 로 나타낸다. 일반유한요소법에서 선형 라그랑지안 형상함수를 일반적으로 단위오목분할함수로 이용한다. φ_a 의 패치 ω_a 는 절점 x_a 를 공유하는 유한요소의 집합이다. 이와 같이 구성된 형상함수는 일반유한요소 형상함수로 불린다.

일반유한요소법의 가장 큰 장점은 확장함수 L_{ai} 를 자유롭게 선택할 수 있다는 것이다. 예를 들면, 균열이 존재하는 경우 유한요소 내부의 불연속 변위 및 특이성(singularity)을 묘사하기 위해 Heaviside 혹은 Westgaard 함수를 각각 사용할 수 있다(Moes et al. 1999; Oden et al., 1998). 확장함수로 국부 경계치 문제의 해를 사용하는 것도 가능하며(Duarte and Kim, 2008), 이는 전체-국부 확장함수(global-local enrichment function)로 불리며 주어진 편미분 방정식의 해에 대한 정보가 제한되어 있는 경우에 무척 효율적으로 적용될 수 있다.

3.2 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법

본 장에서는 비선형 거동이 국부적으로 나타나는 문제에 대해 확장함수를 구성하는 과정을 소개하며 이들 중 특히 3차원 탄소성해석 문제에 초점을 맞춘다. 확장함수를 구성하기 위한 전체-국부 과정(global-local procedure)은 (Kim et al. 2010)에 소개된 것과 유사하나 국부소성영역을 지나는 탄소성 문제의 해석에 적합하도록 수정이 필요하다. 이 수치해석 방법의 주된 개념은 국부적인 비선형 거동을 정확하게 묘사할 수 있는 확장함수를 수치해석적으로 구성하고 이를 전체 비선형 해공간을 확장시키기 위해 사용하는 것이다. 이 과정은 세 단계로 구성되어 있으며 그림 1에 나타나 있다. 첫 번째 단계는 선형탄성 재료모델을 가정하고 최종 유사 시간 스텝의 하중을 적용시켜 전체 문제(global problem)을 푸는 것이다. 두 번째 단계는 그림 1(b)과 같이 비선형 거동을 보이는 작은 영역을 포함하는 국부 문제(local problem)를 구성하고 이전 단계에서 구한 전체문제의 선형 탄성해를 이 문제의 경계조건으로 적용하는 것이다. 국부 문제의 해는 최종 시간 스텝에서의 국부적인 비선형 거동을 잘 묘사할 수 있다. 이후 전체 문제는 이전 단계에서 구해진 비선형 국부 문제의 해로 확장(enrichment)되며 그림 1(c)가 나타내는 것처럼 각각의 시간 스텝에서의 해를 구한다.

위에 언급된 과정을 수학적으로 엄밀하게 표현하기 위해 다음의 표기 방법을 이용한다. 아래첨자 G와 L은 각각 전체 및 국부 문제를 가리키며 추가의 아래첨자 lin은 선형탄성 재료모델을 이용해 얻어진 해를 의미한다. 아래첨자 lin이 사용되지 않는 경우 탄소성 재료모델을 이용해 얻어진 해를 가리킨다. 위첨자 n 은 각각의 유사 시간 스텝 t^n , $n=1, \dots, n_{\max}$ 을 ($n_{\max}$ 는 유사 시간 스텝의 최대값) 지칭하기 위해 사용된다.

3.2.1 선형 초기 전체 문제

일반유한요소법의 해 $\mathbf{u}_{G,lin}^{n_{\max}}$ 는 식 (1)과 (2)에 의해 정의되는 문제의 최종 시간 스텝 $t_{n_{\max}}$ 에서의 해로 선형 탄성 재료모델을 가정하고 다음과 같이 구한다:

$\forall \mathbf{u}_{G,lin}^{n_{\max}} \in X_{G,lin}^{n_{\max}}(\Omega_G)$ 에 대해 $\mathbf{u}_{G,lin}^{n_{\max}} \in X_{G,lin}^{n_{\max}}(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G)$ 을 만족시키는 다음 적분식의 해 $\mathbf{u}_{G,lin}^{n_{\max}}$ 를 구하라.

$$\int_{\Omega_G} \sigma(\mathbf{u}_{G,lin}^{n_{\max}}) : \varepsilon(\mathbf{v}_{G,lin}^{n_{\max}}) dx + \eta \int_{\partial\Omega_G^f} \mathbf{u}_{G,lin}^{n_{\max}} \cdot \mathbf{v}_{G,lin}^{n_{\max}} ds = \int_{\partial\Omega_G^f} \mathbf{t}^{n_{\max}} \cdot \mathbf{v}_{G,lin}^{n_{\max}} ds + \eta \int_{\partial\Omega_G^f} \bar{\mathbf{u}}^{n_{\max}} \cdot \mathbf{v}_{G,lin}^{n_{\max}} ds \quad (8)$$

$X_{G,lin}^{n_{\max}}(\Omega_G)$ 는 Ω_G 에 정의된 힐베르트 해 공간 $H^1(\Omega_G)$ 의

일반유한요소 형상함수를 이용한 이산화(discretization)이다. 식 (8)의 변수 η 는 벌칙계수(penalty parameter)이다. 벌칙법은 디리클레(Dirichlet) 경계조건을 부여하는데 보편적으로 활용되고 있는 기법일 뿐 아니라 비교적 간단한 프로그래밍으로 구현이 가능하다. 식 (8)에 의해 정의된 문제를 풀기 위해 일반적으로 성긴 유한요소망을 사용하며 선형 탄성 재료 모델을 이용한다. 이 문제는 그림 1(a)에 나타난 단계에 해당하며 편의상 선형 초기 전체 문제(linear initial global problem)라 명명한다.

3.2.2 비선형 국부 문제

Ω_L 을 국부적으로 비선형 거동을 보이는 영역을 포함하는 Ω_G 의 하부영역(subdomain)으로 정의하고 다음의 국부 문제를 최종 유사 시간 스텝 $t^{n_{\max}}$ 에 대해 비선형 재료모델을 가정하고 구한다:

$\forall \mathbf{v}_L^{n_{\max}} \in X_L^{n_{\max}}(\Omega_L)$ 에 대해 $\mathbf{u}_L^{n_{\max}} \in X_L^{n_{\max}}(\Omega_L) \subset H^1(\Omega_L)$ 을 만족시키는 다음 적분식의 해 $\mathbf{u}_L^{n_{\max}}$ 를 구하라.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_G} \sigma(\mathbf{u}_L^{n_{\max}}) : \varepsilon(\mathbf{v}_L^{n_{\max}}) dx + \eta \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^f} \mathbf{u}_L^{n_{\max}} \cdot \mathbf{v}_L^{n_{\max}} ds + \kappa \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^f} \mathbf{u}_L^{n_{\max}} \cdot \mathbf{v}_L^{n_{\max}} ds &= \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^f} \mathbf{t}^{n_{\max}} \cdot \mathbf{v}_L^{n_{\max}} ds + \eta \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^f} \bar{\mathbf{u}}^{n_{\max}} \cdot \mathbf{v}_L^{n_{\max}} ds \\ &+ \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^f} (\mathbf{t}(\mathbf{u}_G^{n_{\max}}) + \kappa \mathbf{u}_G^{n_{\max}}) \cdot \mathbf{v}_L^{n_{\max}} ds \end{aligned} \quad (9)$$

$X_L^{n_{\max}}(\Omega_L)$ 는 Ω_L 에 정의된 힐베르트 해 공간 $H^1(\Omega_L)$ 의 일반유한요소 형상함수를 이용한 이산화(discretization)이다. 이 문제의 핵심적인 사항은 선형 초기 전체 문제의 해 $\mathbf{u}_{G,lin}^{n_{\max}}$ 를 $\partial\Omega_L \cap (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)$ 에서의 경계조건으로 이용하고 이 문제의 해 $\mathbf{u}_L^{n_{\max}}$ 는 영역 Ω_L 에서의 비선형거동을 정확하게 묘사할 수 있다는 것이다. 이 문제는 그림 1(b)에 묘사되어 있다. 변수 η 는 벌칙계수(penalty parameter)이며 스프링 강성 κ 은 국부적인 비선형 거동이 Ω_L 의 내부에 완전히 구속될 경우 (Kim et al. 2010)에 소개된 것처럼 선형 탄성적인 경우와 마찬가지로 선택될 수 있다. 이 문제는 편의상 비선형 국부 문제(nonlinear local problem)라 명명한다.

3.2.3 비선형 전체 문제를 위한 전체-국부 확장함수

3.2.1장과 3.2.2장에 묘사된 선형 초기 전체 문제와 비선형 국부 문제는 비선형 전체 문제에 비선형 전체-국부 확장함수 $\mathbf{u}_L^{n_{\max}}$ 를 공급하기 위한 과정이다. 이 과정들 이후 각각의 유

그림 1. 탄소성 해석을 위한 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소 알고리즘

사 시간 스텝에 대해 비선형 전체 문제의 해를 구하기 위한 비선형 반복(nonlinear iteration)이 수행된다. 그림 1(c)에 표현된 것과 같이 $\mathbf{u}_L^{n_{\max}}$ 에 의해 확장된 비선형 전체 문제를 $\mathbf{u}_G^n$ 를 구하기 위해 푼다. 임의의 유사 시간 스텝 t^n 에 대한 전체-국부 일반유한요소 형상 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_\alpha^n(\mathbf{x}) = \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{u}_L^{n_{\max}}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

임의의 유사 시간 스텝 t^n 에 대해 $\mathbf{u}_L^{n_{\max}}$ 에 의해 확장된 비선형 전체 문제의 약식(weak formulation)은 다음과 같이 주어진다:

$\forall \mathbf{v}^{n_{\max}} \in \mathbf{X}_G^n(\Omega_G)$ 에 대해 $\mathbf{u}_G^n \in \mathbf{X}_G^n(\Omega_G) \subset \mathbf{H}^1(\Omega_G)$ 을 만족시키는 다음 적분식의 해 $\mathbf{u}_G^n$ 를 구하라.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_G} \sigma(\mathbf{u}_G^n) : \varepsilon(\mathbf{v}_G^n) d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega_G^n} \mathbf{u}_G^n \cdot \mathbf{v}_G^n ds = \\ \int_{\partial\Omega_G^n} \bar{\mathbf{t}}^n \cdot \mathbf{v}_G^n ds + \eta \int_{\partial\Omega_G^n} \bar{\mathbf{u}}^n \cdot \mathbf{v}_G^n ds \end{aligned} \quad (11)$$

$\mathbf{X}_G^n(\Omega_G)$ 는 $\mathbf{X}_{G,lin}^{n_{\max}}(\Omega_G)$ 에 식 (10)으로 정의된 일반유한요소 형상 함수가 추가된 Ω_G 에 정의된 힐베르트 해 공간 $\mathbf{H}^1(\Omega_G)$ 의 이산화(discretization)이다. 이 문제는 비선형 확장 전체 문제(nonlinear enriched global problem)이라 명명된다. 비선형 전체-국부 확장함수는 3차원 탄소성 문제를 해석할 경우 국부 문제의 자유도의 개수와 상관없이 생긴 전체 문제의 요소망에 절점 당 오직 3개의 자유도만을 추가한다. 따라서 전체 문제의 크기를 크게 증가시키지 않으면서도 주어진 탄소성 문제의 미소 스케일 거동을 묘사하기 위해 국부 문제에 세분화된 요소망을 사용하거나 높은 차수의 형상 함수를 사용하는 것이 가능하다.

4. 수치 해석 예제

전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법의 효율성을 검증하기 위해 그림 2에 나타난 두 물질의 경계면을 가지는 막대 문제를 해석한다. 제안된 기법에 의해 계산된 비선형

그림 2. 두 물질의 경계면을 지닌 막대 문제

해는 이미 높은 정확도를 가지는 것으로 입증된 다항함수를 이용한 일반유한요소법(hp-GFEM)에 의한 해(Barros et al. 2004; Torres et al. 2008)와 비교하여 그 정확성을 평가한다. 그림 2에 나타난 것과 같이 이 문제의 영역은 $12 \times (7 \times 1 \times 1)$ 개의 사면체 요소로 이산화되며 그림에 표현된 것처럼 가운데의 한 층(layer)만이 다른 층보다 작은 항복 응력값(yield stress)을 가지게 된다. 따라서 하중이 증가함에 따라 가운데 층에서만 항복이 발생하여 전체 영역의 일부분에만 소성변형이 구속되게 된다.

그림에 나타난 막대의 기하학적 치수는 $h=7.0$, $\alpha=1.0$, $b=1.0$, $m=1.0$ 으로 주어지며 막대의 꼭대기와 바닥 부분에 일정한 전단력 $t_y=7.0$ 이 작용한다. 선형 등방 경화 모델의 물성치는 다음과 같이 주어진다: 탄성계수(E)=4.0, 포아송 비(ν)=0.0, 항복 응력(σ_y)=4.0, 선형 경화 계수(h)=1.0 (가운데 층); 탄성계수(E)=4.0, 포아송 비(ν)=0.0, 항복 응력(σ_y)=12.0, 선형 경화 계수(h)= 1.0^{-4} (바깥 층). 뉴턴 수렴을 위한 오차 허용치는 10^{-4} 로 주어지며 14단계의 동일한 유사 시간

그림 3. 제안된 일반유한요소법들을 이용한 두 물질의 경계면을 지닌 문제의 비선형 해석 과정

그림 4. hp -GFEM과 $GFEM^h$ 에 의해 계산된 비선형 하중 변위 곡선의 비교

스텝이 점진적인 해석(incremental analysis)을 위해 사용된다. 따라서 각각의 유사 시간 단계에서의 하중 증가분은 0.5가 된다. 해의 정확성에 대한 척도로 막대의 꼭대기 부분의 중앙에서 측정된 변위를 이용하며 이는 y 방향의 최대 변위와 같다.

주어진 예제를 3장에 논의된 일반유한요소법을 이용해 해석하는 과정이 그림 3에 소개되어 있다. 첫 번째 단계는 그림 3(a)에 묘사된 것처럼 성긴 요소망에 선형 탄성 재료 모델을 가정하고 전체 문제를 푸는 것이다. 전체 문제의 성긴 요소망으로부터 소성 변형이 발생하는 영역을 포함하는 국부 영역을 추출한 뒤 첫 번째 단계에서 구한 전체 문제의 해를 국부 문제의 경계 조건으로 이용하여 최종 유사 시간 스텝에 대한 해를 구한다. 정확한 국부 문제의 비선형 해를 구하기 위해 요소망의 세분화가 이루어지며 국부 문제를 풀기 위한 스프링 강성값(k)은 9.158이다. 국부 문제는 앞 단락에 소개된 비선형 재료모델을 이용해 해석되며 이 과정은 그림 3(b)에 묘사되어 있다. 마지막으로 계산된 비선형 국부 문제의 해를 성긴 요소망으로 구성된 전체 문제의 확장함수로 이용된다. 그림 3(c)에 작은 구형으로 표시된 것처럼 단지 8개의 절점에만 확장함수가 추가되며 비선형 국부 문제에 이용된 것과 동일한 비선형 재료 모델을 이용해 점진적인 해석 방식으로 비선형 전체 문제의 해를 구하게 된다.

그림 4는 각각의 유사 시간 스텝에 대해 주어진 문제를 다항식을 확장함수로 이용하는 일반유한요소법(hp -GFEM)과 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법($GFEM^h$)을 이용해 계산된 y 방향 최대 변위를 그래프로 표현한 것이다. hp -GFEM과 $GFEM^h$ 의 해를 얻기 위해 국부 및 전체 문제 모두에 2차 형상함수가 사용되었으며 소성 변형이 존재하는 가운데 층에 동일한 레벨의 요소망의 세분화가 실시되었다. 이들 두 가지 방법에 의해 계산된 해의 정확도를 평가하기 위해 3차의 형상함수와 전체 영역에 걸쳐 요소망의 세분화를 실시해 참고해(reference solution)를 계산하였으며 그림 4에 포함되어 있다. 그림 4에 주어진 결과로부터 $GFEM^h$ 에 의해

전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소 탄소성해석

그림 5. 두 물질의 경계면을 지닌 막대 문제의 최종 유사 시간 스텝에서의 평면 변형률 분포: (a) hp -GFEM 해, (b) $GFEM^h$ 해, (c) 참고 해

계산된 비선형 해는 hp -GFEM에 의한 해와 거의 비슷한 값을 지니며 참고해의 값과도 거의 차이가 나지 않음을 알 수 있다. 따라서 전체 문제에 적은 수의 자유도를 이용함에도 불구하고 제안된 $GFEM^h$ 이 hp -GFEM에 필적하는 높은 정확도의 해를 구할 수 있음을 보여준다. 그림 5는 전술된 세 가지 경우의 해를 구하기 위해 사용된 전체 문제의 요소망과 이들 방법을 이용해 얻어진 최종 유사 시간 스텝에서의 소성 변형률의 분포를 보여준다. 그림 1의 결과에서 예상되는 것처럼 hp -GFEM과 $GFEM^h$ 에 의해 계산된 다른 물질로 구성된 가운데 층 주변의 소성 변형률의 분포는 아주 유사하다.

5. 결 론

본 논문에서는 국부적으로 비선형 거동을 보이는 탄소성 문제를 풀기 위해 적절한 확장함수를 생성시키는 일반유한요소법을 제안하였다. 이 기법은 국부적으로 비선형 거동을 보이는 영역 주변으로 경계치 문제를 생성 및 해석하여 이의 해를 단위 오목 분할(partition of unity)의 개념을 통한 전체 문제의 확장함수로 이용한다. 기법의 효율성을 보이기 위해 J_2 소성흐름 이론에 근거한 탄소성 문제의 한 예로 두 물질의 경계면을 가지는 막대 문제가 해석되었다. 본 논문의 결론은 다음과 같다.

- 1) 제안된 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법은 해에 대한 정보가 제한된 국부적으로 비선형 거동을 보이는 문제를 효율적으로 풀기 위해 확장함수를 수치적으로 구성하는 것을 가능하게 한다. 따라서 일반유한요소법의 장점을 더 다양한 문제를 푸는 데 확장시킨다.
- 2) 수치 해석 예제의 해석 결과는 제안된 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법이 기존의 다항함수를 형상함

수로 이용하는 일반유한요소법에 의한 해에 필적할 만한 정확도의 해를 계산할 수 있음을 보여준다.

- 3) 제안된 일반유한요소법을 이용할 경우 많은 계산량이 요구되는 반복과정(nonlinear iterations)이 성긴 요소망으로 구성된 전체 문제에서 수행되기 때문에 비선형 문제를 풀기위한 연산량을 감소시킬 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 신진연구사업임(2011-0011078).

참고문헌

- Babuška, I. and Melenk, J.M. (1997) The partition of unity finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, pp.727-758.
- Barros, F.B., Proenca, S.P.B. and Barcellos, C.S., (2004) Generalized finite element method in structural nonlinear analysis: a p -adaptive strategy, *Computational Mechanics*, 33, pp. 95-107.
- Duarte, C.A. and Kim, D.-J., (2008) Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6-8) pp. 487-504.
- Duarte, C.A., Babuška, I. and Oden J.T., (2000) Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems, *Comput Struct* 77, pp. 215-232.
- Duarte, C.A.M. and Oden, J.T., (1996) An hp adaptive method using clouds, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, pp. 237-262.
- Kim, D.-J., Pereira, J.P. and Duarte, C.A. (2010) Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse generalized FEM meshes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(3), pp. 335-365.
- Moes, N., Dolbow, J. and Belytschko, T. (1999) A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, pp. 131-150.
- Oden, J.T., Duarte, C.A. and Zienkiewicz, O.C. (1998) A new cloud-based hp finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153, pp. 117-126.
- Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. (1998) *Computational Inelasticity*. Springer.
- Simo, J.C. and Taylor, R.L. (1985) Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(1), pp. 101-118.
- Strouboulis, T., Copps, K. and Babuška, I. (2001) The generalized finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, pp. 4081-4193.
- Torres, I.R. and Proenca, (2008) Generalized finite element method in nonlinear three-dimensional analysis, *International Journal of Computational Methods*, 5, pp. 37-62.

◎ 논문접수일 : 11년 11월 13일
 ◎ 심사의뢰일 : 11년 11월 18일
 ◎ 심사완료일 : 11년 12월 29일