동수압 모형을 이용한 고립파의 처오름 해석

Run-up Heights of Solitary with a Hydrodynamic Pressure Model

이진우* · 조용식**

Lee, Jin Woo · Cho, Yong-Sik

Abstract

A three-dimensional hydrodynamic pressure model is newly developed in this study. The velocity components, the free surface elevations and the hydrodynamic pressures are calculated with two steps in the model. In the first step, the momentum equations are solved using the previously calculated hydrodynamic pressure and free surface elevation within a staggered grid system. In the second step, the velocity fields and free surface elevations are obtained. The developed model is applied to propagation and subsequent run-up process of nearshore solitary waves attacking a circular island. The obtained run-up heights are compared with laboratory measurements done by the Coastal Engineering Research Center(CERC), US Army Corps of Engineers. A very reasonable agreement is observed.

Key words : Free surface flows, Hydrodynamic pressure, Wave propagation, Wave run-up

요 지

본 연구에서는 동수압을 고려할 수 있는 수치모형을 제시하였다. 제시한 모형은 유속성분, 자유수면변위와 동수압을 해석하기 위하여, 크게 2단계로 나누어 수치모의를 수행한다. 첫 번째 단계에서는 이전단계에서 구한 동수압과 자유수면변위를 이용하여 운동량방정식을 해석하고, 두 번째 단계에서는 최종적인 유속장과 자유수면변위를 계산한다. 개발된 수치모형을 이용하여 원형섬 주변에서 고립파의 진행과 처오름 현상에 대해 수치모의를 실시하였고, 수치모의 결과는 미국 육군 공병단 해안공학연구소(CERC)의 수리실험 결과와 비교하였다. 수치모의 결과는 실험결과와 잘 일치하였다.

핵심용어 : 자유수면 흐름, 동수압, 파랑의 전파, 처오름

1. 서 론

천수방정식은 Navier-Stokes 방정식을 시간 및 수심방향으로 적분하여 얻어지는 2차원 방정식으로써 정수압 분포 가정을 하고 있다. 이를 정수압 모형이라고 하며, 이러한 정수압 모형을 사용하여 흐름해석을 할 경우 연직방향의 운동량방정식의 계산이 생략되므로 방정식 및 수치기법 등의 간략화로 인한 수치해석상의 장점이 있다(Lee and Cho, 2001). 그러나 정수압 모형은 연직 특성길이가 수평 특성길이, 즉 수심이 파랑의 파장에 비해 상대적으로 작은 경우에만 적용이 가능하며, 수심이 상대적으로 깊어지게 되면 정확도가 떨어지는 계산 결과를 제공할 수 있다. 따라서, 흐름방향으로 밀도차가 큰 경우나 수중구조물로 인하여 바닥경사가 급격하게 변하는 경우에는 동수압을 고려하여야 한다(Kocçigit et al., 2002).

매 시간단계마다 변화하는 자유수면을 해석하기 위하여 좌

표변환을 실시하게 되면 VOF기법 등 추가적인 수치기법의 사용 없이 자유수면을 해석할 수 있는 장점이 있지만 수중구조물이 정수면의 높이보다 클 경우, 좌표계의 특성상 수면과 구조물과 맞닿는 지점에서의 수심이 0이 되기 때문에 계산 값이 발산하는 등 처오름, 처내림의 수치해석에 어려움이 발생한다. 따라서, 본 연구에서는 연직방향의 격자 크기(Δz)를 변화시키는 방법을 이용하여 수치모형을 개발하고, 개발된 수치모형을 이용하여 원형섬 주위에서 고립파의 전파와 처오름에 대해 수치해석을 실시하였다.

다음 장에서는 지배방정식을 서술하며, 제3장에서는 정수압 단계와 동수압 보정단계로 구분되는 수치기법에 대하여 상세하게 서술한다. 제4장에서는 수치모형 실험에 대하여 상세하게 설명하며, 특히 수리모형실험 결과가 있는 원형섬에 입사하는 고립파의 처오름 문제에 적용한다. 마지막으로, 제5장에서는 결론을 기술한다.

*정회원. 한양대학교 일반대학원 건설환경공학과 박사후연구원, 전 한양대학교 건설환경공학과 박사과정(E-mail: moonguy@hanyang.ac.kr)
Member. Post Doctoral Researcher, Department of Civil and Environmental Engineering, Hanyang University

**교신저자. 정회원. 한양대학교 공과대학 건설환경공학과 교수(Tel: +82-2-2220-0393, Fax: +82-2-2220-1945, E-mail: ysc59@hanyang.ac.kr)
Corresponding Author. Member. Professor, Department of Civil and Environmental Engineering, Hanyang University

2. 지배방정식

일반적으로 자유수면을 갖는 3차원 비압축성 유체에 대한 지배방정식은 Navier-Stokes 방정식을 사용한다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \quad (4)$$

여기서, $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ 그리고 $w(x, y, z, t)$ 는 각각 x -축, y -축과 z -축 방향의 유속 성분이고, t 는 시간, $p(x, y, z, t)$ 는 압력을 나타내며, g 는 중력가속도, ν 는 물의 동점성계수이다.

자유수면의 해석에는 연속방정식 (1)을 수심에 대하여 적분하여 얻어지는 자유수면방정식(free surface evolution equation)을 사용한다(Casulli and Cheng, 1992).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right] = 0 \quad (5)$$

여기서, $h(x, y)$ 는 수심이고 $\eta(x, y, t)$ 는 자유수면변위이다.

운동량 방정식의 압력항은 정수압과 동수압으로 나누어 분리할 수 있고, 다음과 같이 나타낼 수 있다(Casulli and Stelling, 1998).

$$p(x, y, z, t) = g[\eta(x, y, t) - z] + q(x, y, z, t) \quad (6)$$

여기서, $q(x, y, z, t)$ 는 동수압이고, 압력을 정수압과 동수압으로 분리하면 운동량방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (9)$$

Fig. 1. A definitive sketch of a staggered grid system

수면에서의 경계조건은 바람에 의해 발생하는 응력으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau = \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_T(u_a - u), \quad \tau_v = \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_T(v_a - v) \quad (10)$$

여기서, γ_T 는 양의 값을 갖는 바람의 응력 계수이고, u_a 와 v_a 는 각각 x -축과 y -축 방향의 바람 유속 성분이다. 바닥에서의 마찰은 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\tau = \gamma_B u, \quad \tau_v = \gamma_B v \quad (11)$$

여기서, γ_B 는 항상 양의 값을 갖는 바닥마찰 계수이고, 난류 경계층가정(turbulence boundary-layer assumption)으로 유도되었다. 와점성계수 ν 는 항상 양의 값으로 가정하였다.

3. 수치해석

본 연구에서는 동수압과 자유수면의 해석을 위해서 다음의 2단계를 이용하여 수치모형을 개발하였다. 첫 번째 단계에서는 임시적인 유속성분과 자유수면변위를 구하기 위해, 수평방향 운동량 방정식의 자유수면 경사항과 자유수면 방정식의 유속항을 θ 방법(Casulli and Cattani, 1994)을 이용하여 차분하고, 안정성을 위해 바람의 응력, 연직 점성과 바닥 마찰은 음해적으로 차분한다. 두 번째 단계에서는 임시의 유속성분과 자유수면 변위가 동수압을 고려하여 수정된다.

전체 영역은 길이 Δx , 폭 Δy 그리고 높이 $\Delta z_k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}$ 의 직사각형 격자 (N_x, N_y, N_z)로 구성된다. 여기서, $z_{k+1/2}$ 는 주어진 수면의 높이이다. Fig. 1과 같이 동수압과 자유수면변위는 격자의 가운데에서 정의되고 각각의 유속성분은 격자의 경계에서 정의된다.

3.1 정수압 단계(Hydrostatic Pressure Step)

반응해법으로 운동량 방정식을 차분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다. $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ 와 $\tilde{\eta}$ 는 최종 유속장과 자유수면변위가 아닌 임시적인 유속장과 자유수면변위를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+1/2jk}^{n+1} = & F u_{i+1/2jk}^n - (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} [g(\tilde{\eta}_{i+1j}^n - \tilde{\eta}_{ij}^n) + q_{i+1jk}^n - q_{ijk}^n] \\ & - \theta g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\eta}_{i+1j}^{n+1} - \tilde{\eta}_{ij}^{n+1}) + \nu \Delta t \frac{\tilde{u}_{i+1/2jk+1}^{n+1} - \tilde{u}_{i+1/2jk}^{n+1} - \tilde{u}_{i+1/2jk}^{n+1} + \tilde{u}_{i+1/2jk-1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2jk+1/2}^n - \Delta z_{i+1/2jk-1/2}^n} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{ij+1/2k}^{n+1} = & Fv_{ij+1/2k}^n - (1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y}[g(\eta_{ij+1}^n - \eta_{ij}^n) + q_{ij+1k}^n - q_{ijk}^n] \\ & - \theta g \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{\eta}_{ij+1}^{n+1} - \tilde{\eta}_{ij}^{n+1}) + v\Delta t \frac{\frac{\tilde{v}_{ij+1/2k+1}^{n+1} - \tilde{v}_{ij+1/2k}^{n+1}}{\Delta z_{ij+1/2k+1/2}} - \frac{\tilde{v}_{ij+1/2k}^{n+1} - \tilde{v}_{ij+1/2k-1}^{n+1}}{\Delta z_{ij+1/2k-1/2}}}{\Delta z_{ij+1/2jk}^n} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{ijk+1/2}^{n+1} = & Fw_{ijk+1/2}^n - (1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta z_{ijk+1/2}^n}(q_{ijk+1}^n - q_{ijk}^n) \\ & + v\Delta t \frac{\frac{\tilde{w}_{ijk+3/2}^{n+1} - \tilde{w}_{ijk+1/2}^{n+1}}{\Delta z_{ijk+1}^n} - \frac{\tilde{w}_{ijk+1/2}^{n+1} - \tilde{w}_{ijk-1/2}^{n+1}}{\Delta z_{ijk}^n}}{\Delta z_{ijk+1/2}^n} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, Δz 는 바닥과 자유수면 근처를 제외한 나머지 격자내의 연속 2차원 표면사이의 거리로 정의하였고, 수면과 바닥 또는 자유수면 사이의 거리이다. 따라서, Δz 는 공간적인 위치에 따라 다르며, 자유수면 근처에서는 시간에 따라 달라지고, 지형의 변화 또는 이동경계를 고려하기 위하여 그 값이 0이 되기도 한다. 물론, $\Delta z = 0$ 이 되는 지점에서 운동량방정식은 더 이상 해석하지 않는다. 계수 F 는 이송항의 근사값이고, θ 는 0.5에서 1.0 사이의 값을 갖는 음해기법의 정도를 설정하는 변수이다(Casulli and Cattani, 1994).

Eq. (14)는 미지수 $\tilde{w}_{ijk+1/2}^{n+1}$ 로 인하여 3대각 행렬(tri-diagonal matrix system)의 형태를 갖는다. 이러한 시스템에서의 계수행렬의 형태는 대칭이며, 양의 값을 갖는다. 따라서,

Fig. 2. A schematic sketch of computational grid system and notation

Fig. 3. A sketch of the grid formulation

임시적인 연직방향 유속은 직접 해석하여 쉽게 구할 수 있다. 반면, Eqs. (12)와 (13)은 선형의 3대각 행렬로 구성되어있으나, 미지수인 자유수면 변위 $\tilde{\eta}^{n+1}$ 를 포함하고 있다. $\tilde{\eta}^{n+1}$ 를 해석하고, 수치적인 안정성을 위해 임시적인 유속장은 자유수면 방정식을 만족하여야 한다. 자유수면 방정식 (5)을 차분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{ij}^{n+1} = & \eta_{ij}^n - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{k=m}^M \Delta z_{i+1/2jk}^n \tilde{u}_{i+1/2jk}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i-1/2jk}^n \tilde{u}_{i-1/2jk}^{n+1} \right] \\ & - \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\sum_{k=m}^M \Delta z_{ij+1/2k}^n \tilde{v}_{ij+1/2k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{ij-1/2k}^n \tilde{v}_{ij-1/2k}^{n+1} \right] \\ & - (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{k=m}^M \Delta z_{i+1/2jk}^n u_{i+1/2jk}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i-1/2jk}^n u_{i-1/2jk}^{n+1} \right] \\ & - (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\sum_{k=m}^M \Delta z_{ij+1/2k}^n v_{ij+1/2k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{ij-1/2k}^n v_{ij-1/2k}^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, m 과 M 은 $1 \leq m \leq M \leq N_z$ 사이의 값으로, 계산 격자의 범위를 나타낸다. 즉, m 과 M 은 공간적인 위치에 따라 변화하며, M 의 경우에는 자유수면의 움직임에 따라 시간단계에 따라 변화한다.

Eqs. (12)와 (13)에 $\Delta z_{i+1/2jk}^n$ 와 $\Delta z_{ij+1/2k}^n$ 을 곱하게 되면 다음과 같은 행렬형태로 나타낼 수 있다.

$$\mathbb{A}_{i+1/2j}^n \tilde{\mathbb{U}}_{i+1/2j}^{n+1} = \mathbb{G}_{i+1/2j}^n - \theta g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\eta}_{i+1j}^{n+1} - \tilde{\eta}_{ij}^{n+1}) \Delta \mathbb{Z}_{i+1/2j}^n \quad (16)$$

$$\mathbb{A}_{ij+1/2}^n \tilde{\mathbb{V}}_{ij+1/2}^{n+1} = \mathbb{G}_{ij+1/2}^n - \theta g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\eta}_{ij+1}^{n+1} - \tilde{\eta}_{ij}^{n+1}) \Delta \mathbb{Z}_{ij+1/2}^n \quad (17)$$

$\tilde{\mathbb{U}}, \tilde{\mathbb{V}}, \Delta \mathbb{Z}, \mathbb{G}$ 와 $\mathbb{A}$ 는 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbb{U}}_{i+1/2j}^{n+1} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{i+1/2jm}^{n+1} \\ \tilde{u}_{i+1/2jM-1}^{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{i+1/2jm}^{n+1} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbb{V}}_{ij+1/2}^{n+1} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_{ij+1/2M}^{n+1} \\ \tilde{v}_{ij+1/2M-1}^{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{v}_{ij+1/2m}^{n+1} \end{pmatrix}, \Delta \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} \Delta z_M \\ \Delta z_{M-1} \\ \vdots \\ \Delta z_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{G}_{i+1/2j}^n = \begin{pmatrix} \Delta z_M \left\{ F u_{i+1/2jM}^n - (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} [g(\eta_{i+1j}^n - \eta_{ij}^n) + q_{i+1jM}^n - q_{ijM}^n] \right\} + \gamma_T \Delta t u_a^{n+1} \\ \Delta z_{M-1} \left\{ F u_{i+1/2jM-1}^n - (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} [g(\eta_{i+1j}^n - \eta_{ij}^n) + q_{i+1jM-1}^n - q_{ijM-1}^n] \right\} \\ \vdots \\ \Delta z_m \left\{ F u_{i+1/2jm}^n - (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} [g(\eta_{i+1j}^n - \eta_{ij}^n) + q_{i+1jm}^n - q_{ijm}^n] \right\} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{G}_{ij+1/2}^n = \begin{pmatrix} \Delta z_M \left\{ F v_{ij+1/2M}^n - (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y} [g(\eta_{ij+1}^n - \eta_{ij}^n) + q_{ij+1M}^n - q_{ijM}^n] \right\} + \gamma_T \Delta t v_a^{n+1} \\ \Delta z_{M-1} \left\{ F v_{ij+1/2M-1}^n - (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y} [g(\eta_{ij+1}^n - \eta_{ij}^n) + q_{ij+1M-1}^n - q_{ijM-1}^n] \right\} \\ \vdots \\ \Delta z_m \left\{ F v_{ij+1/2m}^n - (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y} [g(\eta_{ij+1}^n - \eta_{ij}^n) + q_{ij+1m}^n - q_{ijm}^n] \right\} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \Delta z_M + a_{M-1/2} + \gamma_T \Delta T & -a_{M-1/2} & & & \\ -a_{M-1/2} & \Delta z_{M-1} + a_{M-1/2} + a_{M-3/2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ -a_{M-3/2} & & & & \ddots \\ & & & & & -a_{m+1/2} \Delta z_M + a_{m+1/2} + \gamma_B \Delta t \end{pmatrix}$$

여기서, $a_k = v\Delta t/\Delta z_k$ 이다.

Eq. (15)를 벡터형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{ij}^{n+1} = & \delta_{ij}^n - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\Delta Z_{i+1/2j}^n)^T \tilde{\mathbb{U}}_{i+1/2j}^{n+1} - (\Delta Z_{i-1/2j}^n)^T \tilde{\mathbb{U}}_{i-1/2j}^{n+1}] \\ & - \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} [(\Delta Z_{ij+1/2}^n)^T \tilde{\mathbb{V}}_{ij+1/2}^{n+1} - (\Delta Z_{ij-1/2}^n)^T \tilde{\mathbb{V}}_{ij-1/2}^{n+1}] \end{aligned} \quad (18)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \delta_{ij}^n = & \eta_{ij}^n - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\Delta Z_{i+1/2j}^n)^T \tilde{\mathbb{U}}_{i+1/2j}^n - (\Delta Z_{i-1/2j}^n)^T \tilde{\mathbb{U}}_{i-1/2j}^n] \\ & - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y} [(\Delta Z_{ij+1/2}^n)^T \tilde{\mathbb{V}}_{ij+1/2}^n - (\Delta Z_{ij-1/2}^n)^T \tilde{\mathbb{V}}_{ij-1/2}^n] \end{aligned}$$

Eqs. (16)과 (17)을 $\tilde{\mathbb{U}}_{i\pm 1/2j}^{n+1}$ 와 $\tilde{\mathbb{V}}_{ij\pm 1/2}^{n+1}$ 에 대하여 치환한 뒤 Eq. (18)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{ij}^{n+1} - g\theta^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} [(\Delta Z)^T \mathbb{A}^{-1} \Delta Z]_{i+1/2j}^n (\tilde{\eta}_{i+1/2j}^{n+1} - \tilde{\eta}_{ij}^{n+1}) \\ - [(\Delta Z)^T \mathbb{A}^{-1} \Delta Z]_{i-1/2j}^n (\tilde{\eta}_{ij}^{n+1} - \tilde{\eta}_{i-1/2j}^{n+1}) \\ - g\theta^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} [(\Delta Z)^T \mathbb{A}^{-1} \Delta Z]_{ij+1/2}^n (\tilde{\eta}_{ij+1/2}^{n+1} - \tilde{\eta}_{ij}^{n+1}) \\ - [(\Delta Z)^T \mathbb{A}^{-1} \Delta Z]_{ij-1/2}^n (\tilde{\eta}_{ij}^{n+1} - \tilde{\eta}_{ij-1/2}^{n+1}) \\ = \delta_{ij}^n - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\Delta Z)^T \mathbb{A}^{-1} \mathbb{G}]_{i+1/2j}^n - [(\Delta Z)^T \mathbb{A}^{-1} \mathbb{G}]_{i-1/2j}^n \\ - \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} [(\Delta Z)^T \mathbb{A}^{-1} \mathbb{G}]_{ij+1/2}^n - [(\Delta Z)^T \mathbb{A}^{-1} \mathbb{G}]_{ij-1/2}^n \end{aligned} \quad (19)$$

행렬 $\mathbb{A}$ 는 $M \times m$ 행렬이고, $\mathbb{A}^{-1}$ 도 항상 양의 값을 갖기 때문에 $(\Delta Z)^T \mathbb{A}^{-1} \Delta Z$ 도 항상 양의 값을 갖는다. 따라서, Eq. (19)는 미지수 $\tilde{\eta}_{ij}^{n+1}$ 에 대한 5-대각 행렬의 형태로 나타나고, 이는 반복계산법을 이용하여 해석할 수 있다. 이를 해석하여 새로운 자유수면변위가 계산이 되면, Eqs. (16)과 (17)을 이용하여 $\tilde{\mathbb{U}}_{i+1/2j}^{n+1}$ 와 $\tilde{\mathbb{V}}_{ij+1/2}^{n+1}$ 를 구할 수 있다.

3.2 동수압 보정단계 (Hydrodynamic Correction Step)

두 번째 동수압 보정단계에서는 최종적인 유속장($u_{i+1/2jk}^{n+1}$, $v_{ij+1/2k}^{n+1}$, $w_{ijk+1/2}^{n+1}$)과 자유수면변위(η_{ijk}^{n+1})가 이전단계에서 구한 임시적인 유속성분과 자유수면변위에 동수압을 고려하여 계산된다(Chen, 2003a; 2003b).

$$u_{i+1/2jk}^{n+1} = \tilde{u}_{i+1/2jk}^{n+1} - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{q}_{i+1jk}^{n+1} - \tilde{q}_{ijk}^{n+1}) \quad (20)$$

$$v_{ij+1/2k}^{n+1} = \tilde{v}_{ij+1/2k}^{n+1} - \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} (\tilde{q}_{ij+1k}^{n+1} - \tilde{q}_{ijk}^{n+1}) \quad (21)$$

$$w_{ijk+1/2}^{n+1} = \tilde{w}_{ijk+1/2}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta z_{ijk+1/2}^n} (\tilde{q}_{ijk+1}^{n+1} - \tilde{q}_{ijk}^{n+1}) \quad (22)$$

여기서, $\tilde{q}$ 는 임시적인 동수압을 나타낸다. 자유수면 아래에 위치한 연직 격자층에 대해 연속방정식 (1)을 차분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1/2jk}^{n+1} \Delta z_{i+1/2jk}^n - u_{i-1/2jk}^{n+1} \Delta z_{i-1/2jk}^n}{\Delta x} + \\ \frac{v_{ij+1/2k}^{n+1} \Delta z_{ij+1/2k}^n - v_{ij-1/2k}^{n+1} \Delta z_{ij-1/2k}^n}{\Delta y} \\ + w_{ijk+1/2}^{n+1} - w_{ijk-1/2}^{n+1} = 0, k = m, m+1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (23)$$

자유수면이 위치한 격자층에 대해 자유수면 방정식 (5)을 차분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \eta_{ij}^{n+1} = \delta_{ij}^n - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{k=m}^M \Delta z_{i+1/2jk}^n u_{i+1/2jk}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i-1/2jk}^n u_{i-1/2jk}^{n+1} \right] \\ - \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\sum_{k=m}^M \Delta z_{ij+1/2k}^n v_{ij+1/2k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{ij-1/2k}^n v_{ij-1/2k}^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Eq. (23)을 이용하면 Eq. (24)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_{ij}^{n+1} = \delta_{ij}^n - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} [\Delta z_{i+1/2jM}^n u_{i+1/2jM}^{n+1} - \Delta z_{i-1/2jM}^n u_{i-1/2jM}^{n+1}] \\ - \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} [\Delta z_{ij+1/2M}^n v_{ij+1/2M}^{n+1} - \Delta z_{ij-1/2M}^n v_{ij-1/2M}^{n+1}] + \theta \Delta t w_{ijM-1/2}^{n+1} \end{aligned} \quad (25)$$

자유수면 격자에서의 압력을 정수압으로 가정할 경우, 압력의 보정은 $g(\eta - z) = g(\tilde{\eta} - z) + \tilde{q}$ 으로부터 구할 수 있고, 이를 이용하면 Eq. (25)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{q}_{ijM}^{n+1}}{g\theta\Delta t} = \frac{\delta_{ij}^n - \tilde{\eta}_{ij}^{n+1}}{\theta\Delta t} - \frac{\Delta z_{i+1/2jM}^n u_{i+1/2jM}^{n+1} - \Delta z_{i-1/2jM}^n u_{i-1/2jM}^{n+1}}{\Delta x} \\ - \frac{\Delta z_{ij+1/2M}^n v_{ij+1/2M}^{n+1} - \Delta z_{ij-1/2M}^n v_{ij-1/2M}^{n+1}}{\Delta y} + w_{ijM-1/2}^{n+1} \end{aligned} \quad (26)$$

Eqs. (20)-(22)를 Eq. (23)과 Eq. (26)에 대입하면 다음과 같은 동수압 $\tilde{q}_{ijk}^{n+1}$ 이 미지수인 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta\Delta t \left[\frac{(\tilde{q}_{i+1jk}^{n+1} - \tilde{q}_{ijk}^{n+1}) \Delta z_{i+1/2jk}^n - (\tilde{q}_{ijk}^{n+1} - \tilde{q}_{i-1jk}^{n+1}) \Delta z_{i-1/2jk}^n}{\Delta x^2} \right. \\ \left. + \frac{(\tilde{q}_{ij+1k}^{n+1} - \tilde{q}_{ijk}^{n+1}) \Delta z_{ij+1/2k}^n - (\tilde{q}_{ijk}^{n+1} - \tilde{q}_{ij-1k}^{n+1}) \Delta z_{ij-1/2k}^n}{\Delta y^2} \right. \\ \left. + \frac{(\tilde{q}_{ijk+1}^{n+1} - \tilde{q}_{ijk}^{n+1})}{\Delta z_{ijk+1/2}^n} - \frac{(\tilde{q}_{ijk}^{n+1} - \tilde{q}_{ijk-1}^{n+1})}{\Delta z_{ijk}^n} \right] \\ = \frac{\tilde{u}_{i+1/2jk}^{n+1} \Delta z_{i+1/2jk}^n - \tilde{u}_{i-1/2jk}^{n+1} \Delta z_{i-1/2jk}^n}{\Delta x} + \\ \frac{\tilde{v}_{ij+1/2k}^{n+1} \Delta z_{ij+1/2k}^n - \tilde{v}_{ij-1/2k}^{n+1} \Delta z_{ij-1/2k}^n}{\Delta y} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(\tilde{q}_{i+1/2M}^{n+1} - \tilde{q}_{ijM}^{n+1})\Delta z_{i+1/2M}^n - (\tilde{q}_{ijM}^{n+1} - \tilde{q}_{i-1/2M}^{n+1})\Delta z_{i-1/2M}^n}{\Delta x^2} \right. \\
& + \frac{(\tilde{q}_{ij+1M}^{n+1} - \tilde{q}_{ijM}^{n+1})\Delta z_{ij+1/2M}^n - (\tilde{q}_{ijM}^{n+1} - \tilde{q}_{ij-1M}^{n+1})\Delta z_{ij-1/2M}^n}{\Delta y^2} \\
& \left. + \frac{(\tilde{q}_{ijM}^{n+1} - \tilde{q}_{ijM-1}^{n+1})}{\Delta z_{ijM-1/2}^2} \right] \\
& = \frac{\tilde{\eta}_{ij}^{n+1} \delta_{ij}^n}{\theta \Delta t} + \frac{\tilde{u}_{i+1/2M}^{n+1} \Delta z_{i+1/2M}^n - \tilde{u}_{i-1/2M}^{n+1} \Delta z_{i-1/2M}^n}{\Delta x} \\
& + \frac{\tilde{v}_{ij+1/2M}^{n+1} \Delta z_{ij+1/2M}^n - \tilde{v}_{ij-1/2M}^{n+1}}{\Delta y}
\end{aligned} \quad (28)$$

Eq. (27)과 Eq. (28)을 더하게 되면 선형인 7개의 대각선을 갖는 행렬로 나타나며 이는 반복계산법을 이용하여 해석이 가능하다. 반복계산법을 이용하여 동수압이 계산되면 수평방향 유속성분은 Eqs. (20)과 (21)을 이용하여 쉽게 구할 수 있고, 연직방향 유속성분은 Eq. (22)를 이용하여 구할 수 있다.

최종적으로 새로운 자유수면변위는 식 (29)를 이용하여 구할 수 있다.

$$\eta_{ij}^{n+1} = \tilde{\eta}_{ij}^{n+1} + \frac{\tilde{q}_{ijM}^{n+1}}{g} \quad (29)$$

또한, 동수압은 식 (30)을 이용하여 최종적으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
q_{ijk}^{n+1} &= g(\eta_{ij}^{n+1} - \eta_{ij}^{n+1}) + q_{ijk}^{n+1} \\
&= \tilde{q}_{ijk}^{n+1} - \tilde{q}_{ijk}^{n+1}
\end{aligned} \quad (30)$$

4. 수치모형실험

본 연구에서는 개발된 동수압 모형을 이용하여 원형섬 주변에서 고립파의 전파와 처오름에 대해 수치모의를 실시하였다. 일반적으로 고립파는 지진해일의 특성을 가장 잘 나타내는 것으로 알려져 있다(Liu et al., 1995). Fig. 4과 같은 미국 육군 공병단 해안공학연구소(CERC, Coastal Engineering Research Center)의 수리모형실험을 수행한 결과에 대한 것이다. 수조는 직사각형 형태로 가로 폭이 30 m이고 측벽의 길이가 26 m이며, 수조의 중심인 $x=15$ m, $y=13$ m 지점에 원형섬이 위치하도록 하였다. Fig. 4의 30 m 변의 한 쪽에 60 개의 소형조파기로 구성된 길이 27.432 m의 조파기를 설치하여 파랑을 발생시켰다.

수리모형실험에서 발생시킨 입사파의 파고 H_0 는 0.016 m과 0.032 m이며, 수심 0.32에 대한 입사파의 진폭 비로 정의되는 비선형성 $\alpha(H_0/h)$ 의 값을 0.05와 0.1로 변화시키며 실험을 수행하였다.

본 연구에서는 Fig. 5에 도시된 측정지점에서 처오름 높이를 측정하여 수리실험 결과와의 비교를 실시하였다. 격자의 크기는 $\Delta x = \Delta y = 0.1$ m로 하였고 마찰은 고려하지 않았다. 실험에 대한 보다 상세한 내용은 Liu et al.(1995)을 참조할

Fig. 4. (a) Top view of the wave basin with the island; (b) the vertical view of the circular island on the cross-section A-A (Cho, 1995)

Fig. 5. Location of gage points for the maximum run-up heights measurements

수 있으며, 모든 실험 조건은 Liu et al.과 동일하게 설정하였다.

Fig. 6은 입사파의 파고가 $H_0=0.016$ m ($\epsilon=0.05$)와 0.032 m ($\epsilon=0.1$)인 경우에 대한 측정지점별 최대 처오름높이를 비교한 것이다. 두 경우 모두, 본 연구에서 개발한 수치모형을 이용한 수치모의 결과는 수리모형실험 결과와 비교하였을 때, 수심 적분된 2차원 방정식을 사용한 수치모형의 결과보다 더 나은 결과를 제공하는 것을 알 수 있다.

(a) $\epsilon (= H_0/h) = 0.05$

(b) $\epsilon (= H_0/h) = 0.1$

Fig. 6. Comparison of the maximum run-up heights

Table 1. RMS(Root Mean Square) error of maximum run-up heights

비선형조건	RMS 오차	
	Liu et. al., 1995	Present study
$\epsilon(H_0/h)=0.05$	0.118587	0.106744
$\epsilon(H_0/h)=0.1$	0.280164	0.166287

Table 1은 최대 처오름높이에 대한 실험값과 수치모의 결과와의 RMS오차 (root-mean-squares) 오차를 나타낸 것이다. Table 1에서도 알 수 있듯이 모든 gage points에서의 수치모의 결과와 실험값과의 RMS 오차를 비교하였을 때, 본 연구에서 개발한 수치모형의 오차가 수십 적분된 2차원 수치모형의 결과보다 더 작은 값을 나타내고 있음을 알 수 있다. 따라서, 정확도 높은 처오름해석을 위해서는 연직방향으로의 흐름해석이 중요하고 이를 위해서 동수압을 고려하여 해석하는 것이 필요함을 의미한다. 본 연구에서 제시한 수치모형을 이용할 경우, 최대 처오름높이의 해석에도 비교적 정확한 결과를 제공할 수 있을 것으로 판단된다.

5. 결 론

개발된 수치모형을 이용하여 원형섬 주위에서 고립파의 전파와 처오름에 대해 수치해석을 실시하였고, 수치모의 결과는

미국 육군 공병단 해안공학연구소(CERC)의 수리실험 결과 및 Liu et al.(1995)의 수치모의 결과와 비교를 실시하였다. 수치모의 결과를 비교하였을 때, 본 연구에서 개발한 수치모형의 경우 해안지역에서의 처오름 해석에 신뢰할 수 있는 결과를 제공하고 있는 것을 알 수 있다.

본 연구에서 제시한 수치모형은 폭풍해일이나 지진해일의 전파모형 등과 같은 파의 전파에 대한 해석이 가능한 수치모형과 연계를 통해 연안지역에서의 폭풍해일이나 지진해일에 따른 해안재난에 보다 정확한 범람정보의 제공이 가능할 것으로 판단되며, 이에 따른 폭풍해일 및 지진해일에 대한 재해정보 제작, EAP구축 그리고 대피시뮬레이션 등 방재전반에 걸쳐 효과적으로 활용할 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

본 논문은 2011년 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 중견연구자지원사업의 연구 결과입니다(과제번호 2011-0015386).

References

- Casulli, V. and Cattani, E. (1994). Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow. *Computers & Mathematic Applications*, Vol. 27, No. 4, pp. 99-112.
- Casulli, V. and Cheng, R.T. (1992) Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 629-648.
- Casulli, V. and Stelling, G.S. (1998) Numerical simulation of 3D quasi-hydrostatic, free surface flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 127, No. 7, pp. 678-686.
- Chen, X. (2003a) A free-surface correction method for simulating shallow water flows. *Journal of Computational Physics*, Vol. 189, No. 2, pp. 557-578.
- Chen, X. (2003b) A fully hydrodynamic model for three-dimensional, free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 42, No. 9, pp. 929-952.
- Kocyyigit, M.B., Falconer, R.A. and Lin, B. (2002) Three-dimensional numerical modelling of free surface flows with non-hydrostatic pressure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 40, No. 9, pp. 1145-1162.
- Lee, J.W. and Cho, Y.-S., (2001) Development of TVD Numerical Models: II. Shallow-Water Equations. *Journal of The Korea Water Resources Association*, Vol. 34, No. 2, pp. 187-195.
- Liu, P.L.-F, Cho, Y.-S, Briggs, M.J., Kanoglu, U. and Synolakis, C. E. (1995) Run-up of solitary waves on a circular island. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 302, pp. 259-285.

© 논문접수일 : 2012년 09월 27일

© 심사외의일 : 2012년 10월 11일

© 심사완료일 : 2013년 01월 11일