널말뚝 진동해석기법의 개선

Improvement of Technique for Analyzing Sheet Pile under Vibration

이승현* · 권오순** · 한진태***

Lee, Seunghyun · Kwon, Ohsoon · Han, Jintae

Abstract

Improvement of existing analysis technique for analyzing sheet pile under vibration and analyses results were compared with existing field test results. Vertical displacement of the pile obtained from the improved technique showed that penetration rate decrease with increasing of penetration depth and displacement amplitudes were greater than the displacement for condition of idling of vibrator. It can be seen that load transfer curves obtained from the improved technique reflect the trends of variation of vertical displacement of pile with penetration depth and the maximum value of load transfer reasonably reflect the N value of the test ground. Comparing the penetration rates of the pile, penetration rates predicted by the improved technique were closer to the measured ones than those predicted by the existing technique.

Key words : Existing technique, Improved technique, Vertical displacement, Load transfer curve, Penetration rate

요 지

진동해머에 의해 시공되는 말뚝의 해석을 위해 개발된 기존의 해석기법을 보완하고 보완된 해석기법에 의한 해석결과를 분석해 보았으며 기존의 현장시험결과와 해석결과에 의한 관입속도를 비교해 보았다. 보완된 해석기법을 적용하여 구한 관입깊이별 시간에 따른 말뚝의 연직변위양상은 관입깊이가 클수록 관입속도가 감소하는 양상을 나타내었으며 변위진폭은 진동해머의 공운 전시의 진폭보다는 크게 나타났다. 보완된 해석기법을 적용하여 구한 하중전이곡선을 살펴볼 때 관입깊이별 말뚝의 연직변위양상을 반영한 결과를 보였으며 하중전이 최대값은 지반의 N값을 반영함을 알 수 있었다. 관입깊이별 관입속도를 보완된 해석기법을 이용하여 구해보고 그 결과를 기존의 해석결과와 비교해 보았는데 보완된 해석기법에 의한 결과가 기존의 해석결과보다는 실측값에 보다 잘 부합하였다.

핵심용어 : 기존 해석기법, 보완된 해석기법, 연직변위, 하중전이곡선, 관입속도

1. 서 론

1930년대 이후로 진동해머는 기존의 충격식 타입해머를 대신하여 널리 쓰이게 되었다. 진동해머의 장점으로는 사질토지반에 대하여 관입성이 좋고 저소음이며 말뚝두부에 손상을 덜 입히는 점을 들 수 있다. 진동해머로 널말뚝을 설치하는 경우 가장 큰 관심사는 관입속도라 할 수 있다. Barkan (1957)은 진동해머에 의해 시공되는 말뚝의 관입성에 영향을 미치는 다양한 인자에 대해 연구한 바 있는데 진동가속도, 말뚝의 변위진폭, 진동수, 진동기의 질량, 말뚝단면적, 흡입자의 지름 그리고 흙의 내부마찰각 등이 그것들이다. 비록 몇몇 연구자들(Jonker, 1987; Warrington, 1989; Holeyman,

1993)에 의해 진동해머에 의해 시공되는 말뚝에 대한 거동특성을 규명하기 위한 연구가 있어 왔으나 실험현장재하시험결과가 발표된 경우는 거의 없다고 할 수 있다. 본 연구에 앞서 진동해머에 의해 시공되는 말뚝에 대한 실험 현장시험을 수행하고 해석기법 개발에 필요한 다양한 인자들을 구한 다음 이들 인자들과의 관련인자로서 현장지반의 표준관입시험 N값을 고려한 해석기법을 개발한 바 있다(Lee *et al.*, 2012). 본 연구에서는 기존의 해석기법을 보완하여 수정된 해석기법을 제안하고 기존 연구에서 얻은 시험결과와 해석결과를 본 연구를 통해 얻은 해석결과와 상호비교하여 수정된 해석기법의 신뢰성을 확인하고자 하였다.

*정회원. 선문대학교 토목공학과 교수(E-mail: shlee02@sunmoon.ac.kr)
Member. Professor, Department of Civil Engineering, Sunmoon University

**한국해양과학기술원 연안개발에너지연구부 책임연구원
Principal Researcher, Korea Institute of Ocean Science and Technology

***교신저자. 정회원. 한국건설기술연구원 Geo-인프라연구실 수석연구원(Tel: +82-31-910-0259, Fax: +82-31-910-0561, E-mail: jimmyhan@kict.re.kr)
Corresponding Author. Member. Senior Researcher, Korea Institute of Construction Technology

2. 기존 현장시험결과

기존 현장시험 내용 및 그 결과를 요약하여 나타내면 다음과 같으며 자세한 사항은 관련 문헌을 참조할 수 있다(Lee *et al.*, 2012). 기존 현장시험에 사용된 진동해머는 SVS-80이며 현장지반은 통일분류법에 의해 실트질 모래(SM)로 분류되었다. 현장시험에 사용한 널말뚝은 U타입(SPIIIA(D))으로서 길이가 12 m이다. 널말뚝의 폭, 높이 그리고 두께는 각각 400 mm, 150 mm 그리고 13 mm이다. 말뚝 단면적, 단면 둘레길이 그리고 단위중량은 각각 76.4 cm², 119.2 cm 그리고 60 kg/m이다. 계측시험에 적용한 말뚝에는 10개의 스트레인 게이지와 2개의 가속도계 그리고 깊이 측정장치(depth-measuring drum)를 부착하였다. 계측기의 설치위치는 Fig. 1에 나타나 있는데 DD, ACC, 그리고 SG는 각각 깊이 측정장치, 가속도계 그리고 스트레인게이지를 의미한다.

Fig. 1에 나타난 계측기들 중에서 깊이 측정장치는 시간에 따른 관입깊이 및 관입속도를 얻기 위한 것이고 스트레인게이지는 말뚝 선단 및 두부에서 단면력을 측정하여 하중전이 곡선을 얻기 위함이다. 또한 말뚝 두부와 선단에 설치한 가속도계는 말뚝이 강체로 거동함을 확인하기 위한 것이다. 시간에 따른 말뚝변위는 가속도를 적분하여 구할 수 있다(Viking, 2002). 진동해머에 의해 시공되는 말뚝의 해석을 위해 말뚝을 강체로 고려하고자 하는 경우 무엇보다 실험을 통해 말뚝이 강체로 거동함을 입증할 필요가 있다. Fig. 2에는 관입깊이에 따른 말뚝의 침두가속도(Fig. 2(a))와 관입깊이 3 m에서의 시간에 따른 가속도 변화양상(Fig. 2(b))이 나타나 있다.

Fig. 2에서 실선은 말뚝두부에 설치한 가속도계에 대응하는 값을 나타내고 점선은 말뚝선단부에 설치한 가속도계에 대응하는 값을 나타낸다. Fig. 2(a)에 나타난 가속도값을 비교해 볼 때 가속도값의 최대치는 1.4 g이고 Fig. 2(b)로부터 말뚝 두부와 선단부에 설치한 가속도값의 차이가 거의 없음을 알 수 있다. 말뚝두부와 선단부에서 측정된 가속도값의 미소한 차이는 말뚝을 강체로 고려할 수 있는 근거를 뒷받침하는 결

Fig. 1. Positions of the Instruments

(a) Acceleration with depth

(b) Acceleration with time (depth=3m)

Fig. 2. Comparison of Acceleration

과로 볼 수 있다. Viking and Bodare(1998)는 식 $T/4 \geq 2t_n$ 을 말뚝을 강체로 고려할 수 있는 기준으로 제시한 바 있으며 T 는 진동주기를 의미하고 t_n 은 응력파의 왕복 소요시간을 의미하는데 이 판별식에 의해서도 말뚝을 강체로 고려할 수 있음을 알 수 있다.

3. 해석기법의 보완

진동해머는 크게 사하중(static load)과 기진기(exciter)로 구성되어 있다. 연직진동력은 기진기를 구성하는 한 쌍의 질량체의 회전에 의해 만들어지게 된다. Fig. 3은 진동해머-말뚝-지반으로 구성되어 있는 진동시스템을 보여준다. Fig. 3에 나타난 말뚝 진동모델과 관련하여 말뚝은 강체로 가정하는데 진동시스템에 대한 지배방정식은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$m_{v+p}\ddot{z} = me\omega^2 \sin\omega t - C_s\dot{z}(d+z) - C_t\dot{z} - kz - R_s - R_t + W + m_{v+p}g - R_c \quad (1)$$

식 (1)에서 m_{v+p} 는 기진기와 말뚝질량의 합을 의미한다. z , $\dot{z}$ 그리고 $\ddot{z}$ 는 각각 기진기와 말뚝의 연직변위, 속도 그리고 가속도를 의미한다. me 와 ω 는 각각 편심질량의 편심모멘트와 회전각속도를 의미한다. d , k 그리고 g 는 각각 말뚝의 근입

Fig. 3. Vibration System

깊이, 스프링상수 그리고 중력가속도를 의미한다. R_s 와 R_t 는 각각 스프링으로 모사한 동적 주면마찰력과 선단저항력을 의미한다. 식 (1)에서 C_s 는 말뚝 단위길이당 감쇠계수(Lee *et al.*, 1988; Randolph and Simon, 1986)를 의미하며 C_t 는 말뚝선단에서의 감쇠계수(Lysmer and Richart 1966)를 의미한다. 식 (1)의 W 는 사하중을 의미하고 마지막 항인 R_c 는 클러치저항력(clutch friction 또는 interlock friction)을 의미하는데 인접해 있는 널말뚝에 연결하여 시공되는 경우 연결부에 발생하는 저항력을 의미한다. 식 (1)에서의 동적 지반저항력 R_s 와 R_t 는 동적 단위주면마찰력(f)과 동적 단위선단저항력(q)에 주면면적과 선단면적을 각각 곱함으로써 얻을 수 있다. 식 (1)로 표현되는 미분방정식은 기존의 연구에서 고려한 미분방정식과는 다른데 근본적인 차이는 크게 두 가지로 볼 수 있다. 첫째, 기존의 연구결과에서는 기진기에 의한 진동력이 말뚝머리에 전달되는 것으로 보아 말뚝에 대해서만 미분방정식을 유도하였다. 이 경우 말뚝이 정지되어 있는 것으로 가정하고 진동력이 말뚝머리로 전달되는 것으로 간주하므로 실제와는 차이가 있게 되고 말뚝머리에 전달되는 힘을 평가하기도 어렵게 된다. 이러한 문제점을 해소하기 위해 본 연구에서는 기진기와 말뚝을 일체로 고려하여 일체화된 질량체에 대해 식 (1)과 같이 미분방정식을 세웠다. 둘째, 기존의 연구에서는 Fig. 3에 나타난 말뚝주면과 선단에서의 동적 저항력을 모사함에 있어 스프링으로만 모사하였는데 본 연구에서는 말뚝주면과 선단에 대하여 감쇠에 의한 저항을 모사하여 좀 더 실제와 가깝게 모델링이 되도록 하였다. 진동해머에 의해 시공되는 말뚝에 대한 하중전이곡선의 기본적인 형태는 Fig. 4와 같다(Wong *et al.*, 1992).

Fig. 4에서 변위 z_p 는 현재의 변위(Present displacement)를 나타내고 z_c 는 이전 계산단계에서 변위의 방향이 바뀔 때의 변위(Displacement at the last reversal)를 나타낸다. z_t 는 제

Fig. 4. Schematic Load Transfer Curves

하에서 재하로 바뀔 때의 저항력에 대응하는 변위를 나타낸다. Fig. 4를 참조하여 제안된 동적단위주면마찰력의 재하 및 제하시의 식은 Ramberg-Osgood 모델을 수정하여 각각 식 (2) 및 식 (3)과 같이 나타내었다(Wong *et al.*, 1992).

$$f_{RL} = \left[\frac{E_f z}{\left(1 + \left| \frac{E_f z^{n_f}}{f_0} \right| \right)^{1/n_f}} + E_{pf} z \right] F_f - f_n \quad (2)$$

$$f_{UL} = f_c - \frac{E_f(z_c - z_p)}{\left(1 + \left| \frac{E_f(z_c - z_p)^{n_f}}{f_0} \right| \right)^{1/n_f}} F_f + E_{pf}(z_c - z_p) F_f \quad (3)$$

수정 Ramberg-Osgood 모델을 이용하여 동적 단위선단저항력을 재하 및 제하로 나누어 나타내면 식 (4) 및 식 (5)와 같다.

$$q_{RL} = \left[\frac{E_q z}{\left(1 + \left| \frac{E_q z^{n_q}}{q_0} \right| \right)^{1/n_q}} \right] F_q (1 - e^{-Kz}) \quad (4)$$

$$q_{UL} = q_c - \left[\frac{E_q(z_c - z_p)}{\left(1 + \left| \frac{E_q(z_c - z_p)^{n_q}}{q_0} \right| \right)^{1/n_q}} \right] \times F_q [1 - e^{-K(z_c - z_p)}] \quad (5)$$

식 (2)~(5)에서 E_f 와 E_q 는 각각 f - z 곡선과 q - z 곡선에서 초기부분의 경사와 소성영역에서의 경사의 차이를 의미한다. f_0 와 q_0 는 참조값(Reference value)이고 n_f 와 n_q 는 형상계수(Shape factor)이다. 그리고 E_{pf} 는 f - z 곡선에서 소성부분의 경사를 의미한다. F_f 와 F_q 는 조정계수(Fitting factor)를 의미하고 f_n 는 최대 부(-)의 단위주면마찰력(Maximum negative skin friction)을 의미한다. f_c 와 q_c 는 Fig. 4(b)에서 z_c 에 대응하는 저항력을 의미한다. K 는 q - z 곡선의 진폭(Amplitude)을 조절하는 상수이다. 기존의 연구(Lee *et al.*, 2012)에서는 식 (2)~(5)를 구성하는 다양한 인자들을 현장시험을 통해 구하고 시험지반의 N값과의 상관관계를 구하여 해석에 적용하였다. 하중전이곡선으로부터 제하에서 재하로 바뀌는 단계에서의 저항력을 구하기 위한 변위는 Fig. 4(a)에 나타나 있는 바와

같이 $z = z_p - z_c + z_s$ 로 계산하여야 하는데 먼저 최소저항력에 대응하는 변위, z 를 적절한 방법을 이용하여 계산해야 한다. 변위 z 를 결정하기 위한 방법으로 Newton-Raphson 방법을 적용하여 비교적 빠르게 수렴하는 해를 구할 수 있다.

식 (1)은 식 (6) 및 식 (7)과 같은 두 개의 미분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{dz}{dt} = v(t, z) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m_{v+p}} (m e \omega^2 \sin \omega t - C_s v(t, d+z) \\ &\quad - C_t v(t, z) - k z - R_s - R_t + W + m_{v+p} g - R_c) \\ &= a(t, z, v) \end{aligned} \quad (7)$$

식 (6) 및 식 (7)의 해는 Runge-Kutta 방법(Kreyszig, 1984)을 이용하여 구하였는데 다음의 계산들이 필요하다.

$$\begin{aligned} A_z &= h v_i \\ A_v &= h a(t_i, z_i, v_i) \\ B_z &= h v_i + \frac{h}{2} A_v \\ B_v &= h a\left(t_i + \frac{h}{2}, z_i + \frac{A_z}{2}, v_i + \frac{A_v}{2}\right) \\ C_z &= h v_i + \frac{h}{2} B_v \\ C_v &= h a\left(t_i + \frac{h}{2}, z_i + \frac{B_z}{2}, v_i + \frac{B_v}{2}\right) \\ D_z &= h v_i + h C_v \\ D_v &= h a(t_i + h, z_i + C_z, v_i + C_v) \end{aligned}$$

여기서 h 는 시간증분을 나타내고 n 는 계산단계를 의미한다. 식 (6), (7)의 해는 식 (8), (9)와 같이 구할 수 있다.

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6} (A_z + 2B_z + 2C_z + D_z) \quad (8)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6} (A_v + 2B_v + 2C_v + D_v) \quad (9)$$

이상의 내용을 바탕으로 해를 구하는 과정을 흐름도로 나타내면 Fig. 5와 같다.

4. 해석결과와 비교분석

Fig. 5에 나타난 계산순서를 고려하여 진동해머에 의해 시공되는 말뚝의 해석기법을 개발하고 기존의 현장시험을 통해 구한 관입속도와 해석결과를 비교하고자 하였다. 기존의 현장 시험에서는 관입속도 측정을 위해 깊이 측정장치를 사용하였다. 관입속도를 측정할 지반은 지표면으로부터 7.9 m 깊이까지는 실트질 모래(SM)로 되어 있으며 그 아래로 저소성의 점토(CL)로 구성되어 있는데 지하수위는 거의 지표면에 걸쳐 있다.

표준관입시험결과는 Fig. 6과 같은데 기존의 현장시험 이전의 시험자료로서 관입속도 측정시험위치에서의 자료가 아니

Fig. 5. Flow Chart

트, 진동수, 진폭 그리고 모터출력은 각각 2500 kg·cm, 19.0, 7.7 mm 그리고 45 kW이다. 또한, 진동기 전체중량, 진동중량 그리고 스프링상수는 각각 37.5 kN, 32.5 kN 그리고 980 kN/m이다.

4.1 관입거동분석

현장시험조건을 고려한 해석을 통해 시간에 따른 말뚝의 연직변위와 동적 하중전이곡선을 살펴보았다. Fig. 7은 시간에 따른 말뚝의 연직변위를 관입깊이별로 나타낸 것이다.

Fig. 7을 통해 알 수 있듯이 말뚝의 연직변위는 시간에 따라 주기적 곡선의 형태로 나타나는데 관입깊이가 증가할수록 시간에 따른 연직변위곡선의 기울기가 완만해져 관입속도가 감소함을 알 수 있다. 또한, 관입깊이가 증가할수록 변위진폭

Fig. 7. Vertical Displacement with Time

이 감소함을 알 수 있는데 관입깊이 1.5 m, 3 m, 4.5 m 그리고 6 m에 대하여 변위진폭은 각각 0.0113 m, 0.0108 m, 0.0096 m 그리고 0.0081 m로 감소한다. 관입깊이가 증가할수록 관입속도가 감소하는 이유는 그만큼 지반의 저항력이 크기 때문이라 볼 수 있다. Fig. 7에 나타난 변위진폭이 진동해머의 공운전시의 변위진폭인 0.0077 m보다 큰 이유는 기진기와 말뚝이 같이 진동하는 동시에 연직하향으로 관입되기 때문이다. 해석을 통해 구한 동적 단위주면마찰에 대한 하중전이곡선을 나타내면 Fig. 8과 같다.

Fig. 8을 통해 알 수 있듯이 관입깊이가 증가할수록 주기 운동에 따른 하중전이곡선의 간격이 점점 좁아짐을 알 수 있는데 이는 Fig. 7에 나타난 연직변위거동 특성을 반영한 결과이다. 최대 단위주면마찰력은 관입깊이 1.5 m, 3.0 m 그리고 4.5 m일 때는 큰 차이를 보이지 않다가 관입깊이 6.0 m일 때 약 5 증가했음을 알 수 있다. 해석을 통해 구한 동적 단위선단저항력에 대한 하중전이곡선을 나타내면 Fig. 9와 같다.

Fig. 9를 통해 알 수 있듯이 선단 하중전이곡선에 있어서도 관입깊이별 연직변위 거동양상을 반영하고 있음을 알 수 있다. 단위 선단저항력의 최대값은 관입깊이 1.5 m와 3.0 m일 때 같으며 관입깊이 4.5 m와 6.0 m일 때는 점차 작아짐을 알 수 있는데 이는 단위선단저항력이 말뚝선단위치에서의 N 값을 반영하기 때문이라 할 수 있다(Fig. 6 참조).

4.2 관입속도 비교

현장시험을 통해 관입깊이에 대한 관입속도는 깊이 측정장치로 얻은 시간-관입깊이 자료를 이용하여 구할 수 있다.

Fig. 8. Load Transfer Curves for Skin

Fig. 9. Load Transfer Curves for Toe

Fig. 10에는 현장시험을 통해 얻은 관입속도와 해석을 통해 구한 관입속도 그리고 상용 프로그램인 GRL-WEAP(2005)에 의해 예측된 관입속도가 나타나 있다.

Fig. 10의 표식중에서 속이 비어있는 사각형 표식은 기존의 해석결과를 나타낸다. Fig. 10에서 현장시험을 통해 구한 관입속도는 관입깊이 6~8m일 때를 제외하고는 전체적으로 관

입깊이에 상관없이 약 30 mm/sec로 일정함을 알 수 있다. Rao(1993)는 관입 한계상태에 해당하는 관입속도를 22 mm/sec로 보고 있고 유럽 널말뚝 협회(European Sheet Piling Association)는 8 mm/sec로 보고 있다. Fig. 10을 통해 알 수 있듯이 관입 초기단계에서 예측된 관입속도는 시험결과에 의한 관입속도보다 큼을 알 수 있다. 기존의 해석결과와 본 해석결과를 비교해 볼 때 본 해석결과가 측정값에 가까운 결과를 나타냄을 알 수 있다. 그러나 해석결과가 기존에 수행된 하나의 현장시험결과에 바탕으로 하고 있으므로 향후 보다 많은 현장시험결과를 활용한다면 좀 더 신뢰성 있는 해석이 가능하리라 기대된다. 상용 프로그램인 GRL-WEAP에 의해 예측된 관입속도는 특히 얇은 관입깊이에 대하여 관입속도를 과대평가함을 알 수 있다.

5. 결 론

진동해머에 의해 시공되는 말뚝의 해석을 위해 개발된 기존의 해석기법을 보완하였으며 기존의 현장시험결과와 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 연구를 통해 기존 해석기법을 크게 두 가지 측면에서 보완하였는데 첫째, 진동해머에 의해 시공되는 말뚝에 대한 지배방정식 구성에 있어 실제와 부합되도록 기진기와 말뚝을 일체화시켜 고려하였으며 둘째, 말뚝에 대한 동적 지반저항력을 고려함에 있어 감쇠효과를 추가하였다.

Fig. 10. Comparison of Penetration Rate

- 2) 보완된 해석기법을 적용하여 구한 관입깊이별 시간에 따른 말뚝의 연직변위양상은 관입깊이가 클수록 관입속도가 감소하는 양상을 나타내었으며 변위진폭은 진동해머의 공운전시의 진폭보다는 크게 나타났는데 이는 말뚝의 진동과 동시에 연직하향의 관입이 일어난 결과로 볼 수 있다.
- 3) 보완된 해석기법을 적용하여 구한 하중전이곡선을 살펴볼 때 관입깊이별 말뚝의 연직변위양상을 반영한 결과를 보였으며 하중전이 최대값은 지반의 N값을 반영함을 알 수 있었다.
- 4) 관입깊이별 관입속도를 보완된 해석기법을 이용하여 구해보고 그 결과를 기존의 해석결과와 비교해 보았는데 보완된 해석기법에 의한 결과가 기존의 해석결과보다는 실측값에 보다 잘 부합하였다.
- 5) 본 연구를 통해 개발된 해석기법은 여전히 기존의 현장 시험결과를 바탕으로 하고 있어 향후 다양한 지반조건에 대한 현장시험결과가 축적된다면 해석기법의 신뢰성을 향상시킬 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

“본 연구는 (주)대동이엔지에서 발주한 “진폭 가변형 바이브로해머를 이용한 고효율·저진동 쉬트파일 설치 공법 개발” 사업으로 이루어진 것으로, 이에 깊이 감사드립니다.”

References

Barkan, D.D. (1957) Foundation engineering and drilling by vibration method, *Proc. of Fourth Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Engrg.*, 3-7.

GRLWEAP (2005) Procedures and Models Version 2005, *Pile Dynamics, Inc.*, 23.

Holeyman, A. (1993) HYPERVIB1, An analytical model-based computer program to evaluate the penetration speed of vibratory driven sheet piles, *Research report prepared for BBRI*, June-93, 23.

Jonker, G. (1987) Vibratory Pile Driving Hammers for Oil Installation and Soil Improvement Projects, *Proc. of Nineteenth Annual Offshore Technology Conf.*, Dallas, Texas, OTC 5422, 549-560.

Kreyszig, E. (1984) Advanced Engineering Mathematics, *John Wiley & Son, Inc.*, 830-838.

Lee, S.H., Kim B.I., and Han, J.T. (2012) Prediction of penetration rate of sheet pile installed in sand by vibratory pile driver, *KSCE Journal of Civil Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 316-324.

Lee, S.L., Chow, Y.K., Karunaratne, G.P., and Wong, K.Y. (1988) Rational wave equation model for pile-driving analysis, *J. Geotech. Eng.*, ASCE, Vol. 114, No. 3, pp. 306-325.

Lysmer J. and Richart, F.E. (1966) Dynamic response of footing to vertical loading, *J. Soil Mech. Found. Eng.*, ASCE, Vol. 92, pp. 65-91.

Randolph M.F. and Simon H.A. (1986) An improved soil model for one-dimensional pile driving analysis, *Proc. Numer. Meth. Offshore Piling, 3rd Int. Conf.*, Nantes, France, May 21, Vol. 22, pp. 3-17.

Rao, P.M. (1993) Effect of pile geometry and soil saturation in the behavior of nondisplacement piles installed by vibration, MSc thesis presented to the Faculty of the *Dept. of Civil and Environmental Engineering*, University of Houston, Texas.

Viking, K. (2002) Vibro-Driveability, -A Field Study of Vibratory Driven Sheet Piles in Non-Cohesive Soils, Ph.D thesis 1002, *Div. of Soil and Rock Mechanics, Royal Institute of Technology*, Stockholm, Sweden, pp. 184-186.

Viking, K. and Bodare, A. (1998) Laboratory studies of dynamic shaft resistance response of a vibro-driven model pile in granular soil by varying the relative density, *Proc. of XII European Conference on Soil and Foundation Engineering*, 6.

Warrington, D.C. (1989) Driveability of piles by vibration, Paper presented at *Deep Foundation Institute 14th Annual Member Conf.*, pp. 139-154.

Wong, D., O'Neill, M. W. and Vipulanandan, C. (1992) Modelling of Vibratory Pile Driving in Sand, *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, Vol. 16, No. 4, pp. 189-210.

© Received November 25, 2013

© Revised November 27, 2013

© Accepted December 4, 2013