확장 해밀턴 이론에 근거한 선형 탄성 시스템의 이차의 시간 유한 요소해석법

Second Order Temporal Finite Element Methods in Linear Elasticity through the Extended Framework of Hamilton's Principle

김진규*

Kim, Jinkyu*

Abstract

The extended framework of Hamilton's principle provides new rigorous weak variational formalism for a broad range of initial boundary value problems in mathematical physics and mechanics. In this paper, its potential in the development of numerical methods for transient problems in various dynamical systems, when adopting temporally second order approximation is investigated. For this, linear elastic single-degree-of-freedom systems are primarily considered to investigate computational characteristics of the developed numerical algorithms. For the undamped system, all the algorithms are symplectic and unconditionally stable with respect to the time step. For the damped system, they are shown to be accurate with good convergence characteristics.

Key words : Extended framework of Hamilton's principle, Temporal finite element methods, Linear elasticity, Higher-order methods

요 지

새로이 제안된 확장 해밀턴 이론은 초기/경계치 문제 해석에 광범위하게 적용될 수 있는 변분이론으로, 이 논문은 이를 토대로 시간에 대해 이차의 형태함수를 적용한 시간 유한요소해석법을 개발하고 그 해석법의 수치특성 확인을 통해 향후 다양한 동적 시스템 해석의 적용에 대한 가능성을 살펴보았다. 이를 위해, 가장 기본적인 선형 탄성의 단자유도계가 고려되었다. 비감쇠 단자유도계의 경우, 제안된 알고리즘 모두는 시간간격에 관계없이 안정적이며 수치감쇠가 없고, 감쇠 단자유도계의 경우는 정확하고 빠른 수렴의 특성이 있음이 확인되었다.

핵심용어 : 확장 해밀턴 이론, 시간 유한요소해석법, 선형 탄성, 수치해석법

1. 서 론

해밀턴 이론(Hamilton, 1834; 1835)은 그 근원이 천체의 움직임을 다룬 입자 동역학(*particle dynamics*)이 그 시발점이지만, 여러 분야에 적용되는 확장성이 매우 큰 동역학의 변분이론이다. 해밀턴 이론이 적용된 예로는 Bretherton (1970)을 비롯한 Gossick (1967), Landau (1975), Slawinski (2003) 및 Tiersten (1967)에서 보듯 유체, 전자기학, 파동, 네트워크 등의 여러분야에 활용되고 있다. 하지만, 해밀턴 이론은 두 가지의 큰 단점이 있다. 첫째, 해밀턴 이론은 *end-point constraints*의 제약이 있다. 이는 시간 간격의 처음과 마지막에 대한 변분은 존재하지 않는다는 것으로 입자의(*particle*) 위치가 시간

간격의 처음과 마지막에 알려져 있다고 가정한 것이다. 대부분의 동적 해석이 주어진 초기조건과 하중조건에 대해 동적 시스템이 어떻게 반응하는 지를 살피는 것에 비춰 이 가정은 매우 부적절함을 알 수 있다.

또한, 해밀턴 이론은 수학적으로 모델링되는 에너지 비보존 시스템에 직접 적용될 수 없다. Rayleigh (1877)의 Rayleigh's dissipation과 함께 해밀턴 이론은 에너지 비보존 시스템을 고려할 수는 있고, 그 예 또한 Biot and Edwards (1955), Marsden and Ratiu (1994), Sivaselvan and Reinhorn (2006), Sivaselvan *et al.* (2009), Lavan (2010), Apostolakis and Dargush (2012)) 등에서 보듯, 열탄성학, 구조체, 기계시스템 등에 다양하지만, 이 방법은 다소 즉흥적인 면이 있고 수학적

*교신저자. 정회원. 고려대학교 건축사회환경공학부 연구교수(Tel: +82-2-3290-3833, Fax: +82-2-921-2439, E-mail: jk295@korea.ac.kr)
Corresponding Author: Member, Research Professor, School of Civil, Environmental and Architectural Engineering, Korea University

으로 완전한 것은 아니다.

근래 Kim *et al.* (2013)에 의해 제안된 확장 해밀턴 이론은 해밀턴 이론의 가장 큰 문제점인 적절한 초기치 사용문제를 혼합변수의 사용과(mixed formulation) 초기치의 순차적 적용을 통해 해결한 것으로 다양한 시공간 유한요소 해석법(space-time finite elements) 개발의 근거를 제공한다. 곧, 현재 동적 시스템 해석은 먼저 공간에 대해 변위기반의 유한요소 모델링을 적용하고 이후 시간에 대해서는 Newmark's methods, finite differences 등을 포함한 다양한 time-integration methods를 적용해 해석을 수행하는 데 반해, 이 이론은 시공간에 대한 유한요소해석법을 직접 적용시킬 수 있는 동적 해석에 새로운 관점을 제시한다. 또한, 확장 해밀턴 이론은 혼합변수를 사용함으로써 비압축성(incompressibility)의 동적 시스템 해석에 직접 적용될 수 있는 장점을 갖고 있다(현행의 비압축성 동적 시스템의 해석에는 변위기반의 해석이 아닌 혼합변수기반으로(mixed formulation) 해석이 이루어짐). 유념할 점은 확장 해밀턴 이론도 완전한 동역학의 변분이론은 아니라는 것으로, 에너지 비보존 시스템에 적용시 Rayleigh's dissipation이 필요하며 새로이 정의된 범함수의 변분을(action variation) 범함수 action으로부터 직접 얻을 수 없는 단점이 있다.

본 논문은 이 확장 해밀턴 이론을 토대로 시간에 대한 이차항의 형태함수를 적용한 해석법을 개발, 그 잠재력을 확인하고, 향후, Oh and Kim (2013)과 Kim and Kim (2013)과 같이 실제적인 구조물 및 연속체의 해석을 목적으로 이를 위해 가장 간단한 선형 탄성 단자 유도계에 대해 세 가지의 새로운 해석법을 개발하고 각 수치해석법의 특성을 확인하였다.

2. 확장 해밀턴 이론의 적용

Fig. 1의 선형 탄성 단자 유도계의 운동 방정식은 아래와 같고,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \quad (1)$$

초기조건은 다음과 같다.

$$u(0) = u_0 \quad (2a)$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (2b)$$

Fig. 1. Kelvin-Voigt Damped Oscillator.

Fig. 1에서 $m, c, k, u, \hat{f}$ 는 각각 질량, 감쇠 상수(damping coefficient), 스프링 상수(stiffness), 질량의 변위, 외력을 의미한다. 또한, a 는 스프링 상수의 역수로, 스프링의 연성(flexibility)을 나타낸다.

확장 해밀턴 이론은 이 시스템의 동적거동을 혼합변수인 질량의 변위 u 와 스프링 힘의 총격량 J 를 통해 두 가지 범함수 action A 와 Rayleigh's dissipation ϕ 로 정의한다.

$$A = \int_0^T L(u, \dot{u}, J) dt \quad (3)$$

$$\phi = \frac{1}{2} c (\dot{u})^2 \quad (4)$$

Eq. (3)에서, Lagrangian L 은 다음을 나타낸다.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} a J^2 - J u + \hat{f} u \quad (5)$$

확장 해밀턴 이론은 이 두 범함수의 변분(first variation)의 합에 대한 정상성(stationarity)을 다음의 식으로 새롭게 정의하며

$$\delta I = -\delta \int_0^T L d\tau + \int_0^T \frac{\partial \phi}{\partial \dot{u}} \delta u d\tau + \hat{p} \delta u|_0^T = 0 \quad (6)$$

Eq. (6)을 통해 운동방정식과 초기조건 모두를 이끌어낸다. Eq. (6)의 추가된 항 $\hat{p} \delta u|_0^T$ 에서 $\hat{p}$ 는 선형 모멘텀($\hat{p} = m\dot{u}$)을 나타내며, 이 추가된 항은 Fig. 1의 시스템이 정해지지 않은 하나의 초기값인 $(u(0), \hat{p}(0))$ 과 정해지지 않은 하나의 마지막 값인 $(u(T), \hat{p}(T))$ 을 갖는 유일한 동적거동을 하계끔 제한하는 역할을 한다. 여기에, 정해지지 않은 초기값 $(u(0), \hat{p}(0))$ 이 주어진 초기값인 $(u_0, \dot{u}_0)$ 으로 다음과 같이 순차적으로 부가된다고 고려함으로

$$\hat{p}(0) = m\dot{u}_0 \quad (7)$$

$$u(0) = u_0; \text{ 혹은 } \delta_u(0) = 0 \quad (8)$$

확장 해밀턴 이론은 초기값을 적절히 산정한다. 마지막으로 부가되는 초기조건인 $\delta_u(0) = 0$ 은 Eq. (6)에 명백히 나타날 필요가 없고 암묵적으로 사용되는 점에 유의할 필요가 있다.

Eq. (6)이 Eq. (1)을 제대로 이끌어 내는 지 확인하기 위해, Eq. (5)를 Eq. (6)에 대입하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_0^T \{ -m\dot{u}\delta\dot{u} + c\dot{u}\delta\dot{u} + J\delta u - \hat{f}\delta u \} d\tau \\ & - \int_0^T \{ aJ\delta J - u\delta J \} d\tau + \hat{p}\delta u|_0^T = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

시간에 대한 부분적분(integration by parts)을 Eq. (9)의 첫째줄의 첫항과 둘째줄의 첫 두항에 적용하면 다음과 같이 표

현된다.

$$\begin{aligned} \delta I = \int_0^T \{m\ddot{u} + c\dot{u} + J - \hat{f}\} \delta u d\tau \\ + \int_0^T \{a\ddot{J} - \dot{u}\} \delta J d\tau + (\hat{p} - m\dot{u}) \delta \hat{u} \Big|_0^T = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Eq. (10)에서 시간간격 $(0, T)$ 내의 임의의 변분값 δu 및 δJ 를 고려하면, 다음의 두 식이 성립하는 데,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + J - \hat{f} = 0 \quad (11a)$$

$$a\ddot{J} - \dot{u} = 0 \quad (11b)$$

Eq. (11)에서 스프링 내의 힘 J 이 다음의 식으로 표현됨을 고려하면,

$$\dot{J} = \frac{1}{a} \dot{u} = ku \quad (12)$$

Eq. (11a)는 Eq. (1)과 같고, Eq. (11b)는 재료의 구성식 (rate-constitutive relation)을 나타냄을 알 수 있다.

3. 이차형태함수가 적용된 수치해석법 전개

Eq. (9)는 다양한 시간에 대한 유한요소 해석법 개발의 근거를 제공한다. 곧, Eq. (9)의 변분항을 가상 필드(virtual field)로 변분항이 아닌 항을 실제 필드(real field)로 간주하면, Eq. (9)는 가상일의 원리가 혼합변수를 통해 동적 시스템의 거동에 적용될 수 있음을 알 수 있다.

Eq. (9)를 근거로 개발될 수 있는 시간에 대한 고차 형태함수가 적용된 여러 가지 수치해석법 중에서 정확성과 계산비용을 고려, 아래의 세 가지 이차 형태함수가 적용된 해석법이 개발되었다.

각각의 시간 간격 (t_{r-1}, t_r) 에 대해, 하나의 고정된 시간 간격 h 를 고려하면($t_r = rh$), Eq. (9)는 아래와 같이 표현된다.

$$\delta I = \sum_{r=1}^N \delta I_r = 0 \quad (13)$$

곧, Eq. (13)에서, δI_r 은 시간 간격 (t_{r-1}, t_r) 에 대한 다음 식을 의미한다.

$$\begin{aligned} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \{-m\dot{u}\delta\dot{u} + c\dot{u}\delta u + J\delta u - \hat{f}\delta u\} d\tau \\ - \int_{t_{r-1}}^{t_r} \{a\dot{J}\delta\dot{J} - u\delta\dot{J}\} d\tau + \hat{p}\delta u \Big|_{t_{r-1}}^{t_r} \end{aligned} \quad (14)$$

하나의 시간 간격내의 시간 $\tau(t_{r-1} < \tau < t_r)$ 에서 선형의 형태함수 L_{r-1} 과 L_r 은 다음과 같이 주어진다.

$$L_{r-1}(\tau) = \frac{1}{h}(t_r - \tau) \quad (15a)$$

Table 1. Developed Algorithms

Algorithms	Description
Jquad	J and δJ : quadratically approximated u and δu : linearly approximated
Uquad	J and δJ : linearly approximated u and δu : quadratically approximated
UJquad	J and δJ : quadratically approximated u and δu : quadratically approximated

$$L_r(\tau) = \frac{1}{h}(\tau - t_{r-1}) \quad (15b)$$

또한, 다음과 같이 시간 간격 (t_{r-1}, t_r) 의 중심 t_c 를 고려하면,

$$t_c = \frac{(t_r - t_{r-1})}{2} = \frac{h}{2} \quad (16)$$

시간 간격내의 시간 $\tau(t_{r-1} < \tau < t_r)$ 에 대한 이차의 형태함수 Q_{r-1} , Q_r , Q_c 는 다음과 같다.

$$Q_{r-1}(\tau) = \frac{2}{h^2}(\tau - t_r)(\tau - t_c) \quad (17a)$$

$$Q_r(\tau) = \frac{2}{h^2}(\tau - t_{r-1})(\tau - t_c) \quad (17b)$$

$$Q_c(\tau) = \frac{4}{h^2}(\tau - t_r)(\tau - t_{r-1}) \quad (17c)$$

Eq. (15)와 Eq. (17)을 통해, Table 1의 모든 알고리즘이 개발될 수 있는 데, 이 중 대표로 Uquad 알고리즘의 개발을 소개하면 다음과 같다.

먼저, Eq. (15)와 Eq. (17)을 통해, 주요 변수는 다음과 같이 근사된다.

$$u(\tau) = Q_{r-1}(\tau)u_{r-1} + Q_r(\tau)u_r + Q_c(\tau)u_c \quad (18a)$$

$$\delta u(\tau) = Q_{r-1}(\tau)\delta u_{r-1} + Q_r(\tau)\delta u_r + Q_c(\tau)\delta u_c \quad (18b)$$

$$J(\tau) = L_{r-1}(\tau)J_{r-1} + L_r(\tau)J_r \quad (18c)$$

$$\delta J(\tau) = L_{r-1}(\tau)\delta J_{r-1} + L_r(\tau)\delta J_r \quad (18d)$$

또한, 이 근사치에 따른 시간에 대한 미분항은 다음과 같이 근사된다.

$$\dot{u}(\tau) = \dot{Q}_{r-1}(\tau)u_{r-1} + \dot{Q}_r(\tau)u_r + \dot{Q}_c(\tau)u_c \quad (19a)$$

$$\delta\dot{u}(\tau) = \dot{Q}_{r-1}(\tau)\delta u_{r-1} + \dot{Q}_r(\tau)\delta u_r + \dot{Q}_c(\tau)\delta u_c \quad (19b)$$

$$\dot{J}(\tau) = \dot{L}_{r-1}(\tau)J_{r-1} + \dot{L}_r(\tau)J_r \quad (19c)$$

$$\delta\dot{J}(\tau) = \dot{L}_{r-1}(\tau)\delta J_{r-1} + \dot{L}_r(\tau)\delta J_r \quad (19d)$$

Eq. (19)에 나타난 위점자의 점은 τ 에 대한 미분을 의미하며, 주요변수의 아래첨자는 그 시간에서의 이산값(discrete value) 의미한다.

주요 변수 근사시, 유의할 점은 확장 해밀턴 이론은 각 시간의 시작과 마지막에 대한 모멘텀을 별도로 다루고 있는 점인데, Eq. (14)의 $\hat{p}$ 은 각 시간의 시작과 마지막의 대표값인 $\hat{p}(t_{r-1})$ 과 $\hat{p}(t_r)$ 로 표현된다. 덧붙여, 시간 $\tau(t_{r-1} < \tau < t_r)$ 에 대한 외력 $\hat{f}$ 은 다음과 같이 근사된다.

$$\hat{f}(\tau) \approx L_{r-1}\hat{f}_{r-1} + L_r\hat{f}_r \quad (20)$$

Eqs. (18)-(20)을 Eq. (14)에 대입하고, 시간에 대한 직접적분을 행하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & -m\left(\frac{7}{3h}u_{r-1} + \frac{1}{3h}u_r - \frac{8}{3h}u_c\right)\delta u_{r-1} \\ & -m\left(\frac{1}{3h}u_{r-1} + \frac{7}{3h}u_r - \frac{8}{3h}u_c\right)\delta u_r \\ & -m\left(-\frac{8}{3h}u_{r-1} - \frac{8}{3h}u_r + \frac{16}{3h}u_c\right)\delta u_{r-1} \\ & +c\left(\frac{1}{2}u_{r-1} - \frac{1}{6}u_r + \frac{2}{3}u_c\right)\delta u_{r-1} \\ & +c\left(\frac{1}{6}u_{r-1} + \frac{1}{2}u_r - \frac{2}{3}u_c\right)\delta u_r \\ & +c\left(-\frac{2}{3}u_{r-1} + \frac{2}{3}u_r\right)\delta u_c \\ & +\frac{1}{6}(J_r - J_{r-1})\delta u_{r-1} \\ & +\frac{1}{6}(J_r - J_{r-1})\delta u_r \\ & +\frac{2}{3}(J_r - J_{r-1})\delta u_c \\ & -\frac{h}{6}\hat{f}_{r-1}\delta u_{r-1} - \frac{h}{6}\hat{f}_r\delta u_r - \frac{h}{3}(\hat{f}_{r-1} + \hat{f}_r)\delta u_c \\ & +\frac{a}{h}(J_r - J_{r-1})\delta J_{r-1} - \frac{a}{h}(J_r - J_{r-1})\delta J_r \\ & -\left(\frac{1}{6}u_{r-1} + \frac{1}{6}u_r + \frac{2}{3}u_c\right)\delta J_{r-1} \\ & +\left(\frac{1}{6}u_{r-1} + \frac{1}{6}u_r + \frac{2}{3}u_c\right)\delta J_r \\ & +\hat{p}_r\delta u_r - \hat{p} \end{aligned} \quad (21)$$

Eq. (21)에서 범함수의 정상성 $\delta \mathcal{H}=0$ 이 (i) 각 시간 간격내의 범함수의 정상성 $\delta \mathcal{H}_r=0$ 을 통해 만족하고, (ii) Eq. (20)의 가상 필드가 시간 $\tau(t_{r-1} < \tau < t_r)$ 간격 내에서 임의로 변하는 것을 고려하면, 은 각 가상필드의 계수가 0이 되어야만 만족함을 알 수 있다. 곧, Eq. (21)을 각 가상필드별로 계수를 정리하고, 이것이 0이 됨을 정리하면, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & -m\left(\frac{7}{3h}u_{r-1} + \frac{1}{3h}u_r - \frac{8}{3h}u_c\right) + c\left(-\frac{1}{2}u_{r-1} - \frac{1}{6}u_r + \frac{2}{3}u_c\right) \\ & +\frac{1}{6}(J_r - J_{r-1}) - \frac{h}{6}\hat{f}_{r-1} - \hat{p}_{r-1} = 0 \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} & -m\left(\frac{7}{3h}u_{r-1} + \frac{7}{3h}u_r - \frac{8}{3h}u_c\right) + c\left(\frac{1}{6}u_{r-1} + \frac{1}{2}u_r - \frac{2}{3}u_c\right) \\ & +\frac{1}{6}(J_r - J_{r-1}) - \frac{h}{6}\hat{f}_r + \hat{p}_r = 0 \end{aligned} \quad (22b)$$

$$\begin{aligned} & m\left(\frac{8}{3h}u_{r-1} + \frac{8}{3h}u_r - \frac{16}{3h}u_c\right) + c\left(-\frac{2}{3}u_{r-1} + \frac{2}{3}u_r\right) \\ & +\frac{2}{3}(J_r - J_{r-1}) - \frac{h}{3}(\hat{f}_{r-1} + \hat{f}_r) = 0 \end{aligned} \quad (22c)$$

$$\frac{a}{h}(J_r - J_{r-1}) - \left(\frac{1}{6}u_{r-1} + \frac{1}{6}u_r + \frac{2}{3}u_c\right) = 0 \quad (22d)$$

$$-\frac{a}{h}(J_r - J_{r-1}) + \left(\frac{1}{6}u_{r-1} + \frac{1}{6}u_r + \frac{2}{3}u_c\right) = 0 \quad (22e)$$

Eq. (22)에서 보듯, Eq. (22d)와 Eq. (22e)는 서로 같음을 알 수 있고, 곧 독립적인 선형 방정식은 4개임을 알 수 있고, Eq. (22d) 혹은 Eq. (22e)를 통해, 주요변수 u_c 는 $u_r, u_{r-1}, J_r, J_{r-1}$ 로 표현될 수 있음을 알 수 있다. 곧, 주요 변수 u_c 를 Eq. (22d)나 Eq. (22e)를 통해 다른 주요 변수 $u_r, u_{r-1}, J_r, J_{r-1}$ 로 표현하고 이를 matrix equation으로 표현하면 Uquad 알고리즘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1(3m+ch)}{3h} & 0 & \frac{1(Y+6cha)}{6h^2} \\ \frac{1(-9m+2ch)}{3h} & -1 & \frac{1(-Y+6cha)}{6h^2} \\ \frac{2(6m+ch)}{3h} & 0 & \frac{2X}{3h^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ \hat{p}_r \\ J_r \end{Bmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \frac{1(9m+2ch)}{3h} & -1 & \frac{1(Y+6cha)}{6h^2} \\ \frac{1(-3m+ch)}{3h} & 0 & \frac{1(-Y+6cha)}{6h^2} \\ \frac{2(-6m+ch)}{3h} & 0 & \frac{2X}{3h^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r-1} \\ \hat{p}_{r-1} \\ J_{r-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{h}{6}\hat{f}_{r-1} \\ \frac{h}{6}\hat{f}_r \\ \frac{h}{3}(\hat{f}_{r-1} + \hat{f}_r) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

Eq. (23)에서 X 와 Y 는 다음을 나타낸다.

$$X = 12ma - h^2 \quad (24a)$$

$$Y = 24ma + h^2 \quad (24b)$$

마찬가지로, 이와 같은 방법을 통해, Jquad 알고리즘은 다음의 식으로

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{12} \frac{(X+6cha)}{ha} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \frac{(-X+6cha)}{ha} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{2a}{h} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ \hat{p}_r \\ J_r \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \frac{(X+6cha)}{ha} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \frac{(-X+6cha)}{ha} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{2a}{h} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r-1} \\ \hat{p}_{r-1} \\ J_{r-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{h}{3} \hat{f}_{r-1} + \frac{h}{6} \hat{f}_r \\ \frac{h}{6} \hat{f}_{r-1} + \frac{h}{3} \hat{f}_r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

UJquad 알고리즘은 다음의 식으로 나타내어진다.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{12} \frac{(12ma+4cha+h^2)}{ha} & 0 & \frac{1}{6} \frac{(Y+6cha)}{h^2} \\ \frac{1}{12} \frac{(-36ma+8cha+h^2)}{h} & 1 & \frac{1}{6} \frac{(Y-6cha)}{h^2} \\ \frac{2}{3} \frac{(6m+ch)}{h} & 0 & -\frac{2X}{3h^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ \hat{p}_r \\ J_r \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \frac{(36ma+8cha+h^2)}{ha} & 1 & \frac{1}{6} \frac{(Y+6cha)}{h^2} \\ \frac{1}{12} \frac{(12ma-4cha+h^2)}{h} & 0 & \frac{1}{6} \frac{(Y-6cha)}{h^2} \\ \frac{2}{3} \frac{(-6m+ch)}{h} & 0 & -\frac{2X}{3h^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r-1} \\ \hat{p}_{r-1} \\ J_{r-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{h}{6} \hat{f}_{r-1} \\ \frac{h}{6} \hat{f}_r \\ \frac{h}{3} \hat{f}_{r-1} + \frac{h}{6} \hat{f}_r \end{Bmatrix} \quad (26)$$

4. 제안된 수치해석법의 특징

앞서 개발된 시간에 대한 이차의 형태함수가 적용된 각각의 수치해석법은 다음의 간단한 matrix equation으로 나타낼 수 있다.

$$A_1 x_n = A_0 x_{n-1} + f_n \quad (27)$$

Eq. (27)은 다음의 식과 동등하다.

$$x_n = A_D x_{n-1} + A_1^{-1} f_n \quad (28a)$$

$$A_D = A_1^{-1} A_0 \quad (28b)$$

4.1 안정성과 수치 감쇠 검토

외력과 감쇠가 존재하지 않는 에너지 보존 시스템의 경우,

Table 2. Eigenvalues of A_D

Algorithm	Eigenvalues
Uquad	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_{2,3} = \frac{6ma-2h^2 \pm i\sqrt{36h^2ma-3h^4}}{6ma+h^2}$
Jquad	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_{2,3} = \frac{6ma-2h^2 \pm i\sqrt{36h^2ma-3h^4}}{6ma+h^2}$
UJquad	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_{2,3} = \frac{h^4 60mah^2 + 144m^2 a^2 \pm i(12h)X\sqrt{am}}{h^4 + 12mah^2 + 144m^2 a^2}$

Eq. (28)은 다음의 식으로 표현된다.

$$x_n = A_D x_{n-1} \quad (29)$$

개발된 해석법의 안정성과 수치 감쇠발생 여부는 Eq. (29)의 특이해(eigenvalues)의 크기에 의해 결정되며, 각각의 알고리즘에 대한 특이해는 Table 2와 같다.

Table 2에서 보듯, 모든 알고리즘에 대해 특이해의 크기는 단순히 다음의 식으로 표현된다.

$$\| \lambda \| = 1 \quad (30)$$

곧, 개발된 알고리즘은 시간간격(time-step)에 관계없이 항상 안정적이고 또한 수치 감쇠가 전혀 발생되지 않음을 알 수 있다.

4.2 수치해석 예제

제안한 수치해석법은 1) 감쇠 구조물의 자유진동(damped free vibration) 2) 조화하중에 의한 감쇠구조물의 진동(harmonic vibration of the damped system)의 두 가지 주요 예제가 검증되었으며, 해석상 편의를 위해, 각 경우에 대해 질량 $m=1$, 스프링 강성 $k=4\pi^2$, 감쇠 상수 $c=0.2\pi$ 에 3가지의 time-step cases($h=0.1$, $h=0.05$, $h=0.01$)을 공통으로 하였고, 그 외 해석에 대한 주요정보는 Table 3과 같다.

Table 3에서 보듯, 감쇠 시스템의 경우 감쇠상수 c 는 감쇠율(damping ratio) ξ 가 5%인 경우를 고려하였고, 각 해석 결과는 정확한 해와 비교되었으며, 제안된 해석법의 수렴특성을 확인키 위해 추가로 McKeena *et al.* (2013)에 의해 개발된

Table 3. Numerical Examples

Damped free vibration	Forced damped vibration
$u(0) = 1$ $\dot{u}(0) = 1$ $\hat{f}(t) = 0$	$u(0) = 1$ $\dot{u}(0) = 1$ $\hat{f}(t) = 100\sin(10t)$

Fig. 2. Damped Free Vibration (Newmark's Constant Average Acceleration Method).

Fig. 3. Forced Damped Vibration (Newmark's Constant Average Acceleration Method).

OpenSees를 활용해 Newmark's methods가 적용된 해석도 수행하였다.

먼저, Newmark's constant average acceleration method에 근거한 감쇠 시스템의 자유진동과 조화하중에 의한 진동은 Fig. 2-Fig. 3과 같다.

또한, 제안된 해석법에 근거한 감쇠 시스템의 자유진동과 조화하중에 의한 진동은 Fig. 4-Fig. 9와 같다.

Fig. 2-Fig. 9를 비교해 보면, 제안된 해석법은 Newmark's constant average acceleration method에 비해 그 수렴의 속도가 현저히 빠른 것을 알 수 있다. 제안된 해석법과 비교를 위해 사용된 해석법인 Newmark's constant average acceleration method는 수치해가 time-step에 대해 무조건 안정적이기 때문에 Newmark's linear acceleration method에 비해 선호되는 해석법임을 주지할 필요가 있다. 곧, Newmark's linear acceleration method는 다음의 조건을 만족시켜야하는 time-step에 조건부 안정적인 해석방법이다.

Fig. 4. Damped Free Vibration (Uquad Algorithm).

Fig. 5. Damped Free Vibration (Jquad Algorithm).

Fig. 6. Damped Free Vibration (UJquad Algorithm).

$$h < 0.551 T_n \quad (31)$$

Eq. (31)에서, T_n 은 고유주기를 나타내며, 단자 유도계가 아닌 경우, Newmark's linear acceleration method는 가장 작은

Fig. 7. Forced Damped Vibration (Uquad Algorithm).

Fig. 8. Forced Damped Vibration (Jquad Algorithm).

Fig. 9. Forced Damped Vibration (UJquad Algorithm).

고유주기에 의해 time-step을 결정해야하는 수치해 안정성에 대한 단점이 있다. 고려된 선형 탄성 단자유도계에 대해서는 Eq. (31)의 조건이 큰 역할을 하지 못하며($T_n=2\pi$), Newmark's linear acceleration method를 통한 수치해석 예제의 결과는

Fig. 10. Damped Free Vibration (Newmark's Linear Acceleration Method).

Fig. 11. Forced Damped Vibration (Newmark's Linear Acceleration Method).

Fig. 10-Fig. 11과 같다.

Fig. 4-Fig. 11을 비교해보면, 제안된 해석법이 Newmark's linear acceleration method에 의한 해석보다 정해에 더욱 빠르게 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 제안된 해석법은 수치해의 안정성 측면에 제한이 없으나, 정확성 측면에서는 그 time-step의 제한이 있을 수 있는 데, 특히, 고주파 외력의 경우, 해석의 정확성은 여타 해석법과 같이 고주파 외력의 bandwidth를 고려해 time-step의 크기가 결정되어야 함을 주지할 필요가 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 동역학의 새로운 변분이론인 확장 해밀턴 이론에 근거해 시간에 대한 이차항의 형태함수가 적용된 해석법의 잠재력을 확인하고자 가장 간단한 선형 탄성 단자유도 계로의 적용을 통해 그 해석법의 특징을 살펴보았다.

제안된 수치해석법은 time-step에 관계없이 항상 안정적인

해석방법으로, 에너지 보존 시스템의 경우 수치 감쇠가 발생되지 않는 에너지와 모멘텀이 보존되는 symplecticity property를 가지고 있음을 특이해 분석으로 확인할 수 있었고, 감쇠 시스템인 경우, Newmark's methods(constant average and linear acceleration methods)에 비해, time-step이 점점 작아질수록 정확한 해에 더욱 빠르게 수렴하는 것을 확인하였다. 곧, 본 연구를 통해 확장 해밀턴 이론을 토대로한 시간에 대한 고차형태함수를 활용한 해석법이 다자 유도계, 연속체를 비롯한 다양한 동적 시스템 해석에 활용됨에 있어, 그 가능성과 잠재력이 확인되었다고 볼 수 있겠다. 향후, 이 기본 연구를 바탕으로 다양한 시공간 고차 유한요소 해석법 개발과 그의 실제적인 적용 연구가 진행될 예정이며, 단자 유도계의 경우처럼 기존 해석법에 비해 개선된 해석결과를 기대한다.

References

- Apostolakis, G. and Dargush, G.F. (2012) Mixed Lagrangian formulation for linear thermoelastic response of structures, *Journal of Engineering Mechanics*, 138, pp. 508-518.
- Biot, A.N. and Edwards, B.J. (1955) Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity, *Physical Review*, 97, pp. 1463-1469.
- Bretherton, F.P. (1970) A note on Hamilton's principle for perfect fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, 44, pp. 19-31.
- Gossick, B.R. (1967) Hamilton's Principle and Physical Systems, Academic Press, New York.
- Hamilton, W.R. (1834) On a general method in dynamics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 124, pp. 247-308.
- Hamilton, W.R. (1835) Second essay on a general method in dynamics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 125, pp. 95-144.
- Kim, J., Dargush, G.F. and Ju, Y.K. (2013) Extended framework of Hamilton's principle for continuum dynamics, *International Journal of Solids and Structures*, 50, pp. 3418-3429.
- Kim, M.H. and Kim, S.J. (2013). Characteristics of vertical ground motion and its effect on the response of 3-story RC building, *Journal of Korean Society of Hazard Mitigation*, Vol. 13, No. 2, pp. 23-29.
- Landau, L.E. and Lifshits, E.M. (1975) The Classical Theory of Fields, Pergamon Press, Oxford.
- Lavan, O. (2010) Dynamic analysis of gap closing and contact in the Mixed Lagrangian framework: toward progressive collapse prediction, *Journal of Engineering Mechanics*, 136, pp. 979-986.
- Marsden, J.E. and Ratiu, T.S. (1994) Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems. Springer-Verlag, New York.
- McKeena, F., McGann, C., Arduino, P. and Harmon, J.A. (2013) OpenSees Laboratory.
- Oh, M.H. and Kim, M.H. (2013) Seismic behavior of steel building considering the floor slab, *Journal of Korean Society of Hazard Mitigation*, Vol. 13, No. 6, pp. 21-27.
- Sivaselvan, M.V. and Reinhorn, A.M. (2006) Lagrangian approach to structural collapse simulation, *Journal of Engineering Mechanics*, 132, pp. 795-805.
- Sivaselvan, M.V., Lavan, O., Dargush, G.F. et al. (2009) Numerical collapse simulation of large-scale structural systems using an optimization-based algorithm, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 38, pp. 655-677.
- Rayleigh, J.W.S. (1877) The Theory of Sound, Dover, New York.
- Slawinski, M.A. (2003) Seismic Waves and Rays in Elastic Media, Pergamon, Amsterdam.
- Tiersten, H.F. (1967) Hamilton's principle for linear piezoelectric media, *Proceedings of the IEEE*, 55, pp. 1523-1524.

Received	March 24, 2014
Revised	March 28, 2014
Accepted	March 31, 2014