투과 컴퓨터 단층촬영을 위한 모델 기반 반복연산 재구성에서 투사선 구동 시스템 모델의 성능 비교

정지은 · 이수진

배재대학교 전자공학과

Performance Comparison of Ray-Driven System Models in Model-Based Iterative Reconstruction for Transmission Computed Tomography

J. E. Jeong and S.-J. Lee

Department of Electronic Engineering, Paichai University, Daejeon, Korea

(Manuscript received 11 August 2014; revised 1 October 2014; accepted 7 October 2014)

Abstract: The key to model-based iterative reconstruction (MBIR) algorithms for transmission computed tomography lies in the ability to accurately model the data formation process from the emitted photons produced in the transmission source to the measured photons at the detector. Therefore, accurately modeling the system matrix that accounts for the data formation process is a prerequisite for MBIR-based algorithms. In this work we compared quantitative performance of the three representative ray-driven methods for calculating the system matrix; the ray-tracing method (RTM), the distance-driven method (DDM), and the strip-area based method (SAM). We implemented the ordered-subsets separable surrogates (OS-SPS) algorithm using the three different models and performed simulation studies using a digital phantom. Our experimental results show that, in spite of the more advanced features in the SAM and DDM, the traditional RTM implemented in the OS-SPS algorithm with an edge-preserving regularizer outperforms the SAM and DDM in restoring complex edges in the underlying object. The performance of the RTM in smooth regions was also comparable to that of the SAM or DDM.

Key words: transmission tomography, model-based iterative reconstruction, inverse problem, ray-driven method, ray-tracing method, regularization

I. 서 론

투과 컴퓨터 단층촬영(transmission computed tomography, TCT)은 비침습적으로 인체 외부의 주변에 360°의 회전각에 걸쳐 방사선을 투사하여 검출기에서 투과량을 측

정한 뒤 이로부터 인체 내의 단층영상을 복원 또는 재구성(reconstruction)하는 기술이다[1,2]. X-선 CT의 경우 방사선이 인체를 통과하면서 광자(photon)들이 산란되어 에너지가 점차 감소하는 “감쇠(attenuation)”의 과정을 겪게 되는데 인체 조직의 특성에 따라 방사선의 감쇠 정도가 다르므로 검출기에 획득된 투과데이터로부터 영상을 재구성할 경우 단면 내의 위치에 따른 감쇠계수(attenuation coefficient)의 분포를 이용한 해부학적 정보를 얻을 수 있다. 양전자방출단층촬영(positron emission tomography, PET)의 경우 투과 단층촬영을 통해 획득한 감쇠계수 영상을 사용하여 방출(emission)영상의 감쇠현상을 보정한다.

TCT 기술의 발명 이래 지금까지 실제 임상에서 주로 사

Corresponding Author : S.-J. Lee
Department of Electronic Engineering, Paichai University,
Daejeon, Korea
TEL: +82-42-520-5711 / FAX: +82-70-4362-6311
E-mail: sjlee@pcu.ac.kr
이 논문은 2011년도 정부(교육부)의 재원 및 2014년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임
(No. 2011-0014325 및 No. 2014R1A2A2A01002626).

용되고 있는 영상재구성 방법은 여과 역투사(filtered back-projection, FBP) 방법으로 이는 투사 식으로 표현되는 Radon 변환의 단순 역변환 방법을 사용하는 것이므로 연산속도가 매우 빠른 반면 TCT의 투과데이터 형성과정에서 발생하는 양자(quantum) 및 전자적(electronic) 잡음을 완전히 무시한 것이어서 저 선량(low dose)으로 촬영할 경우 재구성된 영상에 각종 인공부산물(artifacts)이 나타나며[1], 이로 인해 각종 병리 또는 진단을 위한 정보의 올바른 해석이 어렵게 되는 단점이 있다.

최근에 방사선의 투과과정에서 발생하는 양자 및 전자적 잡음을 통계학적 차원에서 모델링하고[3] 이를 영상재구성 알고리즘에 반영한 “모델 기반 반복연산 재구성”(model-based iterative reconstruction, MBIR)[4,5]에 대한 연구가 활성화되고 있는데, 이는 검출기의 기계적인 결함등과 같은 시스템 외부의 요인으로 방사선을 구성하는 광자가 산란되거나 소멸되어 검출되지 못하는 경우도 통계적으로 모델링이 가능하므로 FBP에 비해 정량적으로 우수한 영상을 재구성할 수 있는 것으로 알려져 있다[1]. 비록 반복적 영상 재구성 기법이 FBP에 비해 연산시간이 증가하는 단점을 가지고 있으나 최근 저가의 고속 GPUs (graphics processing units)의 개발로 고가의 고속컴퓨터를 사용하지 않고도 임상에서 용이하게 사용할 수 있게 되었다[6-8].

MBIR 방법에서 재구성된 영상의 정확도에 결정적으로 영향을 미치는 알고리즘의 구성 요소는 투사(projection) 및 역투사(back-projection) 연산이다. 즉, 알고리즘 내에 투사 및 역투사의 연산이 반복적으로 사용되므로 방사선이 인체를 통과하여 검출기로 투사될 때 방사선이 인체 내의 위치에 따라 특정 투사값에 기여하는 정도를 나타내는 시스템 행렬(system matrix)을 설계하는 방법에 따라 그 영상의 품질이 좌우된다. 일반적으로 시스템 행렬의 유형으로는 화소 구동법(pixel-driven method, PDM)과 투사선 구동법(ray-driven method, RDM)이 있으나 PDM은 RDM에 비해 투과영상(transmission imaging)에 대한 방사선의 진행경로를 표현하지 못하므로 TCT 영상재구성에는 적합하지 않다. 한편 RDM의 대표적 유형에는 다음과 같은 세 가지 방법이 있다. 선추적법(ray-tracing method, RTM)[9], 면적기반법(strip-area based method, SAM)[10], 거리구동법(distance-driven method, DDM)[11]. RTM은 방사선이 화소를 통과하는 교차길이를 측정하는 방법으로 연산의 효율 면에서 매우 우수한 방법으로 알려졌으나 최근에 좀 더 정확한 연산방법인 SAM을 근사화하여 연산의 효율성을 한층 높인 DDM이 개발되면서 DDM이 RTM 보다 우수한 것으로 평가되고 있다. 한편, 최근에 3차원 콘빔(cone-beam) 단층촬영을 위해 새롭게 소개된 SFM (separable foot-print method)[12]은 DDM 보다 좀 더 정확한 것으

로 알려져 있으나 2차원에서 평행빔(parallel-beam) 투사의 경우 SAM과 동일하고 팬빔(fan-beam) 투사의 경우 SAM보다 정확도가 다소 낮아지는 것으로 알려져 있다[13].

본 연구에서는 RTM, DDM, 및 SAM의 세 가지 방법이 MBIR 알고리즘에 적용될 경우 복원하고자 하는 2차원 단면 영상의 특성에 따라 재구성된 영상에 어떠한 영향을 미치는가에 대하여 고찰함으로써 영상의 특성에 따른 각 방법의 장단점을 정량적으로 비교 및 분석한다. 이를 위해 위의 세 가지 방법을 사용한 시스템행렬의 연산방법에 대해 서술하고 본 연구에서 이들을 적용하여 영상을 재구성할 MBIR 알고리즘에 대하여 간략히 소개한다. 세 가지 시스템 모델의 성능을 비교를 위해 소프트웨어 모형을 사용한 실험을 통해 재구성된 영상들을 정량적으로 비교 및 분석한 후 결론을 맺는다.

II. 재료 및 방법

1. 영상재구성을 위한 시스템행렬의 연산방법

MBIR의 경우 방사선이 인체를 통과하여 검출기로 투사될 때 방사선이 인체 내의 위치에 따라 특정 투과값에 기여하는 정도를 시스템행렬로 표현한다. 2차원 단층영상 재구성의 경우 시스템 행렬 H 의 원소 $h_{t\theta ij}$ 는 (i,j) 위치의 화소가 θ 로 놓인 검출기의 t -번째 칸에 도달될 확률을 나타내며, 이 경우 투사값 $g_{t\theta}$ 는 다음과 같은 수식으로 표현된다.

$$g_{t\theta} = \sum_{ij} h_{t\theta,ij} \mu_{ij} \quad (1)$$

위의 식(1)에서 μ_{ij} 는 복원하고자 하는 단면영상의 (i,j) 번째 화소값을 의미한다. 그런데 TCT의 경우 방사선이 인체를 통과하면서 산란현상에 의해 검출기에 도달하기 전에 감쇠현상을 겪게 되므로 최종적으로 검출기에 도달하는 광자의 개수 $y_{t\theta}$ 는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$y_{t\theta} = b_{t\theta} e^{-g_{t\theta}} + \gamma_{t\theta} \quad (2)$$

식(2)에서 $\{b_{t\theta}\}$ 는 방사선원에서 방출되는 최초의 광자 개수이고, $\gamma_{t\theta}$ 는 시스템의 외부요인에 의해 발생하는 배경 효과의 기대값을 나타낸다. 따라서 $y_{t\theta}$ 는 방사선을 이루는 광자들이 인체 내에서 산란되어 감쇠된 후 최종적으로 검출기에 기록된 광자들의 개수, 즉 투과량을 나타내며, 이것이 영상 재구성을 위한 투과 데이터가 된다. 위와 같이 표현된 데이터로부터 영상을 재구성하기 위한 기본적인 단계는 역투사를 수행하는 것이다. MBIR에서는 투사와 역투사 연산을 반복적으로 수행하므로 투사와 역투사 연산을 위한 시스템 행렬의 정확도가 재구성된 영상의 정확도에 직접적인 영향

그림 1. 시스템 행렬 $\mathbf{H}$ 를 계산하기 위한 RTM, SAM, DDM의 비교.
Fig. 1. Comparison of RTM, SAM and DDM for computing system matrix $\mathbf{H}$.

을 미친다(그림 3 참조).

그림 1은 본 논문에서 비교하고자 하는 시스템행렬 $\mathbf{H}$ 를 연산하기 위한 대표적인 선 적분 기반 방법인 선 추적 법(ray-tracing method, RTM)[9], 면적기반 법(strip-area based method, SAM)[10], 거리구동 법(distance-driven method, DDM)[11]을 나타낸 것이다.

그림 1에서 RTM의 경우에는 직선으로 진행되는 방사선이 (i, j) 위치의 화소를 통과하면서 교차되는 교차길이(chord length) $r_{t|ij}$ 가 θ 방향으로 놓인 검출기의 t 번째 칸에 투사된다. SAM의 경우에는 검출기 칸의 간격과 동일한 폭으로 진행되는 방사선이 화소를 통과하면서 형성되는 교차면적 $a_{t|ij}$ 를 θ 방향 검출기의 $t-1$ 과 t 번째 칸 사이에 투사된다. SAM에서는 방사선을 일정한 폭을 가진 띠(strip)로 모델링 하므로 $a_{t|ij}$ 을 구하기 위한 연산시간이 RTM의 $r_{t|ij}$ 에 비해 많이 소요되므로 이러한 단점을 줄이기 위한 방법으로 DDM이 제안되었다. DDM은 SAM과 같이 방사선이 일정한 폭을 가지면서 진행되고, θ 방향의 검출기 칸들과 방사선을 통과하는 화소를 공통 축 상에 사상(map)하여 SAM의 면적에 상응하는 길이 $l_{t|ij}$ 를 투사값으로 근사화한다. 이 때 공통 축에 사상된 θ 방향의 검출기의 t 번째 칸을 $d_\theta(t)$ 라 하고, (i, j) 에 위치하는 화소의 좌·우변 중점을 투사선과 평행 방향으로 공통 축에 사상된 점점들을 각각 $P_L(i, j)$ 과 $P_R(i, j)$ 라 하면, 그림 1의 경우 $l_{t|ij}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$l_{t\theta,ij} = \frac{d_{\theta}(t) - P_L(i,j)}{P_p(i,j) - P_L(i,j)} \quad (3)$$

그림 2. RTM, SAM, DDM을 통해 구한 256×256 민감 지도 (sensitivity map) (평균 $\pm$ 표준편차): (a) RTM (255.87 ± 3.04); (b) SAM (255.89 ± 0.89); (c) DDM (255.89 ± 0.96).

Fig. 2. Sensitivity maps obtained from RTM, SAM and DDM (mean $\pm$ standard deviation): (a) RTM (255.87 ± 3.04); (b) SAM (255.89 ± 0.89); (c) DDM (255.89 ± 0.96).

그림 2는 각 시스템 행렬 유형에 따른 민감 지도(sensitivity map)의 결과이며, 민감지도는 (t, θ) 번째 검출기 칸에서 투자값 1을 영상공간으로 역투사한 것을 나타낸다.

민감 지도의 평균(mean)값은 투사공간에 따른 영상공간의 평균 민감도를 나타내는 것으로 민감도가 높을수록 투사 및 역 투사의 효율이 높아짐을 의미하며, 표준편차(standard deviation, STD)는 민감도의 비 균일성을 나타낸다. 그림 2를 보면 RTM이 SAM과 DDM에 비해 민감 지도 측면에서 균일 하지 못한 것을 확인 할 수 있으며, 이는 그림 1과 같이 미리 정의 된 검출기의 칸으로부터 진행되는 방사선이 직선으로 투사될 때 검출기의 칸과 칸 사이에서 공백이 존재하기 때문이다. 한편 SAM과 DDM은 방사선이 일정한 폭을 가지며 투사되기 때문에 검출기 상의 공백이 발생하지 않으므로 영상공간 내의 인공부산물 이 나타나지 않은 것으로 보인다.

본 연구에서 사용하는 통계학적 반복연산 영상재구성법은 투사 및 역투사의 반복연산을 기반으로 하는데, 예를 들어 50회 반복연산 시 50회의 투사 및 역투사 연산이 필요하게 되므로 반복 연산의 횟수가 증가할수록 영상재구성에 소요되는 총 연산시간이 반복연산 횟수 배로 증가하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 반복연산에서 변하지 않는 시스템 행렬의 원소 (또는 가중치)들을 최초로 한번 연산하여 LUT (look-up table) 메모리에 저장한 뒤 반복연산 때 마다 이들을 더 이상 연산하지 않고 단순히 LUT에서 읽어올 경우 총 연산시간을 급격히 단축할 수 있다. 이러한 LUT 방식은 RTM, DDM, SAM에 공히 적용될 수 있다. LUT에는 방사선이 향하는 각도 θ 에 대한 각 화소 (i, j) 별로 결정되는 검출기 상의 정보, 즉 검출기 칸과 해당되는 가중치를 저장되므로 (i, j, θ) 를 좌표로 하는 3차원 배열의 LUT가 사용될 수 있다. 본 연구에서는 RTM을 통해 구해지는 가중치를 정확하고 빠르게 계산하기 위하여 Siddon이 제안한 교차길이의 효율적 계산방법[9]을 사용하였다. Siddon 방법의 경우 검출기 칸으로부터 진행되는 방사선이 통과하는 역

상공간의 화소의 개수 N 과 화소의 위치 (i, j) 및 교차길이 $r_{t\theta ij}$ 를 제공한다. 검출기의 해상도가 256인 경우 주어진 각도 θ 에 따른 방사선이 한 화소를 통과하는 방사선은 최대 2개가 될 수 있으므로 LUT가 각각 2개씩($\{t_1(i, j, \theta), t_2(i, j, \theta)\}$ 및 $\{r_{t_1\theta ij}(i, j, \theta), r_{t_2\theta ij}(i, j, \theta)\}$)이 필요하다. 이와 유사하게 SAM과 DDM에 Siddon 방법을 적용할 경우 주어진 각도 θ 에 따라 현재 검출기 칸으로부터 진행되는 직선의 방사선과 다음 검출기 칸으로부터 진행되는 직선의 방사선이 영상 공간의 화소에 투사되며, 한 화소 (i, j) 를 통과하는 때 형태의 방사선은 최대 3개가 되므로 LUT가 각각 3개씩($\{t_1(i, j, \theta), t_2(i, j, \theta), t_3(i, j, \theta)\}$ 및 SAM의 경우에 $\{a_{t_1\theta ij}(i, j, \theta), a_{t_2\theta ij}(i, j, \theta), a_{t_3\theta ij}(i, j, \theta)\}$, DDM의 경우에 $\{l_{t_1\theta ij}(i, j, \theta), l_{t_2\theta ij}(i, j, \theta), l_{t_3\theta ij}(i, j, \theta)\}$)이 필요하다. LUT에 사용되는 3차원 배열의 각 원소를 4-바이트 실수형으로 할 경우 RTM은 256 MB, SAM과 DDM은 384MB의 메모리 용량이 필요하다.

2. 모델 기반 반복연산 재구성 알고리즘

본 논문에서 투사선 구동 시스템 모델의 성능 비교를 위해 사용할 모델 기반 반복연산 재구성(MBIR) 방법은 최대 사후(maximum a posteriori, MAP) 추정법에 기반한 OS-SPS (ordered subsets-separable paraboloidal surrogates) [14] 알고리즘이다. 여기서 OS (ordered subsets)[17-19] 방법은 투과데이터를 여러 개의 부분집합(subsets)으로 나누고 각 부분집합에 대하여 투사 및 역투사 연산을 포함하는 SPS 알고리즘을 독립적으로 수행함으로써 수렴속도를 부분집합의 개수 배 만큼 증가시킨다.

TCT 영상재구성을 위한 OS-SPS 알고리즘을 간략히 요약하면 다음과 같다. 복원하고자 하는 물체의 감쇠계수 영상을 μ , 시스템에서 관측된 투과데이터를 y 라 하면 베이즈 규칙(Bayes' rule)은 식(4)와 같이 표현되며, 좌변의 $\Pr(\mu|y)$ 는 사후확률, 우변에서 $\Pr(y|\mu)$ 는 우도(likelihood)확률, $\Pr(\mu)$ 는 사전(prior)확률이다.

$$\Pr(\mu|y) = \frac{\Pr(y|\mu)\Pr(\mu)}{\Pr(y)} \quad (4)$$

식(4)의 양변에 $\log$ 를 취하고 μ 를 추정하기 위한 식으로 다시 쓰되 우변에서 μ 와 무관한 항들을 무시하면 다음과 같다.

$$\arg \max_{\mu \geq 0} \log \Pr(\mu|y) = \arg \max_{\mu \geq 0} [\log \Pr(y|\mu) + \log \Pr(\mu)] \quad (5)$$

즉, 식(5)를 최대화함으로써 MAP의 해 $\hat{\mu}$ 를 구하면 그것이 복원하고자 하는 영상이 된다. 식(5)를 풀기 위해 최적화를 위한 목적(objective)함수 $\Phi(\mu)$ 를 쓰면 다음과 같

이 요약될 수 있다.

$$\Phi(\mu) = \log \Pr(y|\mu) + \log \Pr(\mu) \quad (6)$$

식(6)에서 우도확률 $\Pr(y|\mu)$ 은 푸아송(Poisson) 분포함수로 표현되며 $\log$ 를 취하여 이를 $L(\mu)$ 로 정의하면 다음과 같다.

$$L(\mu) = \sum_{i\theta} y_{i\theta} \log(b_{i\theta} e^{-[H\mu]_{i\theta}} + \gamma_{i\theta}) - (b_{i\theta} e^{-[H\mu]_{i\theta}} + \gamma_{i\theta}),$$

$$\text{단 } [H\mu]_{i\theta} = \sum_{ij} h_{i\theta, ij} \mu_{ij} \quad (7)$$

또한 식(6)에서 사전확률 $\Pr(\mu)$ 은 일반적으로 깁스(Gibbs) [20] 분포함수로 표현된다.

$$\Pr(\mu) = \frac{1}{Z} \exp[-\lambda R(\mu)] \quad (8)$$

식(8)에서 Z 는 정규화(normalize)를 위한 상수이고, 식(6)과 같이 사전확률에 $\log$ 를 취한 뒤 μ 와 무관한 Z 를 제외하여 식(6)의 목적함수 $\Phi(\mu)$ 를 다시 쓰면 다음과 같은 MAP을 위한 최종 목적함수가 주어진다.

$$\Phi(\mu) = L(\mu) - \lambda R(\mu) \quad (9)$$

145

식(9)에서 $R(\mu)$ 는 정칙자(regularizer) 또는 페널티(penalty) 함수로서, 일반적으로 인접한 화소간의 값의 차이가 클수록 페널티가 증가하도록 하는 식으로 표현된다. $\lambda \geq 0$ 는 우도항과 페널티항의 평형관계를 조정하는 역할을 하는 “평활 파라미터”(smoothing parameter)로서 λ 값의 선택은 최종 결과에 직접적으로 영향을 주며 어떤 값이 최적의 결과를 산출하는지는 주어진 투과데이터의 신호대잡음비(SNR)에 따라 달라진다. 즉, SNR이 작을수록 강한 잡음을 감소시키기 위해 λ 값이 크게 된다. 그러나 λ 값이 매우 클 경우 결과영상이 과도하게 평활화되어 복원하고자 하는 영상의 세부정보가 유실될 수 있고, 이와 반대로 λ 값이 매우 작을 경우 사전정보에 의한 효과가 거의 없어 결과 영상이 최대우도(maximum likelihood, ML) 해에 근접하므로 잡음이 상대적으로 강하게 나타난다. 식(9)의 정칙자를 일반적인 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$R(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{i'j' \in N_{ij}} w_{ij, i'j'} \psi(\mu_{ij} - \mu_{i'j'}) \quad (10)$$

식(10)에서 N_{ij} 은 (i, j) 번째 화소에 인접하는 이웃(neighborhood) 화소이며, $w_{ij, i'j'}$ 는 가중치로서 (i, j) 번째와 (i', j') 번째에 위치하는 화소 간의 거리의 역수 값을 취한다[21, 22]. $\psi(\cdot)$ 는 포텐셜(potential) 함수를 나타내고, 본 논문

서는 식(11)과 같은 제곱(quadratic, QD) 형태와 (12)와 같은 비제곱(non-quadratic, NQ) 형태의 두 가지 경우를 사용하였다.

$$\psi_{QD}(\xi) = \xi^2 \quad (11)$$

$$\psi_{NQ}(\xi) = \alpha^2 \left[\left| \frac{\xi}{\alpha} \right| - \log \left(1 + \left| \frac{\xi}{\alpha} \right| \right) \right] \quad (12)$$

식(11)에서 $\psi_{QD}(\xi)$ 는 단순한 제곱 형태의 포텐셜 함수를 나타내고, 식(12)에서 $\psi_{NQ}(\xi)$ 는 비제곱 형태이며, 볼록성(convexity)을 만족하는 포텐셜 함수[21-23]를 나타낸다. 식(12)의 경우 주어진 $\alpha > 0$ 에 대하여 ξ 값이 증가할수록 $\psi_{NQ}(\xi)$ 의 증가율($\psi'_{NQ}(\xi)$)이 점차 감소하면서 영상 내의 경계를 보존하는(edge-preserving) 기능을 갖는 반면, $\psi_{QD}(\xi)$ 는 증가율($\psi'_{QD}(\xi)$)이 항상 일정하므로 영상 내의 경계를 보존하지 못한다.

목적함수 $\Phi(\mu)$ 는 복잡한 식으로 표현되어 있기 때문에 $\Phi(\mu)$ 를 최소화하기 위해 미분한 후에 우변을 0으로 하는 분석적인 방법을 통해서 매 연산횟수(iteration)마다 $\hat{\mu}$ 를 구하기가 매우 어려운 것으로 알려져 있다. 본 논문에서는 목적함수 $\Phi(\mu)$ 에 접하면서 개별적으로 최소화가 용이한 일련의 대리(surrogate) 함수들 $\phi(\mu; \hat{\mu}^n)$ 을 정의하고, 각 대리 함수를 Newton-Raphson 방법으로 최대화함으로써 $\hat{\mu}$ 를 구하는 OS-SPS[24,25] 방법을 사용하였으며 이 경우 최종 식은 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{\mu}_{ij}^{n+1} = \hat{\mu}_{ij}^n - \frac{\left. \frac{\partial \phi(\mu; \hat{\mu}^n)}{\partial \mu_{ij}} \right|_{\mu = \hat{\mu}^n}}{\left. \frac{\partial^2 \phi(\mu; \hat{\mu}^n)}{\partial \mu_{ij}^2} \right|_{\mu = \hat{\mu}^n}} \quad (13)$$

3. 실험 방법

본 연구에서 고려하는 2차원 단층영상재구성을 위한 시스템 행렬 연산의 세 가지 방법을 실험하기 위해 다음과 같은 실험환경을 설정하였다. 복원하고자 하는 물체를 중심으로 360°로 회전하는 검출기의 각도를 256개의 균일한 이산 각으로 설정하였고, 주어진 각도에서 1차원 검출기의 해상도를 256으로 설정하였다. 이 경우 투과데이터는 256×256 의 사이노그램이 된다. 영상재구성을 위해 그림 3(a)와 같은 256×256 해상도를 가진 2차원의 소프트웨어 모형(phantom)을 사용하였다. 본 연구에서는 시스템 행렬의 유형에 따른 미세한 부분의 복원 차이를 정확히 관찰하기 위하여 시스템 내외의 잡음을 배제하고 재구성 하였다.

MBIR에 적용 될 세 가지 유형의 시스템 행렬이 소프트웨어모형의 단면 특성에 따라 재구성된 영상에 어떤 영향을 미치는 지에 대한 확인을 위하여 복원하고자 하는 소프트웨어 모형 내에 10개의 관심영역(regions of interest, ROI)를 미리 설정하였다. ROI에서 재구성된 영상의 정확도를 평가하기 위하여 영상 내의 경계를 따라 설정된 ROI 내에서 백분율 오차를 식(14)를 사용하여 측정하였으며, 영상 내의 평활한 부분의 경우 설정된 ROI 내에서 백분율 오차(regional

그림 3. RTM, SAM, DDM을 적용하여 영상재구성한 결과: (a) 256×256 소프트웨어 모형; (b)~(d) ML; (e)~(g) 제곱 형태의 사전정보를 사용한 MAP; (h)~(j) 비제곱 형태의 사전정보를 사용한 MAP; (b) RTM (PE = 4.950%); (c) SAM (PE = 5.661%); (d) DDM (PE = 5.319%); (e) RTM (PE = 9.844%); (f) SAM (PE = 10.942%); (g) DDM (PE = 10.471%); (h) RTM (PE = 1.862%); (i) SAM (PE = 3.114%); (j) DDM (PE = 2.418%).

Fig. 3. Reconstructions using RTM, SAM and DDM: (a) 256×256 software phantom; (b)~(d) ML; (e)~(g) MAP with quadratic potential function; (h)~(j) MAP with nonquadratic potential function; (b) RTM (PE = 4.950%); (c) SAM (PE = 5.661%); (d) DDM (PE = 5.319%); (e) RTM (PE = 9.844%); (f) SAM (PE = 10.942%); (g) DDM (PE = 10.471%); (h) RTM (PE = 1.862%); (i) SAM (PE = 3.114%); (j) DDM (PE = 2.418%).

percentage error, PE_{roi})뿐 아니라 표준편차(regional standard deviation, STD_{roi})도 추가로 식(15)를 사용하여 측정하였다.

$$PE_{roi} = \sqrt{\sum_{ij \in roi} (\mu_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2 / \sum_{ij \in roi} \mu_{ij}^2} \times 100(\%) \quad (14)$$

$$STD_{roi} = \sqrt{\sum_{ij \in roi} (\hat{\mu}_{ij} - \sum_{ij \in roi} \hat{\mu}_{ij} / N)^2 / (N-1)} \quad (15)$$

위의 PE_{roi} 및 STD_{roi} 를 계산하는 식에서 μ_{ij} 는 소프트웨어 모형의 화소 값이고, $\hat{\mu}_{ij}$ 는 재구성된 영상의 화소 값이며, N 은 한 ROI 내에 위치하는 화소의 개수를 나타낸다.

III. 결 과

표 1은 256×256 투과데이터로부터 256×256 영상을 재구성하기 위해 OS-SPS 알고리즘을 RTM, SAM, DDM 세 가지 방법으로 구현하고 64개의 부분집합과 50회의 반복연산을 통해 소요된 총 연산시간을 LUT의 사용 전(on-the-fly, OTF)후(LUT)에 따라 비교한 것이다. LUT를 적용하지 않은 경우 RTM이 SAM과 DDM에 비해 월등히 빠르나 LUT를 적용할 경우 세 가지 방법 모두 연산시간에 거의 차이가 없는 것을 알 수 있다. 따라서 이 후 본 논문에서는 연산시간 측면 보다 재구성된 영상의 정확성 측면에서 세 가지 방법의 성능을 비교하였다.

그림 3은 소프트웨어 모형으로부터 획득한 투과데이터를

표 1. RTM, SAM, DDM을 사용한 영상재구성 소요시간(sec) 비교.
Table 1. Comparison of computation times (sec) for RTM, SAM and DDM.

연산방법	알고리즘	ML		
		ML	MAP-QD	MAP-NQ
RTM	OTF	63.921	100.275	160.405
	LUT	46.286	80.995	143.501
SAM	OTF	5565.295	5589.628	5634.614
	LUT	79.010	112.578	171.605
DDM	OTF	5353.938	5558.892	5633.334
	LUT	75.097	110.942	167.889

64개의 부분집합과 50회의 OS-SPS를 통해 재구성된 결과이다. 세 가지 유형의 시스템 행렬의 성능을 ML과 MAP(QD/NQ) 추정법에 적용한 결과에 따라 비교하기 위하여 각 영상마다 좌측 하단에 동일한 부분을 확대하여 배치하였다. 그림 3의 (b), (c), (d)는 ML 추정에서의 시스템 행렬의 성능을 비교하기 위해 $\lambda = 0$ 으로 설정하여 재구성한 결과를 나타낸 것이다. ML의 경우 재구성된 영상을 확대한 부분과 재구성한 영상의 측면도를 나타내는 그림 4(b)를 보면 RTM/SAM/DDM 모두 시스템행렬의 비균일성으로 인한 잡음이 존재하는 것을 확인할 수 있으며, 정성적으로는 유사하게 복원된 것으로 보이나 소프트웨어 모형과의 백분율 오차(percentage error, PE) 측면에서 RTM이 SAM과 DDM에 비해 근소하게 낮은 것을 확인할 수 있다. 그림 3의 (e),

147

그림 4. RTM, SAM, DDM을 적용한 영상재구성 결과의 1차원 측면도: (a) 측면도를 위한 수평선; (b) ML; (c) 제곱 형태의 사전정보를 사용한 MAP; (d) 비제곱 형태의 사전정보를 사용한 MAP.

Fig. 4. Profile plots of reconstructions using RTM, SAM and DDM: (a) Horizontal line for profile plots; (b) ML; (c) MAP with quadratic potential function; (d) MAP with nonquadratic potential function.

(f), (g)는 MAP 추정법을 적용한 결과이며 이 때 적용된 페널티 함수는 식(12)의 제곱형태이고 $\lambda = 0.9 \times 10^3$ 이다. 재구성된 영상의 확대부분을 보면 ML 영상에서 나타난 잡음이 현저히 감소한 것을 확인 할 수 있으나 재구성한 영상의 측면도를 나타내는 그림 4(c)를 보면 영상 내의 미세한 경계 부분의 정보가 소실 된 것을 확인 할 수 있다. 그림 3의 (h), (i), (j)도 역시 MAP 추정 법을 적용한 결과이나 이 때 적용된 페널티 함수는 경계보존 기능을 갖는 식(13)의 비제곱 형태이고 $\lambda = 0.1 \times 10^6$, $\alpha = 0.7 \times 10^{-4}$ 이다. 재구성된 영상을 보면 ML의 경우에 나타난 인공부산물의 발생이 현저히 감소될 뿐만 아니라 재구성한 영상의 측면도를 나타내는 그림 4(c)에서 제곱형태의 사전정보를 사용한 그림 4(d)에 비해 경계 주변의 과평활 현상이 급격히 감소된 것을 확인할 수 있다.

표 2는 ML의 경우에 세 가지 유형의 시스템 행렬에 따라 PE_{roi} 및 STD_{roi} 의 값들을 요약한 것이다. 이 경우 경계에 걸쳐 설정된 모든 ROI에서 RTM의 PE_{roi} 가 가장 낮으므로 RTM이 SAM과 DDM에 비해 복잡한 경계를 상대적으로 우수하게 복원하는 것을 확인할 수 있다. 그러나 영상 내의 평활한 부분에 설정된 ROI를 비교해보면 SAM이 PE_{roi} 와 STD_{roi} 측면에서 평활한 부분을 가장 정확하게 복원하는 것을 확인할 수 있는데, 이는 SAM에서 방사선을 일정 두께를 갖는 띠 모양으로 모델링하는데 기인한 것으로 판단된다.

표 3은 제곱형태의 사전정보를 사용한 MAP ($\lambda = 0.9 \times 10^3$) 영상재구성에서의 PE_{roi} 및 STD_{roi} 를 나타낸 것인데, 이 경우에도 경계보존 기능이 없는 제곱 사전정보를 사용함에도 불구하고 RTM이 SAM 또는 DDM에 비해 복잡한 경계를 상대적으로 잘 복원하였다. 한편, 평활한 부분에서는

SAM이 RTM과 DDM에 비해 우수하게 복원하며, 표 1에 서와 마찬가지로 DDM의 성능은 RTM과 SAM의 중간을 유지하는 것을 확인할 수 있다.

표 4는 경계보존 기능을 갖는 비제곱 사전정보를 사용한 MAP ($\lambda = 0.1 \times 10^6$, $\alpha = 0.7 \times 10^{-4}$) 영상재구성의 PE_{roi} 및 STD_{roi} 를 나타낸 것인데, 이 경우 RTM은 물체 내의 경계와 평활한 부분에 따라 설정된 모든 ROI에서 우수하게 복원되는 것을 알 수 있다. 이는 MAP에서 평활파라미터 λ 를 적절히 선택할 경우 사전정보가 경계를 제외한 나머지 부분을 강하게 평활화하므로 RTM이 ML 영상재구성에서 평활한 부분을 SAM과 DDM 만큼 제대로 복원하지 못하는 단

표 3. 제곱 형태의 사전정보 함수를 사용한 MAP 영상재구성의 ROI 백분율 오차(PE_{roi}) 및 표준편차(STD_{roi}).

Table 3. Percentage error (PE_{roi}) and standard deviation (STD_{roi}) of ROI in MAP reconstruction using quadratic potential function.

	Region	RTM	SAM	DDM
Edge Region PE(%)	1	16.991	17.834	17.617
	2	18.749	20.043	19.856
	3	19.613	20.080	19.986
	4	20.314	21.274	21.052
	5	12.930	13.404	13.177
	6	21.757	23.064	22.480
	7	7.916	8.660	8.243
	8	8.953	9.509	9.182
Smooth region PE/STD($\times 10^{-3}$)	9	1.254 / 1.461	0.668 / 0.838	0.987 / 1.136
	10	0.510 / 2.343	0.320 / 1.412	0.569 / 2.149

표 4. 비제곱 형태의 사전정보 함수를 사용한 MAP 영상재구성의 ROI 백분율 오차(PE_{roi}) 및 표준편차(STD_{roi}).

Table 4. Percentage error (PE_{roi}) and standard deviation (STD_{roi}) of ROI in MAP reconstruction using non-quadratic potential function.

	Region	RTM	SAM	DDM
Edge Region PE(%)	1	5.736	9.524	7.833
	2	4.300	8.384	6.757
	3	6.416	8.587	7.975
	4	5.779	10.716	9.117
	5	5.736	7.981	6.624
	6	5.286	10.245	8.130
	7	1.118	2.366	1.503
	8	6.720	8.182	7.575
Smooth region PE/ STD($\times 10^{-3}$)	9	0.014 / 0.017	0.021 / 0.028	0.026 / 0.033
	10	0.056 / 0.130	0.063 / 0.166	0.062 / 0.168

표 2. ML 영상재구성에서의 ROI 백분율 오차(PE_{roi}) 및 표준편차(STD_{roi}).

Table 2. Percentage error (PE_{roi}) and standard deviation (STD_{roi}) of ROI in ML reconstruction.

	Region	RTM	SAM	DDM
Edge Region PE(%)	1	9.798	11.237	10.529
	2	9.181	11.735	10.826
	3	9.514	10.119	9.635
	4	9.926	12.923	12.225
	5	7.332	8.048	7.792
	6	10.780	12.508	12.253
	7	4.211	5.801	5.196
	8	5.567	6.284	5.813
Smooth Region PE/ STD($\times 10^{-3}$)	9	3.795 / 4.439	3.133 / 3.667	3.296 / 3.741
	10	2.033 / 7.978	1.734 / 6.920	2.114 / 7.535

점을 극복한 것으로 보인다.

IV. 토 의

TCT를 위한 MBIR에서는 영상재구성에서 필수적 요소인 투사 및 역 투사 연산을 위한 시스템 행렬의 유형별 성능에 따라 재구성된 영상의 정확성이 결정되는 바, 본 연구에서는 시스템행렬 연산을 위한 대표적인 세 가지 유형의 성능에 대하여 비교, 분석하였다. 연산시간 측면에서 비교하면 RTM의 경우 방사선을 단순한 직선으로 모델링하는 반면 SAM과 DDM은 일정한 폭을 갖는 띠 형태로 모델링하므로 RTM이 SAM과 DDM 보다 연산시간이 적게 소요된다. DDM은 SAM을 근사 화하여 연산시간을 단축한 방법이나 RTM 보다는 연산속도가 상대적으로 느리다. 표 1의 실험결과에 의하면 RTM을 기준으로 한 상대적인 연산시간은 ML의 경우 SAM이 약 1.71배, DDM이 약 1.62배, QD 사전정보를 사용한 MAP의 경우 SAM이 약 1.39배, DDM이 약 1.37배, NQ 사전정보를 사용한 MAP의 경우 SAM이 약 1.2배, DDM이 1.17배 정도 소요되었다. 그러나 이러한 차이는 LUT 방법을 사용할 경우 무시할 수 있을 정도로 감소하게 되므로 본 논문에서 세 가지 방법의 성능을 비교함에 있어서 연산속도 측면은 제외하고 재구성된 영상의 정확성 측면에서만 비교하였다.

세 가지 유형의 시스템 행렬의 성능을 ML과 MAP (QD/NQ) 영상재구성을 통해 복원된 영상의 PE_{roi} 측면에서 비교하였을 때 ML의 경우 RTM이 SAM과 DDM에 비해 복잡한 경계를 더 정확하게 복원하는 것을 확인 하였다. 이는 직선의 방사선이 투사되는 RTM과 달리 일정한 폭을 유지하며 투사되는 SAM과 DDM은 방사선이 일정한 두께를 가지므로 영상 내에 존재하는 경계 부분이 방사선 폭보다 좁은 경우 과 평활화로 인해 좁은 경계와 경계 사이를 정확하게 복원하지 못하기 때문인 것으로 판단된다. 반면 평활한 영역에서 RTM은 시스템행렬의 비균일성으로 인한 잡음이 SAM, DDM에 비해 현저히 많이 발생하는 것을 확인할 수 있었고, SAM이 PE_{roi} 와 STD_{roi} 측면에서 상대적으로 더 정확함을 확인하였다. 이는 RTM이 SAM/DDM과 달리 인접한 두 개의 방사선 사이에 공백이 존재하므로 민감 지도의 표준편차가 다소 크게 나타나고, 이로 인해 RTM은 평활한 영역을 SAM과 DDM 만큼 정확하게 복원하지 못한 것으로 보인다. 제공 형태의 사전정보를 사용한 MAP의 경우에는 ML에서와 마찬가지로 RTM이 SAM과 DDM에 비해 복잡한 경계를 PE_{roi} 측면에서 정확하게 복원하였다. 그러나 이 경우 ML을 통해 재구성한 영상과 정성적으로 비교했을 때 경계 부분의 정보가 소실되어 재구성된 영상의 정확도가 PE 측면에서 감소하였다. 한편, 평활한 영역에서는

SAM이 PE_{roi} 와 STD_{roi} 측면에서 가장 우수하게 복원하였고 이 경우 ML을 통해 재구성한 영상에 비해 평활한 영역에서 나타나는 영상 내 잡음이 감소한 것을 확인 할 수 있었다. 경계보존의 기능을 갖는 비제공 형태의 사전정보를 사용한 MAP의 경우 영상 내의 모든 경계 부분 뿐 아니라 평활한 영역에서도 RTM이 가장 우수하게 복원하는 것을 확인할 수 있었는데, 이는 비제공 형태의 사전정보가 적절한 $\alpha > 0$ 를 사용할 경우 영상내의 경계를 보존하면서도 평활 영역의 잡음을 효율적으로 감소시킬 수 있기 때문인 것으로 판단된다.

결론적으로 TCT를 위한 MBIR 영상재구성에서 ML과 같이 사전정보가 없는 알고리즘을 사용하여 영상을 재구성하는 경우 복원하고자 하는 물체가 주로 복잡한 경계로 이루어진 경우 RTM을 적용하는 것이 효율적이고, 주로 평활한 영역으로 이루어진 경우 SAM과 DDM을 적용하는 것이 효율적이다. 그러나 MAP 추정 법을 사용한 영상재구성에서 경계보존의 기능을 갖는 비제공 형태의 사전정보를 선택할 경우 시스템행렬 연산을 위해 RTM을 사용하면 복원하고자 하는 영상 내의 복잡한 경계를 더욱 정확하게 복원할 뿐만 아니라 영상 내의 평활한 영역도 SAM과 DDM 못지않게 우수하게 복원하는 것으로 평가된다.

Reference

- [1] Gengsheng Lawrence Zeng, *Medical Image Reconstruction: A conceptual Tutorial*, Heidelberg, Dordrecht, London, New York, Springer, 2010.
- [2] Jerrold T. Bushberg, J. Anthony Seibert, Edwin M. Leidholdt, John M. Boone, *The Essential Physics of Medical Imaging*, 2nd Ed., LippincottWilliams & Wilkins, Philadelphia, PA, 2002.
- [3] Thorsten M.Buzug, *Computed Tomography From Photon Statistics to Modern Cone-Beam CT*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2008.
- [4] J. Hsieh, B. Nett, Z. Yu, K. Sauer, J.-B. Thibault, C.Bouman, "Recent Advances in CT Image Reconstruction", *Current Radiology Reports*, vol. 1, no. 1, pp. 39-51, 2013.
- [5] J. Thibault, K. Sauer, C. Bouman, J. Hsieh, "A three-dimensional statistical approach to improved image quality for multi-slice helical CT," *Medical Physics*, vol. 34, no. 11, pp. 4526-44, 2007.
- [6] F. Xu, K. Mueller, "Accelerating popular tomographic reconstruction algorithms on commodity PC graphics hardware," *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol. 52, pp. 654-663, 2005.
- [7] V.-G. Nguyen, S.-J. Lee, and M. N. Lee, "GPU-accelerated 3-D Bayesian image reconstruction from Compton scattered data," *Phys. Med. Biol.*, vol. 56, no. 9, pp. 2817-2836, 2011.
- [8] V.-G. Nguyen and S.-J. Lee, "Graphics processing unit-accelerated iterative tomographic reconstruction with strip-integral system model," *Opt. Eng.*, vol. 51, no. 9, pp. 093203:1-11, 2012.
- [9] R. L. Siddon, "Fast calculation of the exact radiological path

- for a three-dimensional CT array," *Med. Phys.*, vol. 12, no. 2, pp. 252-255, 1985.
- [10] S. C. B. Lo, "Strip and line path integrals with a square pixel matrix: a unified theory for computational CT projections," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 7, no. 4, pp. 355-363, 1988.
- [11] B. De Man and S. Basu, "Distance-driven projection and backprojection in three dimensions," *Phys. Med. Biol.*, vol. 49, pp. 2463-2475, 2004.
- [12] Y. Long, J. A. Fessler, and J. M. Balter, "3D forward and back-projection for X-ray CT using separable footprints," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 29, no. 11, pp. 1839-1850, 2010.
- [13] V.-G. Nguyen, S.-J. Lee, "Graphics Processing Unit-Accelerated Iterative Tomographic Reconstruction with Strip-Integral System Model," *Opt. Eng.*, vol. 51, no. 9, pp. 093203:1-11, Sep. 2012.
- [14] H. Erdögan, J. A. Fessler, "Ordered subsets algorithms for transmission tomography," *Phys. Med. Biol.*, vol. 44, no. 11, pp. 2835-2851, 1999.
- [15] H. M. Hudson, R. S. Larkin, "Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 13, no. 4, pp. 601-609, 1994.
- [16] C. Kamphius and F. J. Beekman, "Accelerated Iterative Transmission CT Reconstruction Using An Ordered Subsets Convex Algorithm," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 17, pp. 1001-1005, 1983.
- [17] S.-J. Lee, "Accelerated Deterministic Annealing Algorithms for Transmission CT Reconstruction Using Ordered Subsets," *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol. 49, no. 5, pp. 2373-2380, Oct. 2002.
- [18] S.-J. Lee, "Performance comparison of convex-nonquadratic priors for Bayesian tomographic reconstruction," *J. Electronic Imaging*, vol. 9, no. 3, pp. 242-250, Jul. 2000.
- [19] D. Kim, D. Pal, J.-B. Thibault, J. A. Fessler, "Accelerating ordered subsets image reconstruction for X-ray CT using spatially nonuniform optimization transfer," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 32, no. 11, pp. 1965-1978, 2013.
- [20] S. Geman, D. E. McClure, "Bayesian Image Analysis: An Application To Single Photon Emission Tomography," In *Proc. Stat. Comp. Sect. of Amer. Stat. Assoc.*, pp. 12-18, 1985.
- [21] H. Erdögan, J. A. Fessler, "Monotonic algorithms for transmission tomography," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 18, no. 9, pp. 801-814, 1999.
- [22] P. J. Huber, *Robust Statistics*. New York: Wiley, 1981.
- [23] K. Lange, "Convergence of EM image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 9, no. 4, pp. 439-446, 1990.
- [24] A. R. De Pierro, "On the Relation Between the ISRA and the EM Algorithm for Positron Emission Tomography," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 12, no. 2, pp. 328-333, June 1993.
- [25] A. R. De Pierro, "A Modified Expectation Maximization Algorithm for Penalized Likelihood Estimation in Emission Tomography," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 14, no. 1, pp. 132-137, Mar. 1993.