특이형상의 위치를 고려한 병렬 기구의 작업공간 최적설계

Workspace Optimal Design of Parallel Mechanisms Reflecting the Singularity Locations

강재구¹, 김희국[†]

Kang Jae Koo¹, Kim Whee-Kuk[†]

Abstract It is well-known that when singularities are located within the workspace of the parallel mechanism (PM), the usefulness of its workspace is significantly deteriorated. To handle this problem, we suggest an optimal design method which leads to more useful and larger workspace of the PM by taking its singularity locations into consideration in design process. Kinematic models of three selected planar PMs, a 5R type PM, a 3-RPR type planar PM, and a 3-RRR type planar PM, are derived via screw theory and their singularity analyses are conducted. Then workspace optimal designs for those three PMs are conducted to verify that the suggested design method leads more useful and larger workspace in which deterioration by singularity is minimal.

Keywords: Optimal Design, Useful Workspace, Parallel Mechanism, Singularity Analysis, Screw Theory, Kinematic Analysis

1. 서론

병렬기구의 작업공간은 고정된 방위각으로 운동판이 도달 할 수 있는 작업공간, 하나의 기준점에서의 도달 가능한 방위 작업 공간, 방위각에 상관없이 운동판이 도달 가능한 작업공간, 운동판이 적어도 하나 이상의 방위각으로 기 설정된 방위각 범위 내로 도달 가능한 작업공간, 운동판이 기 설정된 방위각 범위내의 모든 방위각으로 도달 가능한 작업공간, 그리고 운동판이 임의의 모든 방위각으로 도달 가능한 작업공간 등으로 구분된다.

그리고 이와 같이 정의되는 다양한 형태의 작업공간들에 대해 최적의 작업공간을 확보하기 위한 방법들이 제시되어 왔으며 주요 설계 목표 및 인자들로는 작업공간의 크기, 관절의 제한된 운동구간, 링크들간의 기계적 간섭 등이 고려되었다^[1,2]. 이와 같은 일반적인

작업공간의 최적설계는 Liu, 등 [3]에 의해 2-자유도 PRRRP형 병렬 기구에 대한 설계 방법으로 제시된 바와 같이 병렬기구의 크기에 비하여 상대적으로 넓은 크기의 원하는 우수한 특성을 보유한 작업공간을 확보할 수 있는 병렬기구의 설계인자를 찾는 것을 목표로 하고 있다. 최근에는 직렬기구와 병렬기구의 작업공간의 유용성을 평가하기 위한 방안으로Castelli 등^[4]은 기구의 체적과 형태지수를 지수로서 사용하는 수치해석에 근거한 방법을 제시하였다.

한편, 대부분 병렬 기구의 작업공간 내에 특이형상이 존재하는 경우 그 부근에서 병렬기구의 성능이 급격히 저하되므로 병렬기구의 설계과정에서 작업공간 내에 특이형상이 없도록 설계인자 및 작업공간의 범위를 설정하거나, 여의치 않다면 특이형상을 가능한 작업공간의 바깥부분에 위치하도록 하는 전략을 택하고 있다. 또한, 작업공간의 최적화 방법으로 먼저 특이형상이 고려되지 않은 최적설계를 수행한 후 기구학 등방성 지수 값이 0.01이하인 영역으로 특이형상의 주변영역으로 간주하여 이 영역을 일괄적으로 제외한 공간을

Received : Feb. 20. 2012; Reviewed : Mar. 26. 2012; Accepted : Apr. 17. 2012

※ 이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2011-0010708)

[†] 교신저자 : 고려대학교 제어계측공학과 정교수

¹ 고려대학교 대학원 제어계측공학과 석사과정

작업공간으로 설정하는 방법이 사용되었다^[5-7].

특이형상이 작업공간 내에 위치하는 경우 그 위치에 따라 작업공간의 효용성은 크게 다르게 영향을 받게 되지만 위와 같은 설계 방법들은 작업공간 내 특이형상의 위치에 관한 영향을 반영하지 않고 있다. 그리고 현재까지 병렬 기구의 설계과정에서 특이형상의 위치를 고려하여 보다 효율적인 유용한 작업공간을 확보할 수 있는 최적 설계 방법은 거의 제시된 바가 없다. 최근에 본 연구자들은 병렬기구의 기준점을 임의로 설정한 후 그 기준점을 작업공간의 중앙점으로 가지며 유용한 작업공간을 확보할 수 있는 특이형상의 영향을 고려한 최적 설계 방법을 제시하고 5-R 평면형 병렬기구에 대한 최적 설계를 통하여 제시된 방법의 유효성을 확인하였다^[8].

이러한 연구에 이어 본 논문에서는 첫째, 병렬기구의 기준점이 사전에 주어지지 않은 일반적인 경우에 있어 병렬 기구의 작업공간 내 특이형상의 위치를 반영하여 유용한 최적의 작업공간을 구하는 설계방법을 제시한다. 둘째, 세 개의 평면형 병렬 기구(2자유도 5-R 형 기구, 3 자유도 3-RPR형 기구, 그리고 3자유도 3-RRR형 기구)에 대한 기구학 분석과 특이형상 분석을 스�크류 이론에 근거하여 수행한다. 마지막으로, 세 가지 병렬기구에 대한 일반적인 작업공간 최적설계방법과 본 논문에서 제시된 작업공간 최적설계 방법에 의한 최적 설계 결과들에 대한 비교 분석을 통하여 제시된 설계방법의 유효성을 검증한다.

2. 유용한 작업공간 설계 방법

작업공간의 유용성은 작업공간내의 특이형상이 존재하는 경우 그 위치에 따라 크게 영향을 받게 된다. 따라서, 본 절에서는 병렬기구의 작업공간 최적설계에 특이형상으로 인한 영향을 고려하여 유용한 작업공간 최적설계 결과를 도출할 수 있는 방법을 제시한다. 그 세부 설계 절차는 다음과 같이 요약된다.

첫째, 병렬 기구의 전체 작업공간을 특이형상을 경계로 나누어지는 영역들로 구분한다. 영역을 구분하는 특이형상의 위치는 자코비안의 행렬식 값의 부호가 바뀌는 지점으로 찾는다.

둘째, 특이형상을 경계로 나누어진 각 영역들에 대한 기준점을 설정한다. 여기서 각 영역의 기준점은 해당 영역에 대한 체적중심으로 정의된다.

셋째, 각 영역 내에 존재하는 특이형상에 대해서는 부근의 작업공간에 벌칙을 부여하여 특이형상 부근의 작업공간을 유용하지 않는 영역으로 설정한다. 특이형상에 대한 벌칙의 크기는 각 영역의 기준점으로부터의 특이형상까지의 거리가 커짐 (또는 작아짐)에 따라 벌칙이 적어지도록(또는 커지도록) 설정한다. 특이형상에 부여되는 벌칙함수의 형태는 기준점으로부터 특이형상까지의 거리의 함수로서 다양한 형태를 취할 수 있으나 본 논문에서는 편의상 다음과 같은 단순한 형태의 벌칙함수를 적용하였다:

$$\omega_{sp} = r_s \left(1 - \frac{d_{sp}}{d_{pmax}}\right), \quad (1)$$

여기서 ω_{sp} , d_{pmax} , d_{sp} , 그리고 r_s 은 각각 특이형상의 위치 p_s 에서의 벌칙 값, 벌칙 값이 0 이 되는 위치까지의 거리, 기준점에서 작업 공간 내 임의의 특이형상 위치 p_s 까지의 거리, 그리고 특이형상의 위치 p_s 를 중심으로 하는 다차원 구의 반경을 나타낸다. 편의상, 기준점으로부터 임의의 위치까지의 거리는 다음과 같은 weighted 2-Norm을 사용하였다:

$$d_p = \sqrt{(p_x - x_o)^2 + (p_y - y_o)^2 + h^2(\theta_z - \theta_o)^2}, \quad (2)$$

여기서 (x_o, y_o, θ_o) 와 (p_x, p_y, θ_z) 는 각각 기준점과 위치 p 점의 좌표를 그리고 h 는 병진변위와 회전변위 사이의 가중치를 나타낸다.

넷째, 세 번째 단계에서와 같이 유용하지 않은 작업공간으로 배제된 특이형상 부근의 영역을 제외한 나머지 작업공간에 대해 해당 영역의 기준점으로부터의 영역 내의 해당 위치까지의 거리에 따라 정의된 비용 함수에 근거하여 유용한 작업공간의 크기를 산출한다. 이러한 비용함수는 특이형상 부근의 영역을 제외한 나머지 작업공간내의 모든 부분에 대해 해당 영역의 기준점으로부터의 해당 위치까지의 거리에 따라 정의되는 형태로서 편의상 아래와 같은 함수를 사용하였다:

$$\omega_p = 1 - \frac{d_p}{d_{pmax}}. \quad (3)$$

그림 1. (a) Singularity penalty function, (b) workspace cost function

다섯째, 전체 병렬기구의 유용한 작업공간의 크기는 특이형상에 의해 분리된 모든 각 영역에 대해 유용한 작업공간의 크기를 산출하되 제일 큰 값을 가지는 영역의 값으로 설정하였다.

한편, 위 설계 절차에서 정의된 벌칙함수 및 비용함수들은 그림 1(a)와 그림 1(b)와 같이 기준점에서부터 탐색 범위내의 가장 먼 거리를 나타내는 d_{pmax} 사이에서 목표로 하는 작업 공간형태의 특성을 반영하기 위해 다양한 형태를 취할 수 있으나 해석의 편의상 본 논문에서는 (1)과 (3)와 같이 단순한 직선인 형태로 설정하였다.

3. 병렬기구의 기구학 모델링 및 특이형상 분석

3.1 스크류

스크류는 크게 트위스트(twist)와 렌치(wrench)로 구분되며 트위스트의 경우는 강체의 순간운동 또는 속도를 나타내는 스크류로서 각속도 벡터($\vec{\omega}$)와 회전축 방향의 병진속도 벡터($\vec{v}$)인 두 개의 벡터를 사용하여 다음과 같이 정의된다:

$$\$_T = (\vec{\omega} \quad \vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{v}) = \omega(\hat{\omega} \quad \vec{r} \times \hat{\omega} + h_T \hat{v}) \quad (4)$$

여기서 $\vec{r}$ 은 기준 좌표계로부터 트위스트 축 벡터($\vec{\omega}$)까지의 위치벡터이며 따라서, $\vec{r} \times \vec{\omega}$ 는 회전운동으로 인해 발생하는 병진운동을 나타낸다. 그리고 $h_T = v/\omega$ 는 스크류 축($\hat{\omega}$)을 중심으로 한 회전속도에 대한 회전축 방향으로의 병진속도의 비를 나타내는 트위스트 스크류 피치이다.

관절 운동이 강체의 임의의 위치에서의 운동을 유발시키는 경우 강체에 고정된 임의의 위치의 운동은 그 위치에 설정된 기준 좌표계로 표현되는 관절 축과

기준 좌표계로부터 관절 축까지의 위치벡터로서 표현될 수 있다. 따라서, 회전 관절 트위스트는 관절회전축 방향으로의 병진속도가 없으므로 (즉, 영 피치 $h_T = 0$ 를 가지므로) 다음과 같이 표현된다:

$$\$_T = (\vec{\omega} \quad \vec{r} \times \vec{\omega}) \quad (5)$$

미끄럼 관절 트위스트는 관절회전축에 대한 회전속도가 없으므로(즉, 무한 피치 $h_T = \infty$ 를 가지므로) 다음과 같이 표현된다:

$$\$_T = (\vec{0} \quad \vec{v}) \quad (6)$$

렌치의 경우는 강체의 임의의 위치에 합력과 합력토크를 유발하는 힘 벡터($\vec{f}$)와 토크 벡터($\vec{\tau}$)인 두 개의 벡터를 사용하여 다음과 같이 정의된다:

$$\$_W = (\vec{f} \quad \vec{r} \times \vec{f} + \vec{\tau}) = f(\hat{f} \quad \vec{r} \times \hat{f} + h_W \hat{\tau}) \quad (7)$$

여기서 $\vec{r}$ 은 강체의 임의의 위치에 고정된 기준 좌표계로부터 렌치 축 벡터($\vec{f}$)까지의 위치벡터이며 따라서, $\vec{r} \times \vec{f}$ 는 힘($\vec{f}$)에 의해 발행되는 토크를 나타낸다. 그리고 $h_W = \tau/f$ 는 렌치 스크류 피치로 정의된다.

트위스트와 렌치 사이의 orthogonal product 연산은 다음과 같이 정의되며

$$\begin{aligned} \$_T \circ \$_W &= (\vec{\omega} \quad \vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{v}) \circ (\vec{f} \quad \vec{r} \times \vec{f} + \vec{\tau}) \\ &= \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{f} + \vec{\tau}) + \vec{f} \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{v}), \end{aligned} \quad (8)$$

이 값은 트위스트와 렌치에 의해 행해진 순간 동력을 나타낸다. 특히 이들 순간 동력 값이 0이 되는 트위스트와 렌치는 서로 reciprocal하다고 정의된다.

3.2 5-R 형 평면형 2 자유도 병렬 기구

그림 2는 다섯 개의 회전관절로 이루어진 5절 기구를 나타낸다. 그림 2와 같이 기저 기준 좌표계($\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z}$)는 첫 번째 관절의 중앙 P_1 에 위치하며 출력 좌표계

그림 2. 5-R type 2-DOF planar parallel mechanism

$(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i)$ 는 세 번째 관절의 중앙 $P_3(x, y)$ 에 위치한다고 하자. 그리고 5절 기구는 지면에 고정된 두 개의 회전관절에 의해 구동된다고 하자. 출력 위치가 주어졌을 때 구동 관절의 위치를 구하는 역위치 해석하는 다음과 같이 구해진다. $\Delta P_1 P_2 P_3$ 의 각 변 $\overline{P_1 P_2}$, $\overline{P_2 P_3}$, $\overline{P_1 P_3}$ 의 길이가 각각 l_1 , l_2 , 그리고 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 이므로 코사인법칙을 이용하면 $\angle P_1 P_2 P_3 = \theta_{12} - \pi$ 가 구해지며 $\angle P_3 P_1 P_5 = A \tan 2(y, x)$ 이므로 $\angle P_2 P_1 P_5 = \theta_{21}$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\theta_{12} = A \cos\left(\frac{l_1^2 + x^2 + y^2 - l_2^2}{2l_1\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + A \tan 2(y, x). \quad (9)$$

유사한 방법으로 $\Delta P_5 P_4 P_3$ 로부터 θ_{21} 은 다음과 같이 구해진다.

$$\theta_{21} = A \tan 2(y, x - l_5) - A \cos\left\{\frac{l_4^2 + (x - l_5)^2 + y^2 - l_3^2}{2l_4\sqrt{(x - l_5)^2 + y^2}}\right\}. \quad (10)$$

구동관절 변수벡터 $(\theta_{11}, \theta_{21})$ 가 주어졌을 때 출력 위치를 구하는 정위치 해석하는 다음과 같이 요약된다. $\Delta P_2 P_3 P_4$ 로부터

$$\theta_{11} + \theta_{12} = A \tan(y_{24}, x_{24}) + A \cos\left(\frac{l_2^2 + x_{24}^2 + y_{24}^2 - l_3^2}{2l_2\sqrt{x_{24}^2 + y_{24}^2}}\right), \quad (11)$$

여기서

$$x_2 = l_1 \cos \theta_{11}, \quad y_2 = l_2 \sin \theta_{11}, \quad (12)$$

$$x_4 = l_5 + l_4 \cos \theta_{21}, \quad y_4 = l_4 \sin \theta_{21}, \quad (13)$$

$$x_{24} = x_4 - x_2, \quad y_{24} = y_4 - y_2. \quad (14)$$

따라서, 출력 위치는 아래와 같이 구해진다.

$$x = l_1 c \theta_{11} + l_2 c(\theta_{11} + \theta_{12}), \quad y = l_1 s \theta_{11} + l_2 s(\theta_{11} + \theta_{12}). \quad (15)$$

속도 관계식은 스크류를 이용하여 다음과 같이 구해진다. 편의상 왼쪽($i=1$)과 오른쪽($i=2$) 부속체인은 각각 세 개의 회전관절과 두 개의 회전관절을 포함한다고 하자. 이 때, 왼쪽 부속체인에 속한 관절들에 대한 관절 트위스트는 다음과 같이 표현된다.

$$\$_{11} = (\hat{z} \quad -(\vec{l}_2 + \vec{l}_1) \times \hat{z}), \quad (16)$$

$$\$_{12} = (\hat{z} \quad -\vec{l}_2 \times \hat{z}), \quad (17)$$

$$\$_{13} = (\hat{z} \quad \vec{0}), \quad (18)$$

여기서 트위스트 $\$_{ij}$ 에서 아래첨자는 i 번째 부속체의 j 번째 관절을 나타낸다. 왼쪽 부속체의 첫 번째 관절을 구동관절이라 할 때 이 구동관절을 제외한 나머지 관절들에 reciprocal한 렌치 스크류는 구동관절에 의해 출력 기준좌표계가 위치한 병렬기구의 운동판에 가해지는 힘/토크를 의미하며 아래와 같이 얻어진다.

$$\$_{11}^r = (\vec{l}_2 \quad \vec{0}). \quad (19)$$

한편, 오른쪽 부속체의 두 개의 회전관절에 대한 관절 트위스트는 다음과 같이 표현된다.

$$\$_{21} = (\hat{z} \quad -(\vec{l}_3 + \vec{l}_4) \times \hat{z}), \quad (20)$$

$$\$_{22} = (\hat{z} \quad -\vec{l}_3 \times \hat{z}). \quad (21)$$

오른쪽 부속체의 경우 두 개만의 관절 트위스트를 가지고 있으므로 출력 기준 좌표계의 위치에 다음

과 같은 관절 트위스트로 표현되는 가상 회전관절이 존재한다고 가정한다:

$$\hat{\mathbf{s}}_v = (\hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{0}). \quad (22)$$

가상관절은 나머지 두 개의 실제 관절들과 함께 병렬기구의 출력공간인 평면형 3 자유도 공간을 span하는 조건을 만족하도록 선정하였다. 가상관절이 설정되면 왼쪽 부속체인의 경우와 동일한 방식으로 첫 번째 구동관절을 제외한 나머지 관절들에 대해 reciprocal 한 렌치 스크류는 아래와 같이 구해진다:

$$\mathbf{s}_{21}^r = (\bar{\mathbf{l}}_3 \quad \mathbf{0}). \quad (23)$$

출력점 P 에서의 운동 스크류 $\mathbf{s}_p = (\bar{\omega}_o \quad \bar{v}_o)$ 는 각 부속체인의 관절 트위스트의 합으로 아래와 같이 얻어진다:

$$\mathbf{s}_p = \sum_{j=1}^{N_i} \dot{\theta}_{ij} \hat{\mathbf{s}}_{i,j} \quad \text{for } i=1,2, \quad (24)$$

여기서 부속체인의 관절 수는 각각 $N_1=3$, $N_2=2$ (가상관절을 포함하는 경우 $N_2=3$) 이다. 위 식에 해당 reciprocal 렌치와의 orthogonal product 연산을 수행하면 아래와 같은 병렬기구의 입출력 속도관계식이 얻어진다:

$$[A] \begin{Bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\omega} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \end{Bmatrix}, \quad (25)$$

여기서

$$[A] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11}^r \\ \mathbf{s}_{21}^r \end{bmatrix} \in R^{2 \times 6} \quad (26)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11}^r \circ \mathbf{s}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_{21}^r \circ \mathbf{s}_{21} \end{bmatrix} \in R^{2 \times 2}, \quad (27)$$

$$\mathbf{s}_{11}^r \circ \mathbf{s}_{11} = \dot{\theta}_{11} \bar{\mathbf{l}}_1 \cdot \bar{\mathbf{l}}_2 \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (28)$$

그림 3. Singularities of the 5-R planar mechanism : (a) $l_1 \parallel l_2$, (b) $l_2 \parallel l_3$

$$\mathbf{s}_{21}^r \circ \mathbf{s}_{21} = \dot{\theta}_{21} \bar{\mathbf{l}}_4 \cdot \bar{\mathbf{l}}_3 \times \hat{\mathbf{z}}. \quad (29)$$

$[B]=0$ 인 조건으로부터 역기구학 특이형상은 $\hat{l}_1$ 와 $\hat{l}_2$ 가 평행할 때와 $\hat{l}_3$ 와 $\hat{l}_4$ 가 평행할 때 발생된다. 한편, 행렬 $[A]$ 의 두 행이 서로 종속한다는 조건으로부터 정기구학 특이형상은 $\hat{l}_2$ 와 $\hat{l}_3$ 가 평행할 때 발생한다는 사실을 확인할 수 있다. 그림 3(a)와 그림 3(b)는 각각 해당되는 두 개의 링크가 완전히 펼쳐진 경우에 대한 5-R 병렬기구의 역기구학 특이형상과 정기구학 특이형상을 나타낸다. 그림 3(a)와 그림 3(b)에 있어 완전히 펼쳐진 두 개의 링크가 반대로 완전히 겹쳐지는 경우도 역기구학 특이형상과 정기구학 특이형상을 나타냄을 유의하자.

한편, 병렬기구의 기구학 관계식은 평면형 병렬기구의 경우 항상 존재하는 세 개의 구속조건 ($v_z=0$, $\omega_x=0$, $\omega_y=0$)과 $\mathbf{s}_{11}^r$ 과 $\mathbf{s}_{21}^r$ 에서 알 수 있는 바와 같이 회전축방향으로의 토크가 항상 0 ($\tau_x=\tau_y=\tau_z=0$)이므로 (25)는 다음과 같이 축약될 수 있다.

$$[A_u] \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

여기서 행렬 $[A_u] \in R^{2 \times 2}$ 는 행렬 $[A]$ 에서 첫 번째와 두 번째 열로서 구성되는 부속행렬 이다.

3.3 3-RPR 형 평면형 3 자유도 병렬 기구

그림 4는 세 개의 RPR형 부속관절로 구성되는 평면형 3자유도 병렬 기구를 나타낸다. 5-R형 병렬 기구

그림 4. 3-RPR type 3-DOF planar parallel mechanism

와 유사한 방법으로 병렬기구의 운동판의 중앙에 고정된 출력 기준 좌표계에 대한 각 부속체인의 관절 스크류는 아래와 같이 표현된다:

$$\hat{\$}_{i1} = (\hat{z} \quad (\vec{r}_i - \vec{d}_{i2}) \times \hat{z})^T, \quad (31)$$

$$\hat{\$}_{i2} = (\vec{0} \quad \hat{d}_{i2})^T, \quad (32)$$

$$\hat{\$}_{i3} = (\hat{z} \quad \vec{r}_i \times \hat{z})^T. \quad (33)$$

각 부속체인의 두 번째 관절을 구동관절이라 할 때 구동관절을 제외한 나머지 관절들에 대한 reciprocal 스크류는 아래와 같이 구해진다:

$$\hat{\$}_{i2}^r = (\hat{d}_{i2} \quad \vec{r}_i \times \hat{d}_{i2})^T. \quad (34)$$

또한, $\$ _p = \dot{\theta}_{i1} \hat{\$}_{i1} + \dot{d}_{i2} \hat{\$}_{i2} + \dot{\theta}_{i3} \hat{\$}_{i3}$ 로 표현되는 출력점의 운동 스크류에 (34)로 얻어지는 각 부속체인의 reciprocal 렌치 스크류와의 orthogonal product 연산을 수행한 후 이들을 병합하면 다음과 같은 병렬기구의 입출력 속도 관계식이 구해진다:

$$[A] \begin{Bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \dot{d}_{12} \\ \dot{d}_{22} \\ \dot{d}_{32} \end{Bmatrix}, \quad (35)$$

여기서

그림 5. Singularities of the 3-RPR planar mechanism: (a) three active joint axes intersect at a common point, (b) two active joint axes are aligned

$$[A] = \begin{bmatrix} \hat{\$}_{12}^r \\ \hat{\$}_{22}^r \\ \hat{\$}_{32}^r \end{bmatrix} \in R^{3 \times 6}, \quad (36)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \hat{\$}_{12}^r \circ \hat{\$}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\$}_{22}^r \circ \hat{\$}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\$}_{32}^r \circ \hat{\$}_{32} \end{bmatrix} \in R^{3 \times 3}, \quad (37)$$

$$\hat{\$}_{i2}^r \circ \hat{\$}_{i2} = 1, \text{ for } i=1,2,3. \quad (38)$$

$[B] \neq 0$ 이므로 역기구학 특이형상은 존재하지 않지만 행렬 $[A]$ 의 세 개의 열 벡터들이 서로 종속 하다는 조건으로부터 정기구학 특이형상은 $\hat{d}_{i2}$ 를 축으로 가지는 세 개의 선 중 두 개 이상이 겹치거나 세 개의 선이 하나의 공통 교차점을 가지거나 세 개의 선이 모두 평행 경우에 발생된다는 것이 확인된다. 그림 5(a)와 그림 5(b)는 정기구학 특이형상의 예를 보여준다.

3.4 3-RRR 형 평면형 3 자유도 병렬 기구

그림 6은 세 개의 RRR형 부속관절로 구성되는 평면형 3자유도 병렬 기구를 나타낸다. 3-RPR 평면형 병렬기구와 유사한 방법으로 병렬기구의 운동판에 고정된 출력 기준 좌표계에 대한 각 부속체인의 관절 트위스트는 아래와 같이 표현된다:

$$\$_{i1} = (\hat{z} \quad (\vec{r}_i - \vec{l}_{i1} - \vec{l}_{i2}) \times \hat{z}), \quad (39)$$

$$\$_{21} = (\hat{z}_{21} \quad (\vec{r}_2 - \vec{l}_{21} - \vec{l}_{22}) \times \hat{z}_{21}), \quad (40)$$

그림 6. 3-RRR type 3-DOF planar parallel mechanism

$$\mathcal{S}_{31} = (\hat{z}_{31} \quad (\vec{r}_3 - \vec{l}_{31} - \vec{l}_{32}) \times \hat{z}_{31}). \quad (41)$$

각 부속체인의 첫 번째 관절을 구동관절이라 할 때 구동관절을 제외한 나머지 관절들에 대한 reciprocal 렌치 스크류는 아래와 같이 구해진다:

$$\mathcal{S}_{i1} = (\hat{l}_{i2} \quad \vec{r}_i \times \hat{l}_{i2}), \quad (42)$$

또한, $\mathcal{S}_p = \dot{\theta}_{i1} \hat{\mathcal{S}}_{i1} + \dot{\theta}_{i2} \hat{\mathcal{S}}_{i2} + \dot{\theta}_{i3} \hat{\mathcal{S}}_{i3}$ 로 표현되는 출력점의 운동 스크류에 (42)로 표현되는 각 부속체인의 reciprocal 렌치 스크류와의 orthogonal product 연산을 수행한 후 이를 병합하여 행렬로 정리하면 다음과 같은 병렬기구의 입출력 속도 관계식이 구해진다:

$$[A] \begin{Bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \end{Bmatrix}, \quad (43)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{S}}_{11}^r \\ \hat{\mathcal{S}}_{21}^r \\ \hat{\mathcal{S}}_{31}^r \end{bmatrix} \in R^{3 \times 6}, \quad (44)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{S}}_{11}^r \circ \hat{\mathcal{S}}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{S}}_{21}^r \circ \hat{\mathcal{S}}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mathcal{S}}_{31}^r \circ \hat{\mathcal{S}}_{31} \end{bmatrix} \in R^{3 \times 6}, \quad (45)$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{i1}^r \circ \hat{\mathcal{S}}_{i1} = -\vec{l}_{i1} \cdot \hat{l}_{i2} \times \hat{z}. \quad (46)$$

$[B] = 0$ 인 조건으로부터 역기구학 특이형상은 $\hat{l}_{i1}$ 과

(a)

(b)

(c)

그림 7. Singularities of the 3-RRR planar mechanism: (a) a limb is fully folded, (b) a limb is fully stretched, (c) three axes along the second links of three limbs intersect at a common point

$\hat{l}_{i2}$ 가 평행할 때 즉, 임의의 부속체인의 두 개의 링크가 겹쳐지거나 또는 완전히 펼쳐질 때 발생된다. 또한, 정기구학 특이형상은 하나의 선(line)을 나타내는 $[A]$ 의 행들이 서로 종속되는 조건으로부터 $\hat{l}_{i2}$ 를 축으로 가지는 세 개의 선 중 두 개 이상이 겹쳐지거나 세 개의 선이 하나의 공통 교차점을 가지거나 또는 세 개의 선이 모두 평행한 경우에 발생된다는 것이 확인된다. 그림 7(a)와 그림 7(b)는 각각 하나의 부속체인의 두 개 링크가 완전히 겹쳐지거나 펼쳐진 형상으로 역기구학 특이형상을 나타내며 그림 7(c)는 정기구학 특이형상을 나타낸다.

한편, 평면형 병렬기구의 경우 항상 세 개의 구속 조건($v_z = 0, \omega_x = 0, \omega_y = 0$)이 존재하므로 이를 적용하면 병렬기구의 기구학 관계식 (43)은 다음과 같이 표현된다:

$$[A_u] \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \end{Bmatrix}, \quad (47)$$

여기서 $[A_u] \in R^{3 \times 3}$ 는 행렬 $[A]$ 에서 세 번째, 네 번째

그리고 여섯 번째 열을 제외한 나머지 부속행렬을 나타낸다.

4. 병렬기구의 작업공간 최적 설계

본 절에서는 2절에서 제시된 작업공간 최적설계 방법을 3절에서 다룬 세 가지 다른 병렬기구에 적용하였다. 최적설계에서 작업공간을 산출하는 데 있어 병렬기구의 각 부속 체인 내에서는 역기구학 특이형상이 발생되지 않도록 하나의 고정된 부속체인의 형상을 유지한다고 가정하였다. 그리고 편의상 3-RRR형 병렬 기구와 3-RPR형 병렬 기구는 각각 대칭 구조를 가진다고 가정하였다. 즉, 병렬기구는 하판과 상판을 연결하는 동일한 세 개의 부속체인으로 이루어지며 ($l_1 = l_{i1}$, $l_2 = l_{i2}$, for $i=1,2,3$) 하판과 운동판 각각에 각 부속체인이 연결된 위치는 각각 동일한 원주 상에 ($R = R_i$, $r = r_i$, for $i=1,2,3$) 각각 120° 간격으로 위치한다고 설정하였다. 이러한 단순화된 설계인자들에 대해서도 보다 정확한 최적설계를 수행하기 위해서는 상당한 양의 전산하중이 요구된다. 따라서, 편의상 본 논문에서의 수치 모의실험에서는 작업공간의 크기를 적절한 수의 격자형태로 설정하여 근사적인 결과를 도출함으로써 제시된 작업공간 최적화 방법의 유용성을 확인하고자 하였다.

4.1 5-R형 2-자유도 평면형 병렬 기구

그림 2에서와 같이 병렬기구의 설계인자는 다섯 개 링크의 길이 l_i (for $i=1,2,\dots,5$)로 표현된다. 기저 좌표계의 위치는 병렬기구의 왼쪽에 위치한 첫 번째 관절의 중앙에 위치한다고 가정하였다. 그리고 편의상 수치 최적화 과정에서 x 와 y 변위들의 탐색범위는 각각 $(l_5/2)-1 \leq x \leq (l_5/2)+1$ 와 $-1 \leq y \leq 1$ 로 제한하였다. 또한, x, y 각 변위들의 탐색 간격은 전체 탐색범위를 40등분하여 전체 작업공간 탐색 위치의 크기는 40×40 으로 결정하여 모의실험을 수행하였다. 한편, $d_{\max}$ 는 탐색범위내의 가장 멀리 떨어진 두 점 사이의 거리로 정하였다. 표 1은 최적설계를 위한 수치 모의 실험에 적용한 벌칙 값, 설계 제한 조건과 얻어진 최적설계인자, 탐색범위 및 격자간격 및 최적 작업공간의 크기를 나타낸다.

표 1. Numerical simulation conditions and optimized design parameter values for the 5-R 2-Dof planar mechanism

Penalty parameters	$r_s = 0.4$, $d_{\max} = 2.82$,	
Design constraints	$R = 1$, $0.1 \leq l_1 \leq 0.9$, $l_1 = l_4$, $l_2 = l_3$, $0.5 \leq l_5 \leq 1.5$, $l_1 + l_2 = 1$	
Search ranges and Grid size for numerical simulation	$(l_5/2)-1 \leq x \leq (l_5/2)+1$, $-1 \leq y \leq 1$, 40×40	
	normal workspace optimization	singularity-weighted workspace optimization
l_1	0.5	0.51
l_2	0.5	0.49
l_5	0.5	1.02
Workspace	855	472
Singularity-weighted workspace size	143.21	206.23

특히, 표 1에서와 같이 특이형상의 벌칙인자 값이 $r_s = 0.4$ 인 경우는 특이형상에 페널티를 고려한 최적결과와 벌칙을 고려치 않은 정상적인 작업공간 최적결과가 다르게 나타났다 (최적설계인자는 그림 8에서 “X”마크 위치로 표기). 이와 같이 r_s 의 값이 0.35보다 커지게 되면 정상적인 작업공간 최적화 결과는 특이형상을 고려하여 얻어지는 최적화 결과와는 다르게 도출되는 것으로 나타났다. 반대로, r_s 이 값이 0.35보다 적어지게 되면 특이형상의 벌칙 효과를 줄이게 되므로 특이형상을 고려한 작업공간 최적화 결과가 정상적인 작업공간의 최적화 경우와 동일한 결과를 도출하는 것으로 나타났다.

그림 8(a)는 그림 8(b)는 각각 두 개의 설계인자들에 대하여 특이형상을 고려치 않은 경우 작업공간의 크기를 나타내는 등고선 그림과 특이형상을 고려한 경우의 등고선 그림을 나타낸다. 이들 두 경우에 대한 최적 설계인자들의 값은 서로 상이한 것을 확인할 수 있다. 그림 8(a)에서의 등고선 값은 작업공간의 크기를 작업공간 내에 포함된 총 격자점의 수로서 나타낸 것이며 그림 8(b)에서의 등고선 값은 (1)에 정의된 벌칙 함수에 해당하는 특이형상 부근영역을 제외한 나머지 작업공간 내에 포함된 작업공간 격자점들에 대해 (3)에

그림 8. Workspace contour plots of the 5-R planar mechanism:
(a) normal optimization, (b) singularity-weighted optimization

그림 9. Optimized workspace: (a) from normal workspace optimization,
(b) from singularity-weighted workspace optimization

의해 정의되는 유용한 작업공간 가중치를 적용하여 얻어진 값을 나타낸다.

그림 9(a)와 그림 9(b)는 이들 최적 설계인자들에 대한 작업공간을 나타낸다. 그림에서 흑색과 회색 영역은 모두 작업공간으로서 그 경계는 특이형상 궤적을 나타낸다. 특이형상을 고려하지 않은 경우 작업공간의 크기는 매우 크지만 중앙 부분에 특이형상이 존재하여 작업공간의 유용성은 심하게 저하되는 경향이 존재한다. 반면에 특이형상을 고려한 작업공간 최적화의 경우는 전체 작업공간의 크기는 적게 나타났으나 작업공간의 내부에 특이형상이 존재하지 않으므로 그 유용성은 매우 높을 것으로 판단된다.

4.2 3-RPR형 3자유도 평면형 병렬 기구

그림 4에서와 같이 병렬기구의 설계인자는 운동판의 반경 r , 하판의 반경 R , 각 링크의 두 번째 미끄럼 관절의 최소 및 최대 행정범위 $l_{\min}$ 그리고 $l_{\max}$ 로 나타낼 수 있다. 그리고 수치 최적화 과정에서 편의상 r/R 의 탐색범위는 $0.1 \leq r/R \leq 0.8$ 로 제한하였으며 x, y, θ_z 변위들의 탐색범위는 각각 $-1 \leq x, y \leq 1$ 와 $0^\circ \leq \theta_z \leq 360^\circ$ 로 제한하였다. 또한, 각 변위들의 탐색

간격은 전체 탐색범위를 40 등분하여 전체 작업공간 탐색 위치의 크기는 $40 \times 40 \times 40$ 로 결정하여 모의실험을 수행하였다. 이와 같은 탐색 공간 크기 및 간격에 맞추어 (2)에서 정의된 병진변위와 회전변위 사이의 가중치인 h 값은 $1/\pi$ 로 설정하여 사용하였다. 한편, $d_{\max}$ 는 탐색범위내의 가장 멀리 떨어진 두 점 사이의 거리로 정하였다.

표 2는 최적설계를 위한 수치 모의실험에 적용한 벌칙값, 설계 제한 조건, 모의실험시 격자간격, 그리고 구해진 최적설계인자 및 최적 작업공간의 크기를 나타낸다. 그림 10(a)와 그림 10(b)는 각각 두 개의 설계인자들에 대한 특이형상을 고려치 않은 경우와 특이형상을 고려한 작업공간 최적화로부터 얻어진 작업공간 등고선 그림을 나타낸다. 두 개의 결과가 동일한 최적화 결과를 가지는 것을 확인할 수 있다 (최적설계인자는 그림 10에서와 같이 “X” 마크 위치로 표기).

실제로, 그림 11은 최적화된 병렬기구의 작업공간을 보여주는 그림으로 전체의 작업공간이 특이형상에 의해 흑색과 회색인 두 개의 영역으로 구분되는 것을 확인할 수 있다. 따라서, 분리된 각 작업공간의 경계부근에 위치한 특이형상은 작업공간의 유용성을 거의 저하시키지 않으므로 표 2에서와 같이 특이형상을 고려치 않은 작업공간 최적화의 경우와 특이형상을 고려한

표 2. Numerical simulation conditions and optimized design parameter values for the 3-RPR planar mechanism

Penalty parameters	$r_s = 0.4$, $d_{\max} = 3.46$	
Design constraints	$0.1 \leq l_{\min} \leq 1.4$, $0.1 \leq r \leq 0.8$, $l_{\max} - l_{\min} = 1$	
Search ranges and Grid size for numerical simulation	$-1 \leq x, y \leq 1$, $0^\circ \leq \theta_z \leq 360^\circ$, $40 \times 40 \times 40$	
	normal workspace optimization	singularity-weighted workspace optimization
$l_{\min}$	0.56	0.56
$l_{\max}$	1.56	1.56
r	0.1	0.1
Workspace	901	901
Singularity-weighted workspace size	1824	1824

그림 10. Workspace contour plots of the 3-RPR planar mechanism: (a) normal optimization, (b) singularity-weighted optimization

그림 11. Workspace from normal optimization: a) 3-D workspace plot, b) workspace in the $x-\theta_z$ plane when $y=0$

작업공간 최적화의 경우 동일한 최적화 결과를 가지는 것으로 나타났다. 이러한 이유는 본 논문에서 특이형상을 고려치 않은 작업공간 최적화의 경우에도 위와 같이 특이형상에 의해 작업공간이 여러 개로 분리되는 경우 가장 큰 조각의 작업공간을 작업공간으로 설정하였기 때문이다.

4.3 3-RRR형 3자유도 평면형 병렬 기구

그림 6에서와 같이 병렬기구의 설계인자는 운동판의 반경 r , 하판의 반경 R , 각 다리의 첫 번째 링크 길이 l_1 ($l_1 = l_{11} = l_{21} = l_{31}$) 과 두 번째 링크 길이 l_2 ($l_2 = l_{12} = l_{22} = l_{32}$) 로 나타낼 수 있다. $(l_1 + l_2)/R = 1.5$ 인 추가적인 조건을 부여하면 설계인자는 r/R 과 l_1/R 인 두 개의 인자로 축약된다. 그리고 수치 최적화 과정에서 편의상 r/R 의 탐색범위는 $0.1 \leq r/R \leq 0.8$ 로 제한하였으며 x, y, θ_z 변위들의 탐색범위는 각각 $-1 \leq x, y \leq 1$ 와 $0^\circ \leq \theta_z \leq 360^\circ$ 로 제한하였다. 또한, x, y, θ_z 각 변위들의 탐색 간격은 전체 탐색범위를 40 등분하여 전체 작업공간 탐색 위치의 크기는 $40 \times 40 \times 40$ 로 결정하여 모의실험을 수행하였다. 이와 같은 탐색 공간

표 3. Numerical simulation conditions and optimized design parameter values for the 3-RRR planar mechanism

Penalty parameters	$r_s = 0.4$, $d_{\max} = 3.46$	
Design constraints	$R = 1$, $0.1 \leq l_1 \leq 1.4$, $0.1 \leq r \leq 0.8$, $l_1 + l_2 = 1.5$	
Search ranges and Grid size for numerical simulation	$-1 \leq x, y \leq 1$, $0^\circ \leq \theta_z \leq 360^\circ$, $40 \times 40 \times 40$	
	normal workspace optimization	singularity-weighted workspace optimization
l_1	0.74	0.7
l_2	0.76	0.8
r	0.68	0.16
Workspace	814	730
Singularity-weighted workspace size	35.6	307

크기 및 간격에 맞추어 (2)에서 정의된 병진변위와 회전변위 사이의 가중치인 h 값은 $1/\pi$ 로 설정하여 사용하였다.

한편, $d_{\max}$ 는 탐색범위내의 가장 멀리 떨어진 두 점 사이의 거리로 정하였다. 표 3은 최적설계를 위한 수치 모의실험에 적용한 벌칙 값, 설계 제한 조건, 모의실험시 격자간격, 그리고 구해진 최적설계인자 및 최적 작업공간의 크기를 나타낸다.

그림 12(a)로부터 특이형상에 대한 고려되지 않은 작업공간 최적화의 경우 최적 인자는 $l_1 = 0.74$ 와 $r = 0.68$ (그림 12(a)에서 “X” 마크로 표기)로 그리고 그림 12(b)로부터 특이형상을 고려한 작업공간 최적화의 경우 최적인자는 $l_1 = 0.7$ 과 $r = 0.16$ (그림 12(b)에

그림 12. Workspace contour plots of the 3-RRR planar mechanism: (a) normal optimization, (b) singularity-weighted optimization

그림 13. Maximum workspace from normal optimization: a) 3-D workspace plot, b) workspace in the $x-\theta_z$ plane when $y=0$

그림 14. Optimized workspace from singularity-weighted optimization: a) 3-D workspace plot, b) workspace in the $x-\theta_z$ plane when $y=0$

서 “X” 마크 위치)로 얻어졌다.

그림 13과 그림 14는 각각 이들 최적인자들에 대한 병렬기구들의 작업공간을 나타낸다. 이들 그림에서 확인할 수 있는 바와 같이 그림 13의 경우 흑색과 회색으로 표기된 전체 작업공간의 내부에 흑색과 회색의 경계로 표기되는 특이형상이 존재하여 작업공간의 크기는 확보되었지만 작업공간의 유용성이 저하되는 반면 그림 14의 경우 작업공간은 특이형상으로 인하여 흑색과 회색으로 나타난 두 개의 영역으로 나누어졌지만 내부에 특이형상이 없는 유용한 공간이 확보됨을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 특이형상으로 인한 작업공간의 유용성 저하를 최소화하면서 상대적으로 큰 작업공간을 확보할 수 있는 유용한 작업공간 최적 설계 방법을 제시하였다. 이러한 설계방법의 효용성을 검증하기 위하여 세 가지 다른 병렬 기구를 선정한 후 기구학 모델링과 작업공간 내에 존재하는 특이형상에 관한 분석을 스코류 이론에 근거하여 수행하였다. 그리고 제시된 특이형상의 위치를 고려한 최적 설계방법을 통하여 얻어진 세 가지 다른 병렬 기구의 최적 설계 인자를 규명하고

최적화된 병렬 기구의 작업공간을 구하였으며 얻어진 결과와 일반적인 작업공간 최적화로서 얻어진 작업공간과의 비교분석을 수행하였다. 특히, 작업공간 내부에 존재하는 특이형상의 영향이 심각한 3-RRR 형 평면형 3 자유도 병렬 기구의 경우 제시된 작업공간 최적 설계방법에 의해 얻어진 결과가 특이형상을 고려하지 않은 단순한 작업공간 최적화로부터 얻어진 결과에 비하여 보다 유용한 작업공간을 가지는 병렬기구의 설계인자를 도출한다는 사실을 확인할 수 있었다.

향후 연구로는 특이형상의 위치에 따른 벌칙 함수의 형태 및 효과에 관한 분석, 특이형상에 의해 분리된 작업공간 각각의 기준점 선정방법, 기준점으로부터 작업공간 내 임의의 점까지의 거리에 대한 비용 함수 형태 및 효과, 그리고 다양한 다자유도 병렬 기구에 효과적으로 적용할 수 있도록 제시된 최적 설계방법의 개선 등이 있겠다.

참고문헌

- [1] J.P. Merlet, “Parallel robots,” Kluwer academic publications, 2000.
- [2] D.I. Kim, W.K. Chung, and Y. Youm, “Geometrical approach for the workspace of 6-dof parallel manipulators,” IEEE Int'l conf. on robotics and automation, pp.2986-2991, 1997.
- [3] X.J. Liu, J. Wang, and G. Pritschow, “On the optimal kinematic design of the PRRRP 2-Dof parallel mechanism,” *Mechanism and Machine Theory*, 41, 2006, pp.1111-1130.
- [4] G. Castelli, E. Ottaviano, and M. Ceccarelli, “A fairly general algorithm to evaluate workspace characteristics of serial and parallel manipulators,” *Mechanics Based Design Structures and Machines*, Vol.36, pp.14-33, 2008.
- [5] M.Z. Huang and J.L. Thebert, “A study of workspace and singularity characteristics for design of 3-DOF planar parallel robots,” *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol.51, pp.789-797, 2010.
- [6] S.M. Kim, W.K. Kim, and B.J. Yi, “Kinematic Analysis and Optimal Design of a 3T1R Type Parallel Mechanism,” in Proc. IEEE Int. Conf. on

Robotics and Automation, pp.2199-2204, 2009.

- [7] 김성목, 김희국, 이병주, “4-RRPaRR구조의 Schönflies Motion Generator 기구학 특성 분석,” 로봇학회 논문지, Vol.6, No.1, pp.78-85, 2011.
- [8] 강재구, 김희국, “특이형상의 영향을 고려한 메커니즘의 유효 작업공간 설계방법,” 한국정밀공학회 추계학술회의 논문집, pp.217-218, Oct., 2011.

강재구

2007 고려대학교 제어계측공학과 학사

2010~현재 고려대학교 대학원 제어계측공학과 석사과정

관심분야: 로봇 메커니즘 설계, 로봇 기구학 모델링, 모바일 로봇

Email : rkdwprn@gmail.com

김희국

1990 텍사스 주립대학(오스틴 소재) 기계공학과 공학박사

1990~1991 동대학교 Post Doc.

1991~현재 고려대학교 제어계측공학과 교수

관심분야: 로봇 메커니즘 설계, 로봇 기구학 및 동역학 모델링, 모바일 로봇, 의료 로봇

Email : wheekuk@korea.ac.kr