論文

복합좌표계 시스템의 선회동역학에 관한 해석적 연구

석진영*

Analytical Study on the Slewing Dynamics of Hybrid Coordinate Systems

Jinyoung Suk*

ABSTRACT

In this paper, an analytic solution method is proposed to overcome the numerical problems when the slewing dynamics of hybrid coordinate systems is investigated via time finite element analysis. It is shown that the dynamics of the hybrid coordinate systems is governed by the coupled dual differential equations for both slewing and structural modes. Structural modes are transformed into the time-based modal coordinates and analytic spatial propagation equations are derived for each space-dependent time mode. Slew angle history is obtained analytically by appropriate applications of the boundary conditions and structural propagation is re-calculated using the slew angle. Numerical examples are demonstrated to validate the proposed analytic method in comparison to the existing state transition matrix method.

초 록

본 논문에서는 선회모드와 구조모드를 가지는 복합좌표계 시스템의 선회동역학을 시간 유한요소법을 이용하여 전개할 때에 발생하는 수치적 문제점을 극복할 수 있는 해석적 해법을 제안하였다. 시간유한요소법을 이용한 복합좌표계 시스템의 동역학은 선회모드와 구조모드가 서로 연성된 두 개의 행렬미분방정식으로 전개될 수 있음을 보였다. 공간전파관계식을 시간영역 모드좌표계로 변환하고, 각 시간모드에 대한 해석적 공간전파관계식을 유도하였다. 경계조건의 적용을 통해 선회각에 대한 해석적 관계식을 구하였으며, 이를 이용하여 각 모드에 대한 공간 특성치를 구하였다. 수치 예제를 통하여 기존의 상태전이행렬을 이용한 해법과 비교함으로써 제안된 해석적 해법의 타당성을 검증하였다.

Key Words : Hybrid Coordinate Systems(복합좌표계 시스템), Analytic Solution Method (해석적 해법), Time Finite Element Analysis(시간 유한요소법), Slewing Mode(선회모드), Structural Mode(구조모드)

1. 서 론

최근에 국제적 협력으로 국제우주정거장(ISS)의 건설이 꾸준히 진행중이며, 정부에서도 KSR-III 로켓의 성공적 발사에 이어 우주발사체 및 통신기상용 인공위성의 독자개발에 착수하는

등 국내외 우주분야는 괄목할 만한 성장을 거듭하고 있다[1-2]. 국제우주정거장과 같이 최장길이 100m를 넘는 대형 유연우주비행체는 물론, 3축 안정화 인공위성 등에서 볼 수 있는 것처럼 태양전지판을 전개하여 운용하는 우주비행체는 본질적으로 구조적 유연성을 내재하고 있다. 우주비행체의 유연성에 대한 해석기법 및 진동/자세 제어기법이 지난 이십여년 동안 지속적인 연구가 수행되었으며[3-5], 이러한 기반연구를 확장하여 유연한 팔을 가진 로봇의 임무계획 제어 등에 응

† 2003년 3월 26일 접수 ~ 2003년 4월 14일 심사완료

* 정회원, 충남대학교 항공우주공학과

연락처, E-mail : jsuk@cnu.ac.kr

대전광역시 유성구 궁동 220

용하고 있다[6-7]. 복합좌표계 시스템과 같은 분포형 파라미터(distributed parameter) 시스템의 동적 해석을 수행하는 방법으로는 세 가지가 있다. 첫째는 공간이산화 유한요소법을 이용하여 공간영역을 이산화하고, 초기치 문제의 수치적분을 수행하여 시간에 관한 해를 구하는 방법이고[8-10], 둘째는 시간유한요소법에 의해 시간을 고정시키고, 공간전파에 관한 관계식을 풀어 공간에 관한 해를 구하는 방법[11], 그리고 마지막으로 시간과 공간을 모두 이산화하여 경계조건을 이용한 대수방정식을 구성하고 이를 풀어 동적 해석을 수행하는 방법[12]이 있다. 이 중 시간유한요소법에 의해 시간영역을 고정시키고 행렬 미분방정식 형태의 공간전파관계식을 풀으로써 시간과 공간에 대한 동적 해석을 수행하는 방법은 다른 두 방법에 비해 공간에 관한 자유도가 발생하는 것이 두드러진 특징으로, 이를 이용하여 분포형 작동기의 공간에 따른 특성을 최적화하는 작동기 최적화 문제 등 다양한 응용범위를 가지고 있다. 공간전파방정식은 상태천이행렬을 이용하여 구성하게 되며, 경계치 조건을 적용하여 전 구간에 대한 물리적 특성의 전과경향을 파악할 수 있다. 그러나, 상태천이행렬은 구조물의 재료 및 기하학적 특성에 의해 좌우되는 구조물의 유연도에 따라 특이성 문제가 대두될 수 있다. 즉, 공간전파관계식을 전개할 경우에 구조물의 유연도와 상태천이행렬의 역조건수가 일정한 관련성이 있으며, 공간전파시에 발생하는 수치적 문제점은 상태천이행렬의 특이성과 행렬대수연산에서 기인한다. 이러한 문제점에 대해 체계적인 접근법을 시도하려는 노력의 일환으로, 최적화 기법에 의한 리카티 해의 존재성에 대한 연구가 진행중이다. 양단 경계조건을 가지는 단순 유연구조물에 대해 해석적 해법을 적용하여 기하학적/재료 특성으로 인하여 상태천이행렬의 수치적 문제점이 발생하는 경우에 대한 검증을 수행한 바 있다[13].

본 논문에서는 선회모드와 구조모드를 동시에 가지는 복합좌표계 시스템의 동적 해석을 시간유한요소법을 이용하여 수행할 경우에 발생하는 공간전파시의 수치적 문제점을 극복할 수 있는 해석적 해법을 제안하였다. 단순 유연구조물에 대한 동특성 해석을 바탕으로, 선회모드와 구조모드를 모두 가지는 유연우주비행체와 같은 복합좌표계 시스템에 대하여 상태천이행렬의 특이성 및 행렬대수연산과정에 기인하는 공간전파시의 수치적 불안정성을 극복하여 효과적인 동적 해석을 수행할 수 있는 대안으로 해석적 해법에 의한 동적 해석방법을 제시하였다.

II. 복합좌표계 시스템에서의 공간전파관계식

시간유한요소법에 의한 동적 시스템의 해석 기법은 그 동안 동역학, 제어 및 최적화 문제에 다양하게 응용되어 왔다[14-16]. 특히 Hodges 등에 의해 Hamilton's Weak Principle이 정식화되면서 시간유한요소법을 수치적 해석기법으로 전환하여 컴퓨터를 이용한 동역학 및 최적화 문제에 적용되었고[17], 방대한 계산량을 줄이기 위한 노력이 결실을 거두어 발사체의 실시간 궤적최적화 기법에 사용되는 등, 항공우주 분야에 다양하게 적용되고 있다[18].

시간유한요소법을 복합좌표계 시스템의 동역학에 적용하여 행렬 상태공간식이 구성되면, 두 점 경계치 문제를 풀기 위해 상태천이행렬기법이 사용된다. 본 연구에서 고려하는 복합좌표계 시스템은 Fig. 1과 같이 중앙동체와 유연부착물을 가진 1축 선회가능한 운동모델로서 여러 참고문헌에서 제시된 바 있다[4,5,19]. 선회모드와 구조모드를 동시에 가지는 복합좌표계 시스템의 운동방정식은 유연부착물을 오일러-베루누이 보를 가정하여 구조물의 선밀도 ρ , 구조물의 가로방향 변위 $w(x, t)$, 시스템의 선회각 $\theta(t)$, 동적 강성 EL , 중앙동체의 모멘트 J_h 와 선회토크 입력 $u_r(t)$ 를 이용하여 다음과 같이 얻어진다[19].

$$\rho \ddot{w}(x, t) + \rho x \ddot{\theta}(t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (1)$$

$$J_h \ddot{\theta}(t) + 4 \int_r^l \rho x [\ddot{w}(x, t) + x \ddot{\theta}(t)] dx = u_r(t) \quad (2)$$

$$(r < x \leq l)$$

여기서 r 과 l 은 각각 중앙동체의 반지름 및 중앙동체 중심으로부터 유연부착물의 끝단까지의 거리이다. 식(1)-(2)를 시간유한요소법을 이용하여 $w(x, t) = \sum_i \phi_i(t) w_i(x)$ 와 같이 공간이산화하

여 행렬 $\mathbf{M}$ 과 $\mathbf{K}$ 를 구성하면, 구조모드와 선회모드에 관한 두 행렬 미분/적분방정식을 얻을 수 있다.

$$-\mathbf{M} \mathbf{w}(x) - \mathbf{M} \theta x + \mathbf{K} \frac{d^4 \mathbf{w}(x)}{dx^4} = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{J_h + 4\rho(l^3 - r^3)/3}{\rho} \mathbf{M} \theta - 4\mathbf{M} \int_r^l x \mathbf{w}(x) dx = \mathbf{F}_r \quad (4)$$

Fig. 1. Slewing Hybrid Coordinate System

여기서

$$[M]_{ij} = \int_{\Delta t} \rho \dot{\phi}_i(t) \dot{\phi}_j(t) dt$$

$$[K]_{ij} = \int_{\Delta t} EI \phi_i(t) \phi_j(t) dt$$

$$[F_r]_i = \int_{\Delta t} u_r(t) \phi_i(t) dt$$

이고 $\phi_i(t)$ 들은 시간이산화 형상함수들이다. 식 (3)과 (4)로부터 선회모드와 구조모드가 서로 연성되어 있으며, 구조모드 관계식은 중앙동체의 제어 토크에 의한 선회각으로부터 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 유연부착물의 밀도 및 동적강성이 서로 다른 여러개의 부분으로 구성되어 있는 경우에는 각 부분별로 시간이산화 방정식을 구성하고, 각 부분간의 경계조건을 유지함으로써 전체적인 운동방정식을 구할 수 있다. 식(3)은 아래와 같이 상태변수벡터를 정의함으로써 등가의 일차 상태공간방정식으로 변환된다.

$$\frac{d\mathbf{y}(x)}{dx} = A\mathbf{y}(x) + Bx \quad (5)$$

여기서,

$$\mathbf{y}(x) \equiv [w(x) \quad \frac{dw(x)}{dx} \quad M(x) \quad V(x)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ EI \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ EI \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \theta \end{bmatrix}$$

여기서 $\mathbf{I}$, $M(x)$, $V(x)$ 는 각각 시간유한요소법에 의해 구성된 노드의 개수와 동일한 크기의 단위행렬, 유연부착물에 작용하는 모멘트 및 전단력을 나타낸다. 식(5)로 나타내어지는 상태공간식에서 상태천이행렬 $\Psi(x)$ 를 이용하여 상태변수벡터 $\mathbf{y}(x)$ 를 공간에 대해 분포하는 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{y}(x) = \Psi(x, r) \mathbf{y}(r) + \int_r^x \Psi(x, \zeta) B(\theta) \zeta d\zeta \quad (6)$$

여기서 $\Psi(x, x_0)$ 는 공간전파에 관한 상태천이행렬이다. 식(5)는 고유치 해석을 통해 상태공간에서 시스템 행렬의 모달행렬 및 시스템 행렬의 고유치를 대각원소로 가지는 대각행렬을 이용하여 파동영역에서의 방정식으로 변환된다. 양단 경계조건의 초기치 및 종말치를 이용하여 유연부착물의 굽힘모멘트 $M(x)$ 와 전단력 $V(x)$ 에 대해 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M(x=0) \\ V(x=0) \end{bmatrix} = -\Omega_{22}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_3(\theta) \\ \mu_4(\theta) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} w(x=l) \\ \left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x=l} \end{bmatrix} = -\Omega_{12} \Omega_{22}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_3(\theta) \\ \mu_4(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1(\theta) \\ \mu_2(\theta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 Ω_{ij} ($i, j=1, 2$)는 상태천이행렬 $\Psi(x, x_0)$ 를 2×2 부행렬로 나누었을 때의 ij -번째 부행렬이며, $\mu_k(\theta)$, ($k=1, \dots, 4$)는 아래의 식으로 나타내어지는 $\mu(\theta)$ 를 4×1 부벡터로 나누었을 때의 k -번째 부벡터이다.

$$\mu(\theta) = \int_r^x \Psi(x, \zeta) B(\theta) f(\zeta) d\zeta$$

위의 식에서 알 수 있듯이 구조물의 양단에서의 물리적/구조적 특성은 상태천이행렬의 부행렬의 역변환과 행렬대수연산을 통해 구해진다. 식(7)과 (8)에서 행렬 Ω_{22} 는 증대된 상태공간 시스템행렬의 행렬지수식에 의해 구해진 상태천이행렬의 부행렬이다. 상태천이행렬의 판별식 계산에서 전파되는 수치적 오차는 원행렬의 조건수와 관련되어 있다. 즉, 상태천이행렬의 역조건수가 작게 될수록 판별식이 0에 접근하게 되어 특이행렬이 된다. 본 논문에서 고려하는 복합좌표계 시스템에서 유연부착물의 유연도와 특이성과의 관계는 단순 유연구조물과 그 경향이 유사하며, Rest-To-Rest 선회를 고려하기 위한 시간유한요소 설정치에 좌우된다.

III. 공간전파관계식의 해석적 해법

본 절에서는 선회모드와 유연모드를 동시에 가지는 복합좌표계 시스템의 동적해석을 위한 해석적 해를 유도한다. 구조모드에 해석적 기법을 적용하기 위해서는 저차원화된 공간전파 시간모드들에 관해 다루는 것이 효과적이다. 모델을 저차원화하기 위해 식(3)에서 공간에 대한 변위 벡터 $\mathbf{w}(x)$ 를 시간모드에 대한 모드좌표계로 변환한다. 이 때 먼저 각 행렬에 관한 고유치 문제를 푼다.

$$\mathbf{M}\mathbf{Q} = \Lambda\mathbf{K}\mathbf{Q} \quad (9)$$

여기서 모드행렬 $\mathbf{Q}$ 는 $\mathbf{M}$ 과 $\mathbf{K}$ 의 고유벡터로 이루어진 모드행렬이며, Λ 는 고유치들을 대각 원소로 하는 대각행렬이다. $\mathbf{Q}$ 의 각 열벡터는 유연부착물의 시간에 따른 반응을 표현할 수 있는 기저(Basis)가 되며, 유연부착물의 임의의 위치에서의 시간반응은 이러한 열벡터의 선형조합으로 표현된다. 또한 구성된 행렬방정식의 특성으로 인해 위의 고유치 문제를 정규화해서 얻은 각 고유벡터는 차례로 가장 낮은 주파수부터 반응을 묘사하게 된다. 낮은 주파수의 움직임을 포함해서 지정된 모드의 고유벡터까지를 포함한 새로운 모드행렬을 $\mathbf{P}$ 라고 하면, 다음과 같이 모드변환을 수행한다.

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{P}\boldsymbol{\eta}(x) \quad (10)$$

여기서 $\mathbf{P}$ 는 정규화된 행렬이다. 모드변환을 통해 식(3)은 다음과 같이 일반화된 좌표 $\boldsymbol{\eta}_i(x)$ 에 관해 각 시간모드별로 분리된 모델로 변환된다.

$$\frac{d^4\boldsymbol{\eta}_i(x)}{dx^4} = \nu_i^4 \boldsymbol{\eta}_i(x) + \mathbf{x}_{r_i} \boldsymbol{\theta} x \quad (11)$$

$$-\frac{J_{tot}}{\rho} \mathbf{M} \boldsymbol{\theta} - 4\mathbf{M} \sum_i P_i \int_r^l x \boldsymbol{\eta}_i(x) dx = \mathbf{F}_r \quad (12)$$

여기서 $J_{tot} = J_h + \frac{4\rho(l^3 - r^3)}{3}$ 이고, ν_i 는 행

렬 $\{\mathbf{M}, \mathbf{K}\}$ 의 일반화된 고유치의 제곱근이며, $\mathbf{x}_{r_i}$ 는 $\mathbf{P}^T \mathbf{M}$ 의 i 번째 행이다. 식(11)을 상태변수

$$\mathbf{y}_i(x) = \left[\boldsymbol{\eta}_i(x) \quad \frac{d\boldsymbol{\eta}_i(x)}{dx} \quad \frac{d^2\boldsymbol{\eta}_i(x)}{dx^2} \quad \frac{d^3\boldsymbol{\eta}_i(x)}{dx^3} \right]^T$$

를 이용하여 상태공간식으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx} \{ \mathbf{y}_i(x) \} = \mathbf{A}_i \mathbf{y}_i(x) + \mathbf{B}_i x \quad (13)$$

여기서

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \nu_i^4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{x}_{r_i} \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

행렬 $\mathbf{A}_i$ 의 고유치는 $\pm \nu_i$, $\pm j \nu_i$ 이다. 유연부착물의 임의의 위치에서의 상태변수는 다음의 식으로 나타내어진다.

$$\mathbf{y}_i(x) = \boldsymbol{\Psi}_i(x, r) \mathbf{y}_i(r) + \int_r^x \boldsymbol{\Psi}_i(x, \xi) \mathbf{B}_i(\boldsymbol{\theta}) \xi d\xi \quad (14)$$

여기서 상태전이행렬 $\boldsymbol{\Psi}(x, r)$ 는 식(13)의 동차해로부터 케일리 해밀톤의 원리를 이용하여 다음과 같이 해석적으로 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\Psi}_i(x, x_0) = \begin{bmatrix} \alpha_0(x, x_0) & \alpha_1(x, x_0) & \alpha_2(x, x_0) & \alpha_3(x, x_0) \\ \nu_i^4 \alpha_3(x, x_0) & \alpha_0(x, x_0) & \alpha_1(x, x_0) & \alpha_2(x, x_0) \\ \nu_i^4 \alpha_2(x, x_0) & \nu_i^4 \alpha_3(x, x_0) & \alpha_0(x, x_0) & \alpha_1(x, x_0) \\ \nu_i^4 \alpha_1(x, x_0) & \nu_i^4 \alpha_2(x, x_0) & \nu_i^4 \alpha_3(x, x_0) & \alpha_0(x, x_0) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\alpha_0(x, r) = \frac{1}{2} [\cosh \nu_i(x-r) + \cos \nu_i(x-r)] \quad (16)$$

$$\alpha_1(x, r) = \frac{1}{2\nu_i} [\sinh \nu_i(x-r) + \sin \nu_i(x-r)] \quad (17)$$

$$\alpha_2(x, r) = \frac{1}{2\nu_i^2} [\cosh \nu_i(x-r) - \cos \nu_i(x-r)] \quad (18)$$

$$\alpha_3(x, r) = \frac{1}{2\nu_i^3} [\sinh \nu_i(x-r) - \sin \nu_i(x-r)] \quad (19)$$

한편, 유연부착물의 끝단에서의 특성치는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{y}_i(l) = \boldsymbol{\Psi}_i(l, r) \mathbf{y}_i(r) + \int_r^l \boldsymbol{\Psi}_i(l, \xi) \xi d\xi \cdot \mathbf{B}_i(\boldsymbol{\theta}) \quad (20)$$

여기서 구조모드의 상태변수는 행렬 $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ 를 통해 선회모드와 연동되어 있음을 알 수 있다. 경계조건을 대입하면 보의 우측단에서의 특성치는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i_3}(r) \\ \mathbf{y}_{i_4}(r) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{i_{31}}(l, r) & \boldsymbol{\Psi}_{i_{32}}(l, r) \\ \boldsymbol{\Psi}_{i_{41}}(l, r) & \boldsymbol{\Psi}_{i_{42}}(l, r) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{i_3}(l) \\ \boldsymbol{\mu}_{i_4}(l) \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{i_3}(l) \\ \boldsymbol{\mu}_{i_4}(l) \end{bmatrix}$ 는 벡터 $\boldsymbol{\mu}_i$ 의 3번째 및 4번째 원소

를 의미하며 4×1 벡터 $\boldsymbol{\mu}_i$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\mu_i(x) = \int_r^x \Psi_i(x, \zeta) \zeta d\zeta \cdot B_i(\theta) \quad (22)$$

식(20)과 (21)을 이용하면 i 번째 모드좌표의 공간에 따른 변위는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_i(x) = & \frac{1}{\Delta_i(l-r)} \{ \Psi_{i_1}(x, r) \Psi_{i_1}(l, r) \mu_{i_1}(l) \\ & - \Psi_{i_1}(x, 0) \Psi_{i_1}(l, r) \mu_{i_1}(l) - \Psi_{i_1}(x, 0) \Psi_{i_1}(l, r) \mu_{i_1}(l) \\ & + \Psi_{i_1}(x, 0) \Psi_{i_1}(l, r) \mu_{i_1}(l) \} + \mu_{i_1}(x) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 $\Delta_i(x)$ 는 식 (24)로 나타내어지는 상태천이 행렬의 판별식이며, 유연부착물의 길이의 함수이다. 따라서 유연부착물의 길이가 $\Delta_i(x)=0$ 이 되면 공간전파해가 특이성을 가지므로 해가 존재하지 않음을 알 수 있다.

$$\Delta_i(x) = \frac{1}{4} [1 + \cosh^2(\nu_i x) + 2 \cosh(\nu_i x) \times \cos(\nu_i x) - \sinh^2(\nu_i x)] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mu_{i_1}(x) = & \frac{\mathbf{x}_{r_i} \theta}{2\nu_i^3} \int_r^x [\sinh \nu_i(x - \zeta) - \sin \nu_i(x - \zeta)] \zeta d\zeta \\ = & -\frac{\mathbf{x}_{r_i} \theta}{\nu_i^4} x + \frac{\mathbf{x}_{r_i} \theta}{2\nu_i^5} [\sinh \nu_i(x - r) + \sin \nu_i(x - r)] + \frac{\mathbf{x}_{r_i} \theta r}{2\nu_i^4} [\cosh \nu_i(x - r) + \cos \nu_i(x - r)] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mu_{i_1}(l) = & \frac{\mathbf{x}_{r_i} \theta}{2\nu_i} \int_r^l \{ \sinh \nu_i(l - \zeta) + \sin \nu_i(l - \zeta) \} \zeta d\zeta \\ = & \frac{\mathbf{x}_{r_i} \theta}{2\nu_i^3} \{ \nu_i r [\cosh \nu_i(l - r) - \cos \nu_i(l - r)] + [\sinh \nu_i(l - r) - \sin \nu_i(l - r)] \} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mu_{i_1}(l) = & \frac{\mathbf{x}_{r_i} \theta}{2} \int_r^l [\cosh \nu_i(l - \zeta) + \cos \nu_i(l - \zeta)] \zeta d\zeta \\ = & \frac{\mathbf{x}_{r_i} \theta}{2\nu_i^2} \{ \nu_i r [\sinh \nu_i(l - r) - \sin \nu_i(l - r)] - [\cosh \nu_i(l - r) + \cos \nu_i(l - r)] \} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \eta_i(x) = & \mathbf{x}_{r_i} \theta \left\{ c_{i_1} [\sinh \nu_i(x - r) - \sin \nu_i(x - r)] + c_{i_2} [\cosh \nu_i(x - r) - \cos \nu_i(x - r)] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\nu_i^5} [\sinh \nu_i(x - r) + \sin \nu_i(x - r)] + \frac{r}{2\nu_i^4} [\cosh \nu_i(x - r) + \cos \nu_i(x - r)] - \frac{x}{\nu_i^4} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$c_{i_1} = -\frac{\nu_i r [\cosh \nu_i(l - r) \sin \nu_i(l - r) + \sinh \nu_i(l - r) \cos \nu_i(l - r)] + \sinh \nu_i(l - r) \sin \nu_i(l - r)}{4\nu_i^5 [1 + \cosh \nu_i(l - r) \cos \nu_i(l - r)]} \quad (29)$$

$$c_{i_2} = \frac{\nu_i r \sinh \nu_i(l - r) \sin \nu_i(l - r) + [\cosh \nu_i(l - r) \sin \nu_i(l - r) - \sinh \nu_i(l - r) \cos \nu_i(l - r)]}{4\nu_i^5 [1 + \cosh \nu_i(l - r) \cos \nu_i(l - r)]} \quad (30)$$

$$\int_r^l \eta_i(x) x dx = \mathbf{x}_{r_i} \theta \left\{ c_{i_1} \alpha_{i_1} + c_{i_2} \alpha_{i_2} + \frac{\alpha_{i_3}}{2\nu_i^5} + \frac{r\alpha_{i_1}}{2\nu_i^4} - \frac{l^3 - r^3}{3\nu_i^4} \right\} \quad (31)$$

$$\alpha_{i_1} = \frac{l}{\nu_i} [\cosh(l - r) + \cos(l - r)] - \frac{2r}{\nu_i} - \frac{1}{\nu_i} [\sinh(l - r) + \sin(l - r)] \quad (32)$$

$$\alpha_{i_2} = \frac{l}{\nu_i} [\sinh(l - r) - \sin(l - r)] + \frac{1}{\nu_i^2} [2 - \cosh(l - r) - \cos(l - r)] \quad (33)$$

$$\alpha_{i_3} = \frac{l}{\nu_i} [\cosh(l - r) - \cos(l - r)] - \frac{1}{\nu_i^2} [\sinh(l - r) - \sin(l - r)] \quad (34)$$

$$\alpha_{i_4} = \frac{l}{\nu_i} [\sinh(l - r) + \sin(l - r)] - \frac{1}{\nu_i^2} [\cosh(l - r) - \cos(l - r)] \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \theta = & - \left(\frac{J_{tot}}{\rho} I + 4 \sum_i P_i \mathbf{x}_{r_i} \times \right. \\ & \left[- \frac{\nu_i r [\cosh \nu_i(l-r) \sin \nu_i(l-r) + \sinh \nu_i(l-r) \cos \nu_i(l-r)] + \sinh \nu_i(l-r) \sin \nu_i(l-r)}{4\nu_i^5 [1 + \cosh \nu_i(l-r) \cos \nu_i(l-r)]} \times \right. \\ & \frac{l}{\nu_i} [\cosh(l-r) + \cos(l-r)] - \frac{2r}{\nu_i} - \frac{1}{\nu_i} [\sinh(l-r) + \sin(l-r)] + \\ & \left. \frac{\nu_i r \sinh \nu_i(l-r) \sin \nu_i(l-r) + [\cosh \nu_i(l-r) \sin \nu_i(l-r) - \sinh \nu_i(l-r) \cos \nu_i(l-r)]}{4\nu_i^5 [1 + \cosh \nu_i(l-r) \cos \nu_i(l-r)]} \times \right. \\ & \frac{l}{\nu_i} [\sinh(l-r) - \sin(l-r)] + \frac{1}{\nu_i^2} [2 - \cosh(l-r) - \cos(l-r)] + \\ & \left. \frac{1}{2\nu_i^5} \left\{ \frac{l}{\nu_i} [\cosh(l-r) - \cos(l-r)] - \frac{1}{\nu_i^2} [\sinh(l-r) - \sin(l-r)] \right\} + \right. \\ & \left. \left. \frac{r}{2\nu_i^4} \left\{ \frac{l}{\nu_i} [\sinh(l-r) + \sin(l-r)] - \frac{1}{\nu_i^2} [\cosh(l-r) - \cos(l-r)] \right\} - \frac{l^3 - r^3}{3\nu_i^4} \right\} \right)^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}_r \end{aligned} \quad (36)$$

또한 식(23)에서 $\mu_i(x)$ 의 각 항은 식(25)-(27)과 같이 계산된다. 식 (23)의 각 부분을 정리하면 식 (28)로 나타내어지는 해석적인 해를 얻을 수 있다. 식 (28)에서 $\eta_i(x)$ 는 시간에 따른 선회각 벡터 θ 의 함수로 표현되어 있으며, 아직 완결되지 않은 식이다. 선회각은 또한 구조모드의 영향 및 입력 토오크의 함수로 결정되며, 선회각에 대한 해석적 해를 구하기 위해서는 식(12)의 적분을 수행해야 한다. 적분식은 식(31)과 같이 해석적으로 나타낼 수 있다. 식(31)에서 각각의 성분들은 식(29)-(30), (31)-(35)와 같이 계산된다. 식(31)과 (11)로부터 선회각은 식(36)과 같이 표현된다. 식(36)에서 선회각 궤적은 중앙동체에 위치한 제어 토오크의 시간 변화와 유연부착물의 시간전파항의 조합으로 나타남을 알 수 있다. 전 선회기간동안의 구조모드의 움직임은 일반화된 고유벡터와 모달변위벡터의 조합으로 식 (28)과 (36)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{w}(x) = \sum_i P_i \eta_i(x) \quad (37)$$

IV. 수치 예제

본 장에서는 복합좌표계 시스템의 동역학에 관한 해석적 해의 타당성을 수치 예제를 통해서 검증하기 위하여 두 개의 복합좌표계 시스템 모델에 대하여 Fig. 1에 표시된 회전축을 중심으로 선회 기동을 수행하였다. Rest-To-Rest 선회기동을 위해 사용된 제어기법은 삼각급수 전개를 통해 최적화된 준최소시간 선회제어기법의 일종으

로[20], 다음과 같은 절차에 의해 선회최적화를 수행한다. 먼저 복합좌표계 시스템의 관성 특성과 목표 선회각 자료를 이용하여 다음과 같이 삼각급수전개를 통해 계수들을 최적화한다.

$$u_r(t) = \sum_{i=1}^N a_i \sin\left(\frac{2\pi i t}{t_f}\right) \quad (38)$$

여기서 t_f 는 가정된 최소시간 선회시의 최종선회 시간이며, N 은 사용된 삼각함수의 개수이다. 복합좌표계 시스템의 선회기동 및 선회종료후의 잔여 진동에너지 및 제어토오크의 최대값을 최소화 하면서 동시에 시간 t_f 에서의 선회목표각을 만족시키기 위하여 다음과 같이 성능지수 및 구속조건을 해석적으로 설정하였다.

$$J = \sum_{i=1}^3 J_i \quad (39)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \beta_1 \int_0^{t_f} \sum_{n=0}^m (\omega_n^2 \xi_n^2 + \xi_n^2) dt \\ J_2 &= \beta_2 \sum_{n=0}^m (\omega_n^2 \xi_n^2 + \xi_n^2) |_{t_f} \\ J_3 &= \beta_3 \left\{ \frac{u_{\max}^2 (1-\delta) t_f}{2} + \frac{t_f}{4} \sum_{i=1}^N a_i^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{\max} t_f}{\pi} \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{i} (\cos \pi i - \cos \delta \pi i) \right\} \\ \theta_f &= \frac{1}{J_{tot}} \sum_{i=1}^N \left(\frac{a_i}{2\pi i} \right) t_f^2 \end{aligned} \quad (40)$$

여기서 ω_n , ξ_n , $u_{\max}$, δ 는 각각 복합좌표계 시스템의 n -번째 고유진동수, n -번째 모드좌표, 최

Table 1. Configuration Parameters of the Hybrid Coordinate Systems

Parameter	Value	Units
hub radius	0.20	m
rotary inertia of hub	1.2732	kg/m ³
mass density of appendage	2800	kg/m ³
Young's Modulus of appendage	7.5842×10^{10}	N/m ²
thickness of appendage	0.0020	m
width of appendage	0.0635	m
length of appendage	0.8100	m

소시간 선회입력을 유연부착물의 진동을 고려하여 개선한 선회입력의 최대값 및 설계 파라미터를 나타낸다. 본 논문에서 제안한 해석적 해법을 검증하기 위하여 모델 I에 대해 사용된 복합좌표계 시스템의 물성치를 Table 1에 정리하였다. 모델 II의 경우에는 모델 I에 비해 유연부착물의 길이를 6m로 늘렸으며, 이에 따라 증가된 유연도를 고려할 수 있도록 이차 형상함수로 나타내어지는 시간유한요소의 개수를 83개에서 140개로 증가시켰다. 각각의 모델에 대해 최적화 계수를 Table 2에 나타내었다.

모델 I의 시스템에 대해 60°의 Rest-To-Rest 선회기동을 수행한 결과를 각각 Figs. 2-3에 나타내었다. 기존의 상태천이행렬법을 이용하여 구한 시간반응과 해석적 해를 이용하여 구한 시간반응이 일치함을 알 수 있다. 본 예제에서는 상태천이행렬 및 시간유한요소 설정치가 수치적인 문제점을 발생하지 않는 경우이다. 따라서 상태천이행렬법을 사용한 경우와 해석적인 해를 이용한 결과가 서로 같다.

모델 II의 예제에서 유연부착물의 유연도를 고려하여 선회최종시간을 20초로 정하여 20°의 Rest-To-Rest 선회기동반응을 살펴보았다. Figs. 4-6에서 알 수 있는 바와 같이 선회모드의 결과는 두 기법 모두 정확한 해를 나타내고 있다. 하지만 구조모드에서 상태천이행렬법을 이용한 수치결과는 발산하는 반면, 해석적인 해를 이용한 결과는 정확한 해를 제시한다. 해석적 해에서는 각 공간영역에서의 특성치들의 값이 누적되어 전파되지 않으므로 상태천이행렬법과 같이 발산하지 않고 수렴하게 된다. Figs. 4-5에서 선회각 궤적이 발산하지 않음에도 구조모드에서 수치적 발산이 먼저 시작되는 것을 알 수 있다. 이는 상태천이행렬을 이용한 해법에서 수치적 문제점이

Table 2. Optimal Torque Shaping Parameters

i	a_i (Model I)	a_i (Model II)
1	1.1180	0.5844
2	-0.0857	0.0873
3	0.2714	-0.0247
4	-0.1437	0.0273
5	0.0731	0.0669
6	-0.1680	0.0009
7	0.0006	-0.0956

Fig. 2. Slew Angle (Model I)

Fig. 3. Tip Displacement (Model I)

상태천이행렬의 특이성과, 상대적으로 공간전파 과정에서 수치적 오차요인이 큰 행렬 및 벡터들과의 대수적연산으로 인해 결정되기 때문이다. 구조물의 유연도나 사용된 시간유한요소 파라미터의 변경으로 상태천이행렬의 특이성이 심화되면 선회각에서도 수치적 문제점이 발생하게 된다.

Fig. 4. Slew Angle (Model II)

Fig. 5. Tip Displacement (Model II)

Fig. 6. 3-D Motion of a Flexible Appendage (Model II, Analytic Method)

V. 결 론

본 논문에서는 초월함수를 이용한 해석적 방법을 통해서 복합좌표계 시스템의 선회동역학을 해석하였다. 본 논문에서는 여러 초월함수 항의 조

합으로 구조모드의 공간전파관계를 유도하였다. 상태천이행렬법을 이용해서 공간전파방정식의 수치해를 구할 경우 구조물의 유연도 및 시간유한 요소 설정치에 따라 역함수 계산 및 대수적 연산에서 수치적 오차가 발생하여 정확한 해를 구할 수 없지만, 해석적 해는 각 공간에서 함수값이 결정되므로 수치오차의 누적이 없으며, 발산하는 항의 상쇄로 인해 일정한 값으로 수렴함을 알 수 있었다. 복합좌표계시스템에 대한 공간전파관계식으로부터 선회각의 함수로 구조모드의 변위를 해석적으로 나타낼 수 있었으며, 구조모드의 변위관계를 다시 선회방정식에 적용하여 선회궤적을 구할 수 있었다. 본 논문에서 제안한 방법은 대형 유연우주비행체와 같은 복합좌표계 시스템의 동적 해석 및 설계에 응용될 수 있으며, 상태천이행렬법에 의한 수치적 문제점을 해결함으로써 분포형 작동기의 분포 형상 최적화 및 중간분리 문제 등에도 적용할 수 있을 것으로 생각된다.

후 기

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2002-003-D00072)

참고문헌

1. T. Heyden, "They're Flying High," *Newsweek*, Vol. 454, Nov 15, 2000.
2. 오춘호, "科技대형과제로 고용창출: 새정부 정책, 기술혁신.성장성에 초점," *한국경제신문*, 2003. 1. 17, pp.A17.
3. T. R. Kane, R. R. Ryan, and A. K. Banerjee, "Dynamics of a Cantilever Beam attached to a Moving Base," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 2, 1987, pp. 139-151.
4. J. D. Turner, and H. M. Chun, "Optimal Distributed Control of a Flexible Spacecraft During a Large-Angle Maneuver," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 7, No. 3, 1984, pp. 257-264.
5. J. L. Junkins, Z. H. Rahman, and H. Bang, Near-Minimum-Time Control of Distributed Parameter Systems: Analytical and Experimental Results, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 14, No. 2, 1991, pp. 406-415.
6. Z-H. Luo, "Direct Strain Feedback Control of Flexible Robot Arms: New Theoretical and

Experimental Results," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 11, 1993, pp.1610-1622

7. M. S. de Querioz, D. M. Dawson, M. Agrawal, and F. Zhang, "Adaptive Nonlinear Boundary Control of a Flexible Link Robot Arm," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 15, No. 4, 1999, pp.779-787.

8. L. Meirovitch, and H. Baruh, "Control of Self-Adjoint Distributed Parameter Systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 1, 1982, pp. 60-66.

9. D. J. Leo, and D. J. Inman, "Pointing Control and Vibration Suppression of a Slewing Flexible Frame," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 17, No. 3, 1994, pp.529-536.

10. D. Wilson, G. Parker, G. Starr, and R. Robinett, "Modeling and Robust Control of a Flexible Manipulator," *Proceedings of 35th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, January 6-10, 1997, Reno, NV, USA.

11. J. Suk, and Y. Kim, "Time Domain Finite Element Analysis of Dynamic Systems," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 7, 1998, pp. 1312-1319.

12. L. J. Hou and D. A. Peters, "Application of Triangular Space-Time Finite Elements to Problems of Wave Propagation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.173, 1994, pp. 611-632.

13. 석진영, 정은태, 김유단, "유연한 구조물의 공간전파에 관한 해석적 해법," 대한기계학회 논문집 A권, 제25권, 제12호, 2001년, pp. 2040-2047.

14. M. Borri, G. Ghiringhelli, M. Lanz, P. Mantegazza, and T. Merlini, "Dynamic Response of Mechanical Systems by a Weak Hamiltonian Formulation," *Computers and Structures*, Vol. 20, No. 1-3, 1985, pp. 495-508.

15. H. Öz, and E. Adiguzel, "Hamiltons law of Varying Action, Part I: Assumed-Time-Modes Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 179, No. 4, 1995, pp. 697-710.

16. H. Öz, and E. Adiguzel, "Hamiltons law of Varying Action, Part II: Direct Optimal Control of Linear Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 179, No. 4, 1995, pp. 711-724.

17. D. W. Hodges, and R. R. Bless, "Weak Hamiltonian Finite Element Method for Optimal Control Problems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 14, No.1, 1991, pp. 148-156.

18. D. W. Hodges, R. R. Bless, A. J. Calise, and M. Leung, "Finite Element Method for Optimal Guidance of an Advanced Launch Vehicle," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 3, 1992, pp. 664-671.

19. J. Suk, S. Boo, and Y. Kim, "Lyapunov Control Law for Slew Maneuver Using Time Finite Element Analysis," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 1, 2001, pp.87-94.

20. 석진영, 문종윤, 김유단, "유연우주비행체의 선회 및 진동억제를 위한 최적입력 형상화에 관한 연구," 한국항공우주학회지, 제25권, 제6호, 1997, pp.110-123.