論文

상사법칙을 이용한 수직발사 유도탄 추력곡선예측

조성진*, 김을곤*, 안조영*

Thrust Profile Prediction for a Vertical Launching Missile using Similarity Law

Sungjin Cho*, Eulgon Kim* and Jo-Young Ahn*

ABSTRACT

In this paper, a thrust prediction method for a developing vertical launching missile is proposed through considering a verified vertical launching missile(a baseline missile) as a model. In order to predict thrust profile of a developing vertical launching missile, both Similarity law and Pi theory are applied to the model. By comparing prediction results based on the 6-DOF program of a baseline missile with simulation results of a developing vertical launching missile, the proposed method has been indirectly verified.

초 록

본 논문은 검증된 수직발사 유도탄을 모델로 고려하여 개발하려는 수직발사 유도탄의 추력을 예측하는 방법을 제안한다. 개발하려는 수직발사 유도탄의 추력을 예측하기 위해 모델에 상사법칙과 Pi 이론을 적용하였다. 검증된 수직발사 유도탄의 6-DOF 프로그램에 기반한 예측 결과와 개발하려는 수직발사 유도탄의 모의시험 결과를 비교하여 제안된 방법의 타당성을 검증하였다.

Key Words : Missile Design(유도탄 설계), Thrust Profile(추력곡선), Similarity Law(상사법칙)

1. 서 론

배에 장착된 수직발사 시스템은 경사발사 시스템보다 몇 가지 유리한 점이 있다. 첫 번째는 단시간 안에 화력을 집중시킬 수 있다. 즉, 경사발사 시스템은 재장전(reload)전까지 최대 두 개의 유도탄을 동시에 발사할 수 있지만, 수직발사 시스템은 한 개의 저장고(magazine)에 있는 모든 유도탄(이ژی스 체계의 경우 61개 유도탄)을 수 초 안에 발사시킬 수 있다. 두 번째는 수직 발사 시스템은 유도탄을 전방향(omni-directional)으로 발사할 수 있다. 이는 경사발사 시스템의 경우 배의 구조물

간섭으로 인해 설치된 방향으로 유도탄을 발사할 수 있는 것에 비해 수직발사 시스템은 초기 발사시 배의 구조물과의 간섭만 피하면, 유도탄을 전 방향으로 움직일 수 있다. 이러한 장점들이 있음에도 불구하고 수직발사 유도탄은 경사발사 유도탄보다 동일 시간 동안 속도 손실이 큰 단점이 있다[1, 2]. 이는 초기 부스팅(boosting) 비행구간에서 수직발사 유도탄의 피치-오버(pitch-over) 움직임으로 인한 속도 저하(velocity tail-off)현상에 기인한 것이다. 여기서, 속도 저하 현상은 경사발사 유도탄의 추력곡선을 수직발사 유도탄에 그대로 적용할 경우 중력에 의한 항력 효과로 인해 최종 요구 속도에 도달하지 못함을 의미한다. 그러므로 수직발사 유도탄 로켓 모터의 추력의 크기 및 지속시간을 정하는 것은 매우 중요한 문제라고 할 수 있다.

† 2008년 1월 30일 접수 ~ 2008년 11월 24일 심사완료

* 정회원, 국방과학연구소

교신저자, E-mail : sjcho@add.re.kr

대전유성우체국 사서함 35-11호

보통 로켓 모터의 추력은 다음과 같은 절차에 의해 구할 수 있다. 먼저 유도탄 구조 설계 및 초기안정성을 고려한 유도탄 평균 가속도와 요구 조건에 의한 유도탄 최고 도달 속도에 의해 추력 운용시간을 결정한다. 그 후 비추력, 발사 중량이 결정 되면 추진제 중량을 구할 수 있으며, 앞서 구한 운용시간을 이용해 평균 추력을 예측할 수 있다 [3]. 그러나 이러한 기본 설계된 추력은 비행 성능 요구조건을 충족시키기 위한 수정 및 보완의 반복적인 과정이 되풀이 된다[4].

본 논문에서는 이러한 과정 대신 검증된 수직발사 유도탄을 모델(model)로 고려하여(이하 검증된 모델) 앞으로 개발하려는 수직발사 유도탄(이하 개발 프로토타입(prototype))의 추력 프로파일을 상사법칙을 통해 예측하는 방법을 제안한다. 검증된 모델을 사용한 이유는 첫 번째로 검증된 모델과 개발 프로토타입이 기하학적인 유사성을 가지고 있기 때문이다. 즉, 검증된 모델의 길이 대 직경비와 개발 프로토타입의 길이 대 직경비가 거의 동일하다. 두 번째로 검증된 모델과 개발 프로토타입이 운동학적 유사성을 가지고 있다. 즉, 검증된 모델의 최고 요구 속도와 개발 프로토타입의 최고 요구 속도가 동일하다. 마지막으로 수직발사 후 초기 피치-오버 운동하는 추력벡터제어(Thrust Vector Control) 구간이 검증된 모델과 개발 프로토타입에 동일하게 적용된다. 이는 초기 부스팅 비행 구간동안 검증된 모델과 개발 프로토타입에 동일한 제어수단이 적용됨을 의미한다. 이러한 유사성 및 제어수단의 동일성을 이용하여 개발 프로토타입의 추력의 크기 및 지속시간을 예측하는 것이 본 논문의 목적이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장은 본론인데, 2.1절은 상사법칙의 기초로 사용되는 Pi 이론에 대해 설명하고, 2.2절은 문제를 정의하고, 2.3절은 추력곡선예측에 상기 이론을 적용한 방법을 제시하고, 모의시험 결과는 2.4절에 기술하였다. 마지막으로 III장에서는 본 논문에서 언급한 상사법칙을 적용한 추력예측방안의 타당성을 기술하였다.

II. 본 론

2.1 Pi이론과 유사성

Pi 이론이란 모든 물리적인 관계는 기본적인 물리적 파라미터로 구성된 독립적인 무차원화된 양으로 구성된다는 것을 의미한다[5]. 즉, 기본 차원(fundamental dimension)을 이용해 차원 변수들을 무차원 변수들로 바꿀 때, 그 무차원 변

수들을 Pi 항들이라고 일컫는다. 여기서, 기본 차원(혹은 기본적인 물리적 파라미터)은 보통 힘(F), 길이(L), 시간(T)을 의미한다. 다음과 같은 방정식을 고려해보자.

$$F(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0 \quad (1)$$

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-k}) = 0 \quad (2)$$

식 (1)은 n 차원 변수로 이뤄진 방정식이다. 식 (1)을 식 (2)의 형태로 바꿀 수 있는데, 식 (2)는 k 의 기본차원을 제외한 나머지 무차원화된 변수 $\pi_1 \sim \pi_{n-k}$ 로 나타낼 수 있다는 것을 뜻한다. 식 (2)와 같이 무차원화된 양을 구하는 것은 유사성(Similarity)을 이용하여 복잡한 문제들을 해석할 수 있다는 장점이 있다. 예를 들어 두 개의 외팔보 빔(cantilever beam)을 떨어뜨리는 실험을 생각해보자. 두 빔의 차이점은 길이, 폭, 두께이고 재질과 떨어뜨리는 높이도 다르다. 떨어뜨린 후 빔이 휘어진 모양은 기하학적으로 유사하지만 휘어진 길이는 다르다. 그러나 떨어뜨린 높이와 빔의 길이를 무차원화 시켜서 한 평면에 그리면 두 빔의 무차원 그래프가 동일하다는 것을 알 수 있다. 이를 통해 다음과 같은 유사성을 개념을 도입할 수 있다.

정리 1: 기하학적 유사성과 운동학적 유사성이 만족되면 동역학적 유사성이 만족된다[5].

정리 1을 설명하기 위해서 모델과 프로토타입을 정의하면, 기준이 되는 대상을 모델이라 하고 모델을 통해 예측하려는 대상을 프로토타입이라 한다. 기하학적 유사성은 모델과 프로토타입의 가로, 세로, 높이의 비가 일치함을 의미하고, 운동학적 유사성은 속도와 가속도의 비가 일치함을 의미한다. 동역학적 유사성은 모델과 프로토타입에 작용하는 외력의 비가 일치함을 의미한다.

2.2 문제 설정

본 논문에서는 정리 1과 Pi 이론을 이용하여 추력곡선을 예측하기 위해 다음과 같은 문제를 설정한다. 우선, 기하학적 유사성을 만족시키는 모델과 프로토타입이 존재해야 된다. 그리고, 모델에 작용하는 외력과 이 외력에 의한 모델의 속도와 가속도 등을 알고 있어야 한다. 마지막으로 프로토타입에 요구되는 가속도를 알고 있어야 한다. 앞에서 언급한 세 가지 조건을 만족한다면, 모델의 궤적 및 속도와 동일한 프로토타입의 추력 프로파일을 예측할 수 있다.

다음절에서는 설정된 문제를 바탕으로 수직발사 유도탄 추력을 예측하는 방법을 설명한다.

2.3 추력곡선예측

이미 검증된 수직발사 유도탄을 모델로 고려하고(즉, 검증된 모델), 개발하려는 수직발사 유도탄을 프로토타입(즉, 개발 프로토타입)으로 고려한다. 이렇게 고려할 수 있는 이유는 두 유도탄이 다음과 같은 조건을 만족하기 때문이다.

- 조건 1: 검증된 수직발사 유도탄과 개발하려는 수직발사 유도탄은 기하학적인 유사성을 가지고 있다.
- 조건 2: 개발하려는 수직발사 유도탄은 검증된 수직발사 유도탄과 동일 궤적, 동일 속도를 만족해야 된다. 따라서 운동학적 유사성을 만족시킨다.

조건 1, 2, 정리 1을 통해 검증된 모델과 개발 프로토타입간의 외력의 비가 일치함을 알 수 있으며 이로 인해 개발 프로토타입의 추력을 예측할 수 있다.

각 유도탄의 제원은 다음과 같다.

여기서, m 은 질량, l 은 길이, d 는 직경을 의미한다. 그리고, 하첨자 m 은 검증된 모델을 하첨자 p 는 개발 프로토타입을 의미한다.

유도탄 6-DOF 운동방정식 중 수직면 운동을 표현하는 3-DOF 방정식에서 $l, m, P, u, w, q, \theta, t, \dot{u}$ 을 중요 파라미터로 고려한다. 그 이유는 유도탄 속도 감소의 원인이 주로 피치-오버에 기인하기 때문이다. 한편, 관성모멘트를 고려하지

않은 이유는 유도탄의 형상을 실린더로 가정할 경우 질량과 길이 및 반경으로 관성모멘트를 표현할 수 있으므로 이를 배제하였다. 각 파라미터를 차원, 부호 및 타입으로 나누어 표현하면 다음과 같다.

여기서, L 은 길이, T 는 시간, F 는 힘을 의미하고, x 축, z 축은 몸통좌표계 축을 의미한다. 본 논문에서는 서론에서 언급한 기본 차원과 달리 질량, 길이, x 축 가속도를 기본차원으로 고려한다. 기본차원은 상사법칙에서 매우 중요한 물리량이다. 그 이유는 기본차원을 어떤 물리량으로 정하느냐에 따라 나머지 중요 파라미터들의 무차원양이 결정되기 때문이다. 본 논문에서는 추력에 의해 가장 큰 영향을 받는 x 축 가속도를 기본차원으로 고려하였고, 질량과 길이를 나머지 기본 차원으로 정하였다. 전체 변수가 10개이나 길이 비율 l 과 피치각 θ 은 무차원양이므로 8개의 변수들에서 5개의 Pi 항들을 구할 수 있다. Pi 항들을 구하기 위해서 다음 표와 같이 각 파라미터의 차원을 표시한다.

표 3에서 $m, l, \dot{u}$ 와 F, L, T 으로 구성되는 3×3 단위행렬을 만들기 위해 열(column)간 연산을 수행하면 다음과 같다.

표 4에서 3개의 중요 파라미터와 3개의 차원으로 구성된 3×3 행렬을 단위행렬로 만드는 이유는 차원과 중요파라미터를 1:1 독립적으로 표현하여 나머지 파라미터들을 무차원화 시키기 위함이다. 이 결과로부터 나머지 파라미터의 차원을 모두 0으로 만들면 다음과 같이 5개의 Pi항을 구할 수 있다.

표 3. Pi항 구하는 방법(절차 1)

차원	m	l	$\dot{u}$	P	u	w	q	t
F	1	0	0	1	0	0	0	0
L	-1	1	1	0	1	1	0	0
T	2	0	-2	0	-1	-1	-1	1

표 4. Pi항 구하는 방법 (절차 2)

차원	$m\dot{u}$	l	$\left(\frac{l}{u}\right)^{1/2}$	P	u	w	q	t
F	1	0	0	1	0	0	0	0
L	0	1	0	0	1	1	0	0
T	0	0	1	0	-1	-1	-1	1

표 5. Pi항 구하는 방법(절차 3)

차원	$m\dot{u}$	l	$\left(\frac{l}{u}\right)^{1/2}$	$\frac{P}{m\dot{u}}$	$\frac{u}{l}\left(\frac{l}{u}\right)^{0.5}$	$\frac{w}{l}\left(\frac{l}{u}\right)^{0.5}$	$q\left(\frac{l}{u}\right)^{0.5}$	$t\left(\frac{l}{u}\right)^{0.5}$
F	1	0	0	0	0	0	0	0
L	0	1	0	0	0	0	0	0
T	0	0	1	0	0	0	0	0

표 1. 검증된 모델과 개발 프로토타입

종류	m	l	d
검증된 모델	m_m	l_m	d_m
개발 프로토타입	m_p	l_p	d_p

표 2. 운동을 표현하는 중요 파라미터

설명	부호	차원	타입
길이	l	L	기하학적
길이비율	l'	...	
질량	m	FT^2/L	관성특성
추력	P	F	외력
x축 속도	u	L/T	응답
z축 속도	w	L/T	
피치각속도	q	$1/T$	
피치각	θ	...	
시간	t	T	
x축 가속도	$\dot{u}$	L/T^2	

따라서, Pi항을 구하면 다음과 같다.

$$\pi_1 = l', \pi_2 = \theta, \pi_3 = \frac{P}{m\dot{u}}, \pi_4 = \frac{u}{\sqrt{lu}} \quad (3)$$

$$\pi_5 = \frac{w}{\sqrt{lu}}, \pi_6 = q\sqrt{\frac{l}{u}}, \pi_7 = t\sqrt{\frac{u}{l}}$$

식 (3)의 무차원화된 양을 구하기 위해서 다음과 같은 검증된 모델과 개발 프로토타입의 상사비율인 λ 를 정의한다.

$$\lambda_l = \frac{l_m}{l_p} = \alpha \quad (4)$$

$$\lambda_m = \frac{m_m}{m_p} \approx \frac{\rho_m \pi r_m^2 l_m}{\rho_p \pi r_p^2 l_p} = \frac{(r_m/l_m)^2 l_m^3}{(r_p/l_p)^2 l_p^3} = \lambda_l^3 = \alpha^3 \quad (5)$$

$$\lambda_u = \frac{\dot{u}_m}{\dot{u}_p} = \beta \quad (6)$$

식 (4)에서 α 는 제원에 의해 주어지는 값이고, 식 (6)에서 β 는 가속도 요구조건에 의해 주어지는 값이다. 식 (5)는 식 (4)의 α 로 표현할 수 있는데, 이때 두 유도탄의 형상은 실린더이고, 밀도는 균일하다는 가정 하에 표현하였다. 식 (3)의 $\pi_3 \sim \pi_7$ 을 이용하여 $\lambda_p, \lambda_u, \lambda_w, \lambda_q, \lambda_t$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{P_p}{m_p \dot{u}_p} = \frac{P_m}{m_m \dot{u}_m} \rightarrow \lambda_p = \lambda_m \lambda_u$$

$$\frac{u_p}{(l_p \dot{u}_p)^{0.5}} = \frac{u_m}{(l_m \dot{u}_m)^{0.5}} \rightarrow \lambda_u = (\lambda_l \lambda_u)^{0.5} \quad (7)$$

$$\frac{w_p}{(l_p \dot{u}_p)^{0.5}} = \frac{w_m}{(l_m \dot{u}_m)^{0.5}} \rightarrow \lambda_w = (\lambda_l \lambda_u)^{0.5}$$

$$q_p \left(\frac{l_p}{\dot{u}_p} \right)^{0.5} = q_m \left(\frac{l_m}{\dot{u}_m} \right)^{0.5} \rightarrow \lambda_q = (\lambda_l)^{-0.5} (\lambda_u)^{0.5}$$

$$t_p \left(\frac{\dot{u}_p}{l_p} \right)^{0.5} = t_m \left(\frac{\dot{u}_m}{l_m} \right)^{0.5} \rightarrow \lambda_t = (\lambda_l)^{0.5} (\lambda_u)^{-0.5}$$

따라서 다음과 같은 추력 예측 방법을 도출할 수 있다.

$$\lambda_p = \frac{P_m}{P_p} = \alpha^3 \beta \quad (8)$$

$$\lambda_t = \frac{t_m}{t_p} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{0.5}$$

식 (8)은 추력 프로파일을 구성하는 두 개의 변수인 추력의 크기 및 추력의 지속시간을 상사법칙을 통해 동시에 변경할 수 있음을 의미한다.

2.4 모의시험

상사법칙을 통해 예측한 개발 프로토타입의 추력 프로파일을 검증하기 위해 다음과 같은 방법으로 모의시험을 수행하였다.

우선 그림 1에서 검증된 모델의 추력 프로파일을 이용하여 6-DOF 모의시험 결과를 얻는다. 이 결과들 중 수직면 궤적에 영향을 끼치는 변수들을 모델 결과라고 한다. 두 번째로, 모델 결과를 제안된 상사법칙을 통해 예측 결과를 얻는다. 마지막으로, 제안된 방법을 통해 얻은 개발 프로토타입의 추력 프로파일을 이용하여 6-DOF 모의시험을 수행하여 모델 결과와 마찬가지로 개발 프로토타입 결과를 얻는다. 이 때 6-DOF 프로그램은 검증된 모델에 개발 프로토타입의 제원을 고려한 프로그램이다. 세 가지 결과인 모델 결과, 예측 결과, 프로토타입 결과 중 예측 결과와 프로토타입 결과를 비교하여 제안된 방법의 타당성을 검증한다. 그리고 모델 결과와 프로토타입 결과를 비교하여 운동학적 유사성이 만족되는지 확인한다.

식 (8)을 통해 개발 프로토타입의 추력을 정하기 위해서, α, β 를 정해야 되는데, α 는 식 (4)에서와 같이 검증된 모델과 개발 프로토타입의 길이의 비율에 의해 결정되고, β 는 검증된 모델과 개발 프로토타입의 x축 가속도에 의해 결정된다. 개발 프로토타입의 x축 가속도가 검증된 모델보다 80% 라는 요구조건을 고려하여 α, β 를 표현하면 다음과 같다.

$$\alpha = 0.824$$

$$\beta = \frac{1}{0.8} \approx \frac{1}{\alpha} \quad (9)$$

식 (9)에서 β 를 α 의 관계식으로 표현한 이유는 계산 편의상 표현한 것이다. 즉, β 를 0.8로 고려하여 구한 λ_p 는 0.7, λ_t 는 0.81이고, 식 (9)에 의해 구한 λ_p 는 0.68, λ_t 는 0.82이다. 이는 대략적으로 λ_p 는 0.7, λ_t 는 0.8로 고려할 수 있다.

그림 1. 모의시험 방법

식 (8), (9)을 이용해 개발 프로토타입의 추력을 예측하면 다음과 같다.

예측된 추력을 이용하여 비행궤적 및 속도를 만족하는지 확인하기 위해 검증된 모델의 상태변수(검증된 수직발사 유도탄의 6-DOF 프로그램을 수행하여 얻은 모의시험 결과)에 식 (6), (7)의 λ_u , λ_w , λ_q 와 $\lambda_x = \lambda_z = \alpha$ 를 이용하여 개발 프로토타입의 상태변수를 예측한 결과와 개발 프로토타입의 상태변수(개발하려는 수직발사 유도탄의 제원 및 예측된 추력을 검증된 수직발사 유도탄의 6-DOF 프로그램에 고려하여 얻은 모의시험 결과)를 비교하였다. 이를 나타낸 그림은 다음과 같다.

그림 2. 추력 프로파일
(검증된 모델 vs. 개발 프로토타입)

그림 3. x축 가속도 u

그림 4. x축 속도 u

그림 5. z축 속도 w

그림 6. 마하수

그림 7. 피치각속도 q

그림 6, 9를 통해 마하수와 고도 오차는 6-DOF 모의시험 결과 기준으로 각각 7.8%, 6.3%로 나타났다. 그리고 그림 3, 7, 8, 10을 통해 가속도 오차는 2.8%, 각속도 오차는 4.9%, 피치각 오차는 4.6%, 진행방향 거리 오차는 5.9%이다. 6-DOF 모의시험결과 기준으로 검증된 모델을 통해 예측한 결과에 오차가 발생하는 원인은 기존의 중력, 점성력, 관성력 등을 고려한 무차원 함수를 도입하지 않았기 때문인 것으로 추정된다. 반면 이들 항을 포함하면 좀 더 오차는 줄 것으로 기대되나, 해석이 복잡해지고 원래 개념설계에서 간단히 적용하고자 하는 방법에서 벗어난다.

그림 8. 피치각 θ 그림 12. 수직면 궤적
(모델 vs. 프로토타입)

그림 9. 고도

그림 10. 수직면 궤적

그림 11. 마하수(모델 vs. 프로토타입)

한편, 그림 11, 12을 통해 검증된 모델과 개발 프로토타입의 결과를 비교하면, 그림 11의 마하수는 그림 6을 통해 분석한 결과와 동일한 7.8%이다. 그 이유는 마하수의 상사비율이 1이기 때문이다. 단지 검증된 모델과 개발 프로토타입의 결과가 차이가 많이 나타나는 것처럼 보이는 이유는 서로 다른 시간 스케일로 그려진 두 그래프를 한 개의 그림으로 표현했기 때문이다. 그림 12에서 검증된 모델의 수직면 궤적과 개발 프로토타입의 수직면 궤적이 거의 동일하다. 단지, 최종 고도가 10%이상 차이가 나는 이유는 검증된 모델과 개발 프로토타입의 진행거리 및 고도의 상사비율이 1이 아니기 때문이다.

6-DOF 모의시험 결과와 예측된 결과의 비교를 통해 검증된 모델과 개발 프로토타입의 마하수 및 고도는 모두 10%미만의 차이를 보이므로, 예측된 추력이 10% 오차 내에서 속도 및 고도를 만족하는 것을 알 수 있다.

III. 결 론

본 논문에서는 상사법칙과 Pi 이론을 적용하여 수직발사 유도탄의 추력 프로파일을 예측할 수 있는 방법을 제시하였다. 제시된 방법은 비행성능 요구조건을 만족하기 위해 수행하는 수정 및 보완의 반복적인 방법 대신 검증된 수직발사 유도탄의 모의시험 데이터를 이용하여 수직발사 유도탄에 대한 전체 추력의 역적뿐만 아니라 추력의 크기 및 지속시간을 결정한다.

제시된 방법을 검증하기 위해 상사법칙을 통해 얻은 예측 결과와 6-DOF 모의시험 결과를 비교하면, 최종고도 및 속도 오차는 6-DOF 모의시험 결과를 기준으로 각각 7.8%, 6.3%이다. 또한, 가속도 오차는 2.8%, 각속도 오차는 4.9%, 피치각 오차는 4.6%, 진행방향 거리 오차는 5.9%이다. 이는 초기 개념설계 단계에서 공력에 의한 오차가 존재할 수

있는 사항을 감안한다면, 오차 10% 이내는 허용할 만한 수준이다.

결론적으로 추력 프로파일을 반복적인 모의시험 및 설계자의 경험에 전적으로 의존하는 기존의 방법을 상사법칙을 통해 체계적으로 정립한 측면에서 개선된 결과라고 판단한다.

참고문헌

1) R. Solis, "An Analysis of the Vertical Launch Phase of a Missile Concept", AIAA 21st Aerospace Sciences Meeting, Nevada, Jan,

1983, pp. 1~15.

2) John W. Kinnier, "Vertical Launch Up and At'Em", *Surface Warfare*, March, 1980, pp. 17~19.

3) 박찬빈, 안조영, 임완권, 김인철, 고덕곤, 조성진, *전술 유도무기 개념설계 개요*, 국방과학연구소, MADC-516-021114, 2002, pp. 113~121.

4) Eugene L. Fleeman, *Tactical Missile Design*, AIAA, 2001, pp. 1~16.

5) W. E. Baker, P. S. Westine, F. T. Dodge, *Similarity Methods in Engineering Dynamics*, Elsevier, 1991, pp. 1~95.