일반화된 부분강절을 갖는 뼈대구조물의 안정성 및 $P-\Delta$ 해석

민병철*

Min, Byoung Cheol*

Stability and $P-\Delta$ Analysis of Generalized Frames with Movable Semi-Rigid Joints

ABSTRACT

For stability design and $P-\Delta$ analysis of steel frames with semi-rigid connections, the explicit form of the exact tangential stiffness matrix of a generalized semi-rigid frame element having rotational and translational connections is firstly derived using the stability functions. And its elastic and geometric stiffness matrix is consistently obtained by Taylor series expansion. Next depending on connection types of semi-rigidity, the corresponding tangential stiffness matrices are degenerated based on penalty method and static condensation technique. And then numerical procedures for determination of effective buckling lengths of generalized semi-rigid frames members and $P-\Delta$ and shortly addressed. Finally three numerical examples are presented to demonstrate the validity and accuracy of the proposed method. Particularly the minimum braced frames and coupled buckling modes of the corresponding frames are investigated.

Keywords : Semi-rigid, Frame, Buckling, Stability function, Tangent stiffness matrix, Elastic and geometric stiffness matrix

초 록

부재간의 연결조건에 따른 다양하고 복잡한 강구조물의 $P-\Delta$ 해석 및 좌굴 거동특성을 파악하기 위하여, 본 연구에서는 부재의 연결이 회전 및 이동스프링으로 구성된 부분강절(semi-rigid) 뼈대요소의 일반화된 접선강도 행렬을 유도하였고 이로부터 다시 Taylor 전개를 적용하여 탄성 강도 행렬과 기하학적 강도행렬을 일반화된 형태로 제시하였다. 이를 위하여, 보-기둥부재의 좌굴조건을 만족시키는 치짐함수로부터 안정함수(stability function)를 유도하였고, 횡변위(sway)를 고려한 힘-변위관계와 적합조건을 고려하여 엄밀한 부분강절 뼈대요소의 접선강도행렬을 제시하였다. 다양한 수치해석 예제에 대해 타 연구자의 해석 결과 및 본 연구의 선형 및 비선형 해석이론을 통한 좌굴해석 결과를 비교하여 본 연구의 타당성과 부분강절 뼈대구조물의 좌굴거동 특성을 제시하였다.

검색어 : 부분강절, 뼈대구조, 좌굴, 안정함수, 접선강도행렬, 탄성 및 기하학적 강도행렬

1. 서론

일반적으로 뼈대구조의 $P-\Delta$ 및 안정성 해석은 부재의 연결을 강절(rigid) 또는 활절(pinned)로 취급하고 있으나 실제 뼈대 구조물의 부재 간 연결은 부분강절 상태이므로 본 연구에서는 부재 연결부에 회전 및 병진 스프링을 도입하여 구조적 거동이 보다 실제에 가깝도록 이론화하였고 전체적인 시스템 좌굴강도를 파악할 수 있는 엄밀한 접선강도 이론을 제시하였다. 또한 penalty method를 이용한 고유벡터(eigen vector)를 산정하여 좌굴형상을 파악할 수 있도록 하였다. 이 분야에 대한 현재까지의 많은 연구자들은 부재의 연결에

* 정회원·인덕대학교 토목환경설계과 부교수 (Corresponding Author·Associate Professor, Civil&Environmental Eng., Induk University·msilver@induk.ac.kr)

Received September 24 2012, Revised December 27 2012, Accepted January 31 2013

대해 회전만을 제한된 조건하에서 고려하였으며 이를 요약하면 다음과 같다.

Bridge와 Fraser(1987)는 유효좌굴길이 계산을 위한 반복계산법을 제안하였고 Kato(1998)는 부분강절로 연결된 그물망 돔구조의 탄성좌굴 및 소성힌지 조건하에서의 좌굴해석을 수행하였으며 Chen과 Lui(1987, 1991)는 횡변위(sway)가 없는 부분강절 뼈대구조의 k -factor를 설계에 고려하도록 도표를 제시하였다. Goto(1993) 다양한 연결모델을 고려하여 부분강절 뼈대구조의 후좌굴 해석을 수행하였고 Banarjee와 Williams(1994)는 다양한 단면을 갖는 부분강절 뼈대구조의 좌굴강도에 대하여 전단변형효과를 분석하였으며 Essa(1997)은 브레이싱이 없는 다층 뼈대구조에서 기둥의 유효좌굴길이 산정을 위한 설계방법을 제안하였다. Kishi(1997, 1998)는 부분강절 뼈대구조에 대하여 보의 축력을 무시하고 횡방향 지지 및 비지지에 대한 제한적인 엄밀해를 유도하였고 Sekulovic와 Salatic(2001)은 부분강절 뼈대구조의 비선형 해석을 통해 대칭형 부분강절 구조의 좌굴하중을 제시하였으며 Li와 Mativo(2003)는 회전스프링 및 절점에 대한 병진스프링을 갖는 부분강절 뼈대구조의 근사해석방법을 제시하였다. 진만식(2004)은 평면프레임의 좌굴하중 및 유효좌굴계수를 산정하였고 Raftoyannis(2005)는 연립미분방정식을 이용하여 횡방향 지지 및 비지지 조건을 갖는 라멘의 안정성해석을 수행하였으며 Mageirou와 Gantes(2006)는 다양한 형태의 부분강절 및 경계조건에 대하여 등가의 부분강절 상수를 유도하고 이를 다시 개별 부재에 적용함으로써 다층구조에 대한 근사적 해석과 유효좌굴길이를 산정하였다. 이러한 연구 결과 미국의 설계기준 LRFD(1999) 및 유럽 설계기준 Eurocode3(2004)에도 부분강절 설계를 위한 실용 도표가 채택되어 설계에 적용하는 단계에 이르고 있다. 그러나 설계기준에 제시된 제안식은 건물의 내측부 족, 보와 연결된 양쪽 기둥의 회전각이 동일하고 보에 발생하는 축력이 없어야 하는 제한적 범위 내에서만 적용 가능하며 다양한 비대칭성을 갖는 구조물 차원의 시스템 좌굴에 대해서는 적용의 한계가 있는 것으로 판단된다. 결국, 본 연구에서는 현재까지 타 연구자들에 제시된 부분강절 이론의 단점을 보완하고 일반화된 부분강절 해석이론을 제시하기 위하여, 안정함수를 처짐함수로 적용하고 부재간 연결점에 회전 및 병진 스프링을 부분강절로 고려하여 평면 뼈대구조의 접선강도행렬을 유도하였으며 이를 다시 4차항까지의 Taylor 전개를 통해 탄성 및 기하학적 강도행렬로 분리 유도하였다. 제시된 해석이론을 토대로 포트란 언어를 이용한 수치해석 프로그램을 개발하였으며 고유벡터를 이용한 구조물의 좌굴형상을 제시하였고 일반화된 부분강절 뼈대구조의 유효좌굴 길이를 산정하기 위한 $P-\Delta$ 및 시스템좌굴 해석을 다양한 해석 예제를 통해 검토하였다.

2. 축력을 받는 부분강절 뼈대요소

Fig. 1은 양단이 강절로 연결된 평면뼈대구조의 임의 위치에서의 축방향변위와 횡변위가 U_x 와 U_y 일 때 절점변위와 단면력을 나타낸 것으로 U , V , ω , F_1 , F_2 그리고 M 은 각각 축방향 변위, 횡변위, 회전변위, 축력, 전단력 그리고 휨모멘트를 의미한다. 부재의 길이를 L 이라 하면, 절점 변위벡터 및 하중벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{d}_i = \{U^p, V^p, \omega^p, U^q, V^q, \omega^q\}^T \quad (1a)$$

$$\mathbf{f}_i = \{F_1^p, F_2^p, M^p, F_1^q, F_2^q, M^q\}^T \quad (1b)$$

여기서

$$\begin{aligned} U^p &= U(0), U^q = U(L), V^p = V(0), V^q = V(L), \\ \omega^p &= \omega(0), \omega^q = \omega(L) \end{aligned} \quad (2a)$$

그리고

$$\begin{aligned} F_1^p &= -F_1(0), F_1^q = F_1(L), F_2^p = -F_2(0) + PU_y'(L), \\ F_2^q &= F_2(L) - PU_y'(L), M^p = -M(0), M^q = M(L) \end{aligned} \quad (2b)$$

한편, 부재의 탄성계수, 단면2차모멘트 및 단면적을 각각 E , I , A 로 정의하고, 부재의 축력 P 가 일정한 경우에 양단 고정된 뼈대구조의 접선강도행렬 $\mathbf{K}_t^i$ 를 Chen(1987)의 안정함수를 이용하면 다음과 같이 정의된다.

Fig. 1. Nodal displacements and forces of a rigid-rigid frame element under an axial force

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{k}_i^i \cdot \mathbf{d}_i \quad (3)$$

여기서

$$\mathbf{k}_i^i = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2/I \cdot & \cdot & -AL^2 & \cdot & \cdot \\ & 12\phi_1 & 6\phi_2 L & \cdot & -12\phi_1 & 6\phi_2 L \\ & & 4\phi_3 L^2 & \cdot & -6\phi_2 L & 2\phi_4 L^2 \\ & & & AL^2/I \cdot & \cdot & \\ & & & & 12\phi_1 & -6\phi_2 L \\ sym. & & & & & 4\phi_3 L^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

식(3)의 안정함수 ϕ 는 $\beta (=kL = L\sqrt{P/EI})$ 를 이용하여 압축인 경우에 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\beta^3 \sin \beta}{12\phi_c}, \quad \phi_2 = \frac{\beta^2(1 - \cos \beta)}{6\phi_c}, \\ \phi_3 &= \frac{\beta(\sin \beta - \beta \cos \beta)}{4\phi_c}, \quad \phi_4 = \frac{\beta(\beta - \sin \beta)}{2\phi_c}, \\ \phi_c &= 2 - 2\cos \beta - \beta \sin \beta \end{aligned} \quad (5)$$

또한, 접선강도행렬을 탄성강도행렬과 기하학적 강도행렬로 구분하기 위하여 안정함수에 대해 Taylor series의 4째항까지 고려하여 정리하면 다음과 같다.

$$\phi_1 \cong 1 - \frac{\beta^2}{10}, \quad \phi_2 \cong 1 - \frac{\beta^2}{60}, \quad \phi_3 \cong 1 - \frac{\beta^2}{30}, \quad \phi_4 \cong 1 + \frac{\beta^2}{60} \quad (6)$$

한편, 부재가 인장을 받는 경우 식(4)의 구성은 다음과 같고,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\beta^3 \sinh \beta}{12\phi_t}, \quad \phi_2 = \frac{\beta^2(\cosh \beta - 1)}{6\phi_t}, \\ \phi_3 &= \frac{\beta(\beta \cosh \beta - \sinh \beta)}{4\phi_t}, \quad \phi_4 = \frac{\beta(\sinh \beta - \beta)}{2\phi_t}, \\ \phi_t &= 2 - 2\cosh \beta + \beta \sinh \beta \end{aligned} \quad (7)$$

식(6)과 같은 방법으로 식(7)을 정리하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\phi_1 \cong 1 + \frac{\beta^2}{10}, \quad \phi_2 \cong 1 + \frac{\beta^2}{60}, \quad \phi_3 \cong 1 + \frac{\beta^2}{30}, \quad \phi_4 \cong 1 - \frac{\beta^2}{60} \quad (8)$$

식(1)과 식(2) 그리고 $P-\Delta$ 효과를 고려하면 식(4)는 다음과 같은 두 개의 행렬 연산형태로 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i^i &= \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{-1}{L} & \frac{-1}{L} \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4\phi_3 & 2\phi_4 \\ \cdot & 2\phi_4 & 4\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{L} & 1 & \cdot & \frac{-1}{L} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{L} & \cdot & \cdot & \frac{-1}{L} & 1 \end{bmatrix} \\ &\mp \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 안정함수 ϕ_1 과 ϕ_2 는 ϕ_3 과 ϕ_4 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$12\phi_1 = 4(2\phi_3 + \phi_4) - \beta^2, \quad 3\phi_2 = 2\phi_3 + \phi_4 \quad (10a,b)$$

또한, 식(6)과 식(8)을 고려하면 식(4)의 비선형 접선 강도 행렬 $\mathbf{k}_i^i$ 는 탄성강도행렬 $\mathbf{k}_e^i$ 와 기하학적 강도행렬 $\mathbf{k}_g^i$ 로 다음과 같이 분리될 수 있다.

$$\mathbf{k}_i^i \cong \mathbf{k}_e^i - P_i \mathbf{k}_g^i \quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e^i &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2/I \cdot & \cdot & -AL^2/I \cdot & \cdot & \cdot \\ & 12 & 6L & \cdot & -12 & 6L \\ & & 4L^2 & \cdot & -6L & 2L^2 \\ & & & AL^2/I \cdot & \cdot & \\ & & & & 12 & -6L \\ sym. & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{k}_g^i &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 6/5 & L/10 & \cdot & -6/5 & L/10 \\ & & 2L^2/15 & \cdot & -L/10 & -L^2/30 \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & 6/5 & -L/10 \\ sym. & & & & & 2L^2/15 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12a,b)$$

본 연구에서는 부분강절로 연결된 연결강성을 선형탄성 스프링으로 가정하고 연결점의 수평, 수직 및 회전 강성에 대하여 각각 k_H , k_V , k_θ 으로 정의하였으며 이를 요소 길이가 0이고 절점이 2개인 연결강도행렬 $\mathbf{k}_s$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{k}_s = \begin{bmatrix} k_H & \cdot & \cdot & -k_H & \cdot & \cdot \\ & k_V & \cdot & \cdot & -k_V & \cdot \\ & & k_\theta & \cdot & \cdot & -k_\theta \\ & & & k_H & \cdot & \cdot \\ & & & & k_V & \cdot \\ sym. & & & & & k_\theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

결국, 강절(rigid) 요소의 양단에 식(13)의 연결 구조를 갖는 4절점 일반화된 부분강절 뼈대요소의 단면력변위 관계는 강절(F_1, F_2, M) 및 부분강절(f_1, f_2, m) 연결에 대하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{Bmatrix} F_1^p \\ F_2^p \\ M^p \\ f_1^p \\ f_2^p \\ m^p \\ f_1^q \\ f_2^q \\ m^q \\ F_1^q \\ F_2^q \\ M^q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_H^p & \cdot & \cdot & -k_H^p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k_V^p & \cdot & \cdot & -k_V^p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & k_\theta^p & \cdot & \cdot & -k_\theta^p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a+k_H^p & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_1+k_V^p & b_2 & \cdot & -b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_3+k_\theta^p & \cdot & -b_2 & b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a+k_H^q & \cdot & \cdot & -k_H^q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_1+k_V^q & -b_2 & \cdot & -k_V^q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_3+k_\theta^q & \cdot & \cdot & -k_\theta^q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_H^q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_V^q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_\theta^q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^p \\ V^p \\ \omega^p \\ u^p \\ v^p \\ \theta^p \\ u^q \\ v^q \\ \theta^q \\ U^p \\ V^p \\ \omega^p \end{Bmatrix} \quad (14)$$

sym.

여기서

$$a = \frac{EA}{L}, \quad b_1 = \frac{12EI\phi_1}{L^3}, \quad b_2 = \frac{6EI\phi_2}{L^2}, \quad b_3 = \frac{4EI\phi_3}{L}, \quad b_4 = \frac{2EI\phi_4}{L} \quad (15)$$

3. 일반화된 부분강절 뼈대요소

대부분의 부분강절 연결은 2장에서 제시된 일반화된 부분강절요소를 이용하여 효과적으로 모델링될 수 있다. 본 장에서는 식(12)에서 제시된 일반화된 부분강절 요소에 대하여 양단 회전 스프링만 적용한 경우, 양단 횡방향 병진 스프링을 적용한 경우 그리고 왼쪽단에 회전과 횡방향 병진 스프링이 적용된 경우로 분류하여 엄밀한 접선강도행렬과 선형화된 해석이론을 제시하고자 한다.

3.1 양단 회전 스프링을 갖는 부분강절 뼈대요소

Fig. 2와 같이 양단에 회전 스프링만을 갖는 부분강절 뼈대요소는 식(14)에 대하여 수평 및 수직 스프링 값을 Penalty number로 취급함으로써 소거될 수 있으며 결국 다음과 같은 적합 조건을 얻는다.

$$U^p = u^p, \quad V^p = v^p, \quad U^q = u^q, \quad V^q = v^q \quad (16)$$

또한, 2개의 회전 스프링은 p 단과 q 단에 대해 각각 k_θ^p 와 k_θ^q 로 정의되며, ω^p 와 ω^q 는 강절로 연결된 절점의 회전변위이고 θ^p 와

θ^q 는 부분강절로 연결된 절점의 회전변위를 나타내며 식(14)로부터 부분강절 뼈대요소 양단의 내부 모멘트 m^p 와 m^q 는 다음과 같이 얻어진다.

$$m^p = -k_\theta^p \omega^p + \frac{6EI\phi_2}{L^2} V^p + \left(\frac{4EI\phi_3}{L} + k_\theta^p \right) \theta^p - \frac{6EI\phi_2}{L^2} V^q + \frac{2EI\phi_4}{L} \theta^q = 0 \quad (17a)$$

$$m^q = \frac{6EI\phi_2}{L^2} V^p + \frac{2EI\phi_4}{L} \theta^p - \frac{6EI\phi_2}{L^2} V^q + \left(\frac{4EI\phi_3}{L} + k_\theta^q \right) \theta^q - k_\theta^q \omega^q = 0 \quad (17b)$$

Fig. 2. Nodal displacements and forces of a semi-rigid frame element having only rotational springs at both ends

결국, 부분강절 뼈대요소의 내부 회전각 θ^p 와 θ^q 는 다음과 같다.

$$\theta^p = \frac{-6(V^p - V^q)\phi_2(R_\theta^q + 4\phi_3 - 2\phi_4) + L(R_\theta^p R_\theta^q \omega^p + 4\phi_3 R_\theta^p \omega^p - 2\phi_4 R_\theta^q \omega^q)}{D_\theta L} \quad (18a)$$

$$\theta^q = \frac{-6(V^p - V^q)\phi_2(R_\theta^p + 4\phi_3 - 2\phi_4) + L(R_\theta^p R_\theta^q \omega^q + 4\phi_3 R_\theta^q \omega^q - 2\phi_4 R_\theta^p \omega^p)}{D_\theta L} \quad (18b)$$

여기서

$$D_\theta = R_\theta^p R_\theta^q + 4\phi_3(R_\theta^p + R_\theta^q) + (4\phi_3)^2 - (2\phi_4)^2 \quad (19a)$$

$$R_\theta^p = \frac{k_\theta^p L}{EI}, \quad R_\theta^q = \frac{k_\theta^q L}{EI} \quad (19b,c)$$

식(18)을 식(14)에 대입하고 식(16)을 고려하면, 회전스프링으로 연결된 부분강절 뼈대요소의 엄밀한 접선강도행렬이 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$k_{tR}^i = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2/I & \cdot & -AL^2/I & \cdot & \cdot \\ & 12\eta_1 & 6\eta_{2p}L & \cdot & -12\eta_1 & 6\eta_{2q}L \\ & & 4\eta_{3p}L^2 & \cdot & -6\eta_{2p}L & 2\eta_4L^2 \\ & & & AL^2/I & \cdot & \cdot \\ & & & & 12\eta_1 & -6\eta_{2q}L \\ sym. & & & & & 4\eta_{3q}L^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \phi_1 - \frac{3\phi_2^2(R_\theta^q + R_\theta^q + 8\phi_3 - 4\phi_4)}{D_\theta}, \\ \eta_{2p} &= \frac{\phi_2 R_\theta^p(R_\theta^q + 4\phi_3 - 2\phi_4)}{D_\theta}, \\ \eta_{2q} &= \frac{\phi_2 R_\theta^q(R_\theta^p + 4\phi_3 - 2\phi_4)}{D_\theta}, \\ \eta_{3p} &= \frac{R_\theta^p\{3\phi_2(2\phi_3 - \phi_4) + \phi_3 R_\theta^q\}}{D_\theta}, \\ \eta_{3q} &= \frac{R_\theta^q\{3\phi_2(2\phi_3 - \phi_4) + \phi_3 R_\theta^p\}}{D_\theta}, \\ \eta_4 &= \frac{\phi_4 R_\theta^p R_\theta^q}{D_\theta} \end{aligned} \quad (21a-f)$$

식(21)을 식(20)에 대입하고 선형화하면, 비선형 접선강도행렬은 다음과 같이 탄성 강도행렬과 기하학적 강도행렬로 구분되어 정리될 수 있다.

$$k_{tR}^i \cong k_{eR}^i - P_i k_{gR}^i \quad (22)$$

여기서

$$k_{eR}^i = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & \hat{b} & \hat{c}_1 & \cdot & -\hat{b} & \hat{c}_2 \\ & & \hat{d}_1 & \cdot & -\hat{c}_1 & \hat{e} \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ & & & & \hat{b} & -\hat{c}_2 \\ sym. & & & & & \hat{d}_2 \end{bmatrix}, \quad k_{gR}^i = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \tilde{b} & \tilde{c}_1 & \cdot & -\tilde{b} & \tilde{c}_2 \\ & & \tilde{d}_1 & \cdot & -\tilde{c}_1 & \tilde{e} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \tilde{b} & -\tilde{c}_2 \\ sym. & & & & & \tilde{d}_2 \end{bmatrix} \quad (23a,b)$$

그리고

$$\begin{aligned} a &= EA/L, \quad R_\theta^{pq} = R_\theta^p + R_\theta^q, \\ \hat{b} &= \frac{12EI}{L^3} \frac{R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q}{12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q}, \\ \tilde{b} &= \frac{6}{5L} \frac{120 + 16R_\theta^{pq}(R_\theta^{pq} + 5) + R_\theta^p R_\theta^q\{10 + 7R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q\}}{(12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q)^2}, \\ \hat{c}_1 &= \frac{6EI}{L^2} \frac{R_\theta^p(R_\theta^q + 2)}{12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q}, \\ \tilde{c}_1 &= \frac{1}{10} \frac{32(R_\theta^p)^2 + R_\theta^p R_\theta^q\{R_\theta^p R_\theta^q + 4(2R_\theta^p - R_\theta^q - 7)\}}{(12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q)^2}, \\ \hat{c}_2 &= \frac{6EI}{L^2} \frac{R_\theta^q(R_\theta^p + 2)}{12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q}, \\ \tilde{c}_2 &= \frac{1}{10} \frac{32(R_\theta^q)^2 + R_\theta^p R_\theta^q\{R_\theta^p R_\theta^q + 4(2R_\theta^q - R_\theta^p - 7)\}}{(12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q)^2}, \\ \hat{d}_1 &= \frac{4EI}{L} \frac{R_\theta^p(R_\theta^q + 3)}{12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q}, \\ \tilde{d}_1 &= \frac{2L}{15} \frac{(R_\theta^p)^2\{(R_\theta^p)^2 + 9R_\theta^q + 24\}}{(12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q)^2}, \\ \hat{d}_2 &= \frac{4EI}{L} \frac{R_\theta^q(R_\theta^p + 3)}{12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q}, \\ \tilde{d}_2 &= \frac{2L}{15} \frac{(R_\theta^q)^2\{(R_\theta^q)^2 + 9R_\theta^p + 24\}}{(12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q)^2}, \\ \hat{e} &= \frac{2EI}{L} \frac{R_\theta^q R_\theta^p}{12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q}, \\ \tilde{e} &= -\frac{L}{30} \frac{R_\theta^p R_\theta^q\{R_\theta^p R_\theta^q + 12R_\theta^{pq} + 84\}}{(12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q)^2} \end{aligned} \quad (24)$$

식(22)에서 축력 P_i 는 ‘+’ 값이 압축인 요소 i 의 초기 축력을 나타내며 식(23a)는 탄성 강도행렬로서 이전의 연구(민병철 (2011))에서 제시되었으며 식(23b)의 기하학적 강도행렬과 식(20)의 접선강도행렬은 본 연구에서 새롭게 제시되었다.

3.2 양단 병진 스프링을 갖는 부분강절 뼈대요소

Fig. 3은 양단 p 와 q 에 각각 횡방향 병진스프링 k_v^p 와 k_v^q 를 갖는 부분강절 뼈대요소를 나타낸다. 회전 및 수평 스프링이 무한한 값으로 가정하여 식(14)에서 소거하면 다음과 같은 조건식을 얻을 수 있다.

$$U^p = u^p, \quad \omega^p = \theta^p, \quad U^q = u^q, \quad \omega^q = \theta^q \quad (25)$$

내부 횡변위 v^p 와 v^q 를 소거하기 위하여 식(14) 다섯 번째와 여덟 번째 방정식은 아래와 같이 고려된다.

$$f_2^p = -k_v^p V^p + \left(\frac{12EI\phi_1}{L^3} + k_v^p \right) v^p + \frac{6EI\phi_2}{L^2} \omega^p - \frac{12EI\phi_1}{L^3} v^q + \frac{6EI\phi_2}{L^2} \omega^q = 0 \quad (26a)$$

$$f_2^q = -\frac{12EI\phi_1}{L^3} v^p + \frac{6EI\phi_2}{L^2} \omega^p + \left(\frac{12EI\phi_1}{L^3} + k_v^q \right) v^q - \frac{6EI\phi_2}{L^2} \omega^q = 0 \quad (26b)$$

또한, 식(26)을 연립하여 풀면 요소의 양단의 횡방향 변위 v^p 와 v^q 는 다음과 같이 얻어진다.

$$v^p = \frac{12\phi_1(R_v^p V^p + R_v^q V^q) + R_v^q \{R_v^p V^p - 6\phi_2(\omega^p + \omega^q)L\}}{D_v} \quad (27a)$$

(a) Nodal displacement components

(b) Nodal force components

Fig. 3. Nodal displacements and forces of a semi-rigid frame element having only translational springs at both ends

$$v^q = \frac{12\phi_1(R_v^p V^p + R_v^q V^q) + R_v^p \{R_v^q V^q + 6\phi_2(\omega^p + \omega^q)L\}}{D_v} \quad (27b)$$

여기서

$$D_v = R_v^p R_v^q + 12\phi_1(R_v^p + R_v^q) \quad (28a)$$

$$R_v^p = \frac{k_v^p L}{EI}, \quad R_v^q = \frac{k_v^q L}{EI} \quad (28b,c)$$

결국, 양단에 횡방향 병진 스프링을 갖는 부분강절 뼈대요소의 엄밀한 접선강도행렬은 다음과 같이 유도된다.

$$k_{tt}^i = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2/I & \cdot & -AL^2/I & \cdot & \cdot \\ & 12\psi_1 & 6\psi_2 L & \cdot & -12\psi_1 & 6\psi_2 L \\ & 4\psi_3 L^2 & \cdot & -6\psi_2 L & 2\psi_4 L^2 \\ & & AL^2/I & \cdot & \cdot \\ sym. & & & 12\psi_1 & -6\psi_2 L & 4\psi_3 L^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서

$$\psi_1 = \frac{\phi_1 R_v^p R_v^q}{D_v}, \quad \psi_2 = \frac{\phi_2 R_v^p R_v^q}{D_v}, \quad \psi_3 = \phi_3 - \frac{9\phi_2^2(R_v^p + R_v^q)}{D_v}, \quad \psi_4 = \phi_4 - \frac{18\phi_2^2(R_v^p + R_v^q)}{D_v} \quad (30a-d)$$

그리고 식(30)을 선형화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_v^{pq} &= R_v^p + R_v^q, \\ \psi_1 &= \frac{R_v^p R_v^q}{12R_v^{pq} + R_v^p R_v^q} - \frac{\beta^2}{10} \frac{R_v^p (R_v^q)^2}{(12R_v^{pq} + R_v^p R_v^q)^2}, \\ \psi_2 &= \frac{R_v^p R_v^q}{12R_v^{pq} + R_v^p R_v^q} - \frac{\beta^2}{60} \frac{R_v^p R_v^q (R_v^p R_v^q - 60R_v^{pq})}{(12R_v^{pq} + R_v^p R_v^q)^2}, \\ \psi_3 &= \frac{R_v^p R_v^q + 3R_v^{pq}}{12R_v^{pq} + R_v^p R_v^q} - \frac{\beta^2}{30} \frac{(R_v^p R_v^q)^2 + 15R_v^p R_v^q R_v^{pq} + 360(R_v^{pq})^2}{(12R_v^{pq} + R_v^p R_v^q)^2}, \\ \psi_4 &= \frac{R_v^p R_v^q - 6R_v^{pq}}{12R_v^{pq} + R_v^p R_v^q} + \frac{\beta^2}{60} \frac{(R_v^p R_v^q)^2 + 60R_v^p R_v^q R_v^{pq} - 720(R_v^{pq})^2}{(12R_v^{pq} + R_v^p R_v^q)^2} \end{aligned} \quad (31a-e)$$

3.3 좌측 단은 병진 및 회전 스프링을 갖고 우측 단은 강철인 부분강철 뼈대요소

Fig. 4는 길이 L 인 뼈대요소가 좌측 p 단에 회전 스프링 k_θ^p 와 횡방향 스프링 k_v^p 를 갖고 우측 q 단은 강철로 연결된 경우에 대하여 절점변위와 단면력을 나타낸 것이다. 우측 단의 회전 및 병진 스프링을 무한한 값으로 취급하면 Penalty method를 통해 절점 변위 성분을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U^p = u^p, \quad U^q = u^q, \quad V^q = v^q, \quad \omega^q = \theta^q \quad (32)$$

식(32)를 고려하면 식(14)에서 p 단의 전단력과 모멘트는 다음과 같이 얻어진다.

$$f_2^p = -k_v^p V^p + \left(\frac{12EI\phi_1}{L^3} + k_v^p \right) v^p + \frac{6EI\phi_2}{L^2} \omega^p - \frac{12EI\phi_1}{L^3} v^q + \frac{6EI\phi_2}{L^2} \omega^q = 0 \quad (33a)$$

$$m^p = -k_\theta^p \omega^p + \frac{6EI\phi_2}{L^2} v^p + \left(\frac{4EI\phi_3}{L} + k_\theta^p \right) \theta^p - \frac{6EI\phi_2}{L^2} V^q + \frac{2EI\phi_4}{L} \omega^q = 0 \quad (33b)$$

식(30)의 연립방정식을 풀면 스프링이 고려된 횡변위 v^p 와 회전 각 θ^p 가 다음과 같이 얻어진다.

(a) Nodal displacement components

(b) Nodal force components

Fig. 4. Nodal displacements and forces of a semi-rigid frame element having rotational and translational springs at both ends

$$v^p = \frac{-(4\phi_3 V^p + R_\theta^p) R_v^p V^p + (36\phi_2^2 - 48\phi_1\phi_3) V^q - 6(2\phi_1 V^q - L\phi_2\omega^p) R_\theta^p + 6L\phi_2\omega^q (4\phi_3 - 2\phi_4 + R_\theta^p)}{D} \quad (34a)$$

$$\theta^p = \frac{6\phi_2 R_v^p (V^p - V^q) - 36L\phi_2^2\omega^q + L(12\phi_1 + R_v^p)(-R_\theta^p + 2\phi_4\omega^q)}{D} \quad (34b)$$

여기서

$$D = 36\phi_2^2 - (4\phi_3 + R_\theta^p)(12\phi_1 + R_v^p) \quad (35a)$$

$$R_v^p = \frac{k_v^p L^3}{EI}, \quad R_\theta^p = \frac{k_\theta^p L}{EI} \quad (35b,c)$$

결국, 좌측 단은 횡방향 병진 및 회전 스프링을 갖고 우측단은 강철인 부분강철 뼈대요소의 엄밀한 접선강도행렬은 다음과 같이 얻어진다.

$$k_{uv}^* = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2/I & \cdot & -AL^2/I & \cdot & \cdot \\ & 12\xi_1 & 6\xi_{2p}L & \cdot & -12\xi_1 & 6\xi_{2q}L \\ & & 4\xi_{3p}L^2 & \cdot & -6\xi_{2p}L & 2\xi_4L^2 \\ & & & AL^2/I & \cdot & \cdot \\ sym. & & & & 12\xi_1 & -6\xi_{2q}L \\ & & & & & 4\xi_{3q}L^2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

여기서

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{(3\phi_2^2 - 4\phi_1\phi_3 - \phi_1 R_\theta^p) R_v^p}{D}, \quad \xi_{2p} = \frac{-\phi_2 R_v^p R_\theta^p}{D}, \\ \xi_{2q} &= \frac{\phi_2 R_v^p (2\phi_4 - 4\phi_3 - R_\theta^p)}{D}, \\ \xi_{3p} &= \frac{R_\theta^p (9\phi_2^2 - 12\phi_1\phi_3 - \phi_3 R_v^p)}{D}, \\ \xi_{3q} &= \phi_3 + \frac{9\phi_2^2 (4\phi_3 - 4\phi_4 - R_\theta^p) + \phi_4^2 (12\phi_1 + R_v^p)}{D}, \\ \xi_4 &= \frac{R_\theta^p (18\phi_2^2 - 12\phi_1\phi_4 - \phi_4 R_v^p)}{D} \end{aligned} \quad (37a-f)$$

식(36)을 탄성 강도행렬과 기하학적 강도행렬로 분리하기 위한 선형화는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{(1 + R_\theta^p) R_v^p}{12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q} - \frac{\beta^2 \{16 + (7 + R_\theta^p) R_\theta^p\} (R_v^p)^2}{10 (12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q)^2} \\ \xi_{2p} &= \frac{-R_v^p R_\theta^p}{12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q} \\ &\quad - \frac{\beta^2 R_v^p R_\theta^p \{(-4 + R_\theta^p) R_v^p - 60(5 + R_\theta^p)\}}{60 (12 + 4R_\theta^{pq} + R_\theta^p R_\theta^q)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{2q} &= \frac{R_v^p(R_\theta^p+2)}{12+4R_\theta^{pq}+R_\theta^p R_\theta^q} \\ &- \frac{\beta^2}{60} \frac{R_v^p \{32-R_\theta^p(8+R_\theta^p)\}-60\{8+R_\theta^p(5+R_\theta^p)\}}{(12+4R_\theta^{pq}+R_\theta^p R_\theta^q)^2} \\ \xi_{3p} &= \frac{R_\theta^p(R_v^p+3)}{12+4R_\theta^{pq}+R_\theta^p R_\theta^q} - \frac{\beta^2}{30} \frac{(R_\theta^p)^2 \{(360+R_v^p(15+R_\theta^p))\}}{(12+4R_\theta^{pq}+R_\theta^p R_\theta^q)^2} \\ \xi_{3q} &= \frac{R_v^p+R_\theta^p(R_v^p+3)}{12+4R_\theta^{pq}+R_\theta^p R_\theta^q} \\ &- \frac{360\{3+R_\theta^p(3+R_\theta^p)\}}{30} \frac{\beta^2 \{6+R_\theta^p\} R_\theta^p R_v^p + \{24+R_\theta^p(9+R_\theta^p)\} (R_v^p)^2}{(12+4R_\theta^{pq}+R_\theta^p R_\theta^q)^2} \\ \xi_4 &= \frac{R_\theta^p(LR_v^p-6)}{12+4R_\theta^{pq}+R_\theta^p R_\theta^q} \\ &+ \frac{\beta^2}{60} \frac{-720(3+R_\theta^p)+60(3+R_\theta^p)R_v^p+(12+R_\theta^p)(R_v^p)^2}{(12+4R_\theta^{pq}+R_\theta^p R_\theta^q)^2}\end{aligned}$$

4. 일반화된 부분강절 뼈대요소의 안정성 및 $P-\Delta$ 해석

본 장에서는 3장에서 제시된 일반화된 부분강절요소를 이용하여 시스템 좌굴 및 $P-\Delta$ 해석 기법을 소개하고 시스템 좌굴 하중을 이용하여 구조물을 구성하는 각 부재의 유효좌굴 길이 산정방법을 제시한다.

4.1 일반화된 부분강절 뼈대요소의 시스템좌굴해석 및 유효좌굴길이

축력을 받는 부분강절 뼈대요소 i 의 접선강도행렬은 식(3)과 같은 비선형과 식(11)과 같은 선형 형태로 나타낼 수 있으며 전체 구조물에 대해 직접강도법을 적용하면 다음과 같이 일반화 될 수 있다.

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{f}_i = \mathbf{K}_T \mathbf{d} \cong (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{d} \quad (39)$$

여기서

$$\mathbf{K}_T = \sum_i \mathbf{k}_i^t(P_i); \mathbf{K}_E = \sum_i \mathbf{k}_i^e(P_i); \mathbf{K}_G = \sum_i \mathbf{k}_i^g(P_i) \quad (40a-c)$$

식(40)에서 $\mathbf{K}_T$, $\mathbf{K}_E$ 그리고 $\mathbf{K}_G$ 는 각각 전체 구조계에 대한 접선강도행렬, 탄성 강도행렬 그리고 기하학적 강도행렬을 나타내며, 식(39)로부터 개별 부재의 유효좌굴길이를 산정하기 위하여 전체 구조물이 하중벡터 $\mathbf{F}_G$ 를 받는 경우에 대해 선형탄성해석을 수행하고 개별 부재 i 에 발생하는 축력 P_i 를 다음과 같이 산정한다.

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{K}_E \mathbf{d} \quad (41)$$

다음 단계로서 비선형 접선강도행렬과 선형화된 강도행렬을 이용한 전체 구조계의 시스템 고유치(좌굴하중) λ_{cr} 을 식(42)와 같이 각각 계산할 수 있다.

$$\mathbf{K}_T(\lambda) \mathbf{d} = 0; \mathbf{K}_E \mathbf{d} = \lambda \mathbf{K}_G \mathbf{d} \quad (42a,b)$$

식(42)에서 λ 는 구조계 전체에 작용된 외력으로부터 결정되는 좌굴 파라미터이고, 식(42a)는 안정함수를 이용한 비선형 상태의 접선강도행렬로부터 Penalty method를 적용하여 엄밀한 시스템 좌굴하중 λ_{cr} 을 얻을 수 있으며 식(42b)는 탄성 및 기하학적 강도행렬이 분리된 상태로서 선형 고유치 문제를 해결함으로써 시스템 좌굴하중 λ_{cr} 을 근사 값으로 얻을 수 있다. 결국, 전체시스템 고유치 λ_{cr} 와 선형 탄성해석으로부터 얻어진 각 요소의 축력 P_i 를 이용하여 개별부재의 유효좌굴 길이 $k_i L_i$ 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$P_i \lambda_{cr} = \frac{\pi^2 EI_i}{(K_i L_i)^2}; k_i L_i = \pi \sqrt{\frac{EI_i}{P_i \lambda_{cr}}} \quad (43)$$

4.2 일반화된 부분강절 뼈대요소의 $P-\Delta$ 해석

본 연구에서 제시한 부분강절 뼈대 구조물의 $P-\Delta$ 해석을 위하여, 작용 하중벡터 $\mathbf{F}_d$ 와 각 요소에 발생된 축력 P_i 에 대해 선형 탄성해석을 다음과 같이 수행한다.

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{K}_E \mathbf{d} \quad (44)$$

식(44)로부터 얻어진 각 부재의 축력 P_i 를 이용하여 요소의 접선강도행렬을 계산하고 식(45)와 같이 비선형 해석 또는 선형해석을 기법을 적용하여 연립방정식을 해결한다.

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{K}_T \mathbf{d} \cong (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{d} \quad (45)$$

5. 수치해석에

본 연구에서는 식(42a)와 같이 안정함수로 구성된 비선형 접선강도행렬을 이용한 해석프로그램(Method 1)과 식(42b)와 같이 접선강도행렬을 선형화하여 탄성 및 기하학적 강도행렬로 분리하여 얻어진 해석프로그램(Method 2)을 개발하였다. Method 1은 구조물을 구성하는 각 부재에 한 개의 요소만을 적용해도 정확한 해를 얻을 수 있는 장점이 있으며, Method 2는 각 부재를 여러 개의 요소로 분할하여 모델링해야 정확한 해를 얻을 수 있으나 탄성과 기하학적 강도행렬이 분리되어 있음에 따라 공학적 활용도는 보다 우수하다고 판단된다. 본 장에서는 구조 부재의 연결부가 회전스프

링 횡방향 병진 스프링 k_v 와 k_θ 를 갖는 경우에 대해 각각 식(35b) 또는 식(35c)의 R_v 와 R_θ 로 정규화(normalized) 시키고 이들 파라미터가 다양한 구조물의 시스템 좌굴에 미치는 영향을 조사하였다.

5.1 회전 및 병진(횡방향) 스프링을 갖는 기둥

Fig. 5는 기둥의 하부가 고정 또는 활절 지지되고 상부는 회전 또는 병진(횡방향) 스프링으로 연결된 표준형 단일 기둥을 나타낸 것으로 회전 및 병진 스프링의 길이는 0이며 스프링의 한 쪽은 기둥의 상부와 연결되고 다른 한 쪽은 고정지지 되어있다. 식(42)에 나타낸 부재 당 하나의 요소만으로 정확한 해를 얻을 수 있는 비선형 해석 기법 *Method 1*과 여러 개의 요소를 적용해야 하는 선형 해석기법 *Method 2*의 수렴성을 검토하기 위하여, 스프링의 강성을 식(35b,c)에 의해 정규화하고 $R_\theta = 10$ 인 경우의 Fig. 5(b)

에 대하여 모델링 요소 수에 따른 좌굴하중을 산정하여 Fig. 6에 나타내었다. 부재 당 5개 요소를 사용하는 경우 완전하게 수렴된 것으로 판단됨에 따라 *Method 2*를 사용하는 경우 본 예제 이후의 모든 수치해석은 부재 당 10개의 요소를 적용하였다.

Table 1은 스프링 강도에 따른 각 기둥의 좌굴하중 P_{cr} 과 식(43)에 의해 얻어진 유효좌굴계수 k_i 를 나타낸 것으로 *Method 1*과 *Method 2*가 서로 잘 일치하였고 각 경계조건에 따른 좌굴특성을 파악할 수 있다.

Fig. 7(a)는 회전 및 병진 스프링 강도에 따른 기둥의 좌굴하중을 나타낸 것으로 대부분의 기둥에서 스프링 강도 증가에 따라 좌굴강도가 특정 값에 수렴하는 단조 증가 형태를 나타냈으나 Fig. 5(c)와 같이 기둥 하부는 강절이고 상부가 병진(횡방향) 스프링으로 연결된 경우에는 스프링 강도와 좌굴하중 간에 선형적 관계(Bi-linear)가

Fig. 5. Pinned and fixed columns with rotational and translational springs

Table 1. Buckling loads of semi-rigid columns

	k_θ (kN·m/rad)	R_θ	k_v (kN/m)	R_v	Method 1		Method 2	
					P_{cr} (kN)	k_i	P_{cr} (kN)	k_i
Fig. 5(a)	0	0	∞	∞	4240.1	0.69916	4240.3	0.69914
	2100	10			6962.2	0.54562	6963.2	0.54558
	6300	30			7770.8	0.51645	7772.3	0.51640
	∞	∞			8290.5	0.5	8292.2	0.49995
Fig. 5(b)	0	0	∞	∞	2072.6	1.0	2072.6	1.0
	2100	10			3586.0	0.76024	3586.2	0.75917
	6300	30			3980.6	0.72158	3980.8	0.72156
	∞	∞			4240.1	0.69916	4240.3	0.69914
Fig. 5(c)	∞	∞	0	0	2072.6	1.0	2072.6	1.0
			2100	10	3750.1	0.74343	3750.5	0.74339
			6300	30	6914.0	0.54751	6915.1	0.54747
			∞	∞	8290.5	0.5	8292.2	0.5
Fig. 5(d)	∞	∞	0	0	518.15	2.0	518.15	2.0
			2100	10	2090.8	0.99563	2090.8	0.99563
			6300	30	3687.2	0.74974	3687.3	0.74973
			∞	∞	4240.1	0.69916	4240.3	0.69914

Fig. 6. Convergence for number of elements

존재함을 알 수 있다. 이러한 좌굴특성은 Fig. 7(b) 에서와 같이 스프링 강성과 유효좌굴계수 관계에서도 곡선에서 직선으로 연결 되는 불연속 특성이 유사하게 나타남을 확인할 수 있다. 좌굴계수 k_i 는 스프링 강성이 커질수록 Fig. 5(a)와 5(c)의 경계조건에서 0.5에, Fig. 5(b)와 5(d)의 경계조건에서는 0.6992에 수렴됨을 알 수 있다.

5.2 부분강절 회전 및 병진 연결을 갖는 보-기둥

Fig. 8은 보와 기둥의 길이, 재료 그리고 단면이 서로 동일하고 지점이 고정되지 된 경우로서 두 부재의 연결 상태에 따른 좌굴 거동 특성을 조사하였다. Fig. 8에서 (a)는 보와 기둥이 강절로

(a) Buckling loads with various spring rigidities

(b) Effective length factor with various spring rigidities

Fig. 7. Semi-rigid columns with various spring rigidities

Fig. 8. Angle frame with various springs and boundary conditions

Table 2. Buckling loads and effective length factors of semi-rigid angle frame

Spring rigidities		P_{cr} (kN)	P_i (kN)	k_i
	R_θ			
Fig. 8(a)	∞	673.24	0.99994	0.55487
Fig. 8(b)	10	607.98	0.99989	0.58390
Fig. 8(c)	∞	343.96	0.99990	0.77629
Fig. 8(d)	0	424.26	0.99994	0.69916
Fig. 8(e)	10	322.83	0.99995	0.80128
Fig. 8(f)	∞	165.17	0.99992	1.1202

연결되고 (b)는 회전스프링 (c)는 횡방향 병진 스프링 (d)는 활절 (e)는 회전과 횡방향 병진 스프링이 함께 적용되었고 (f)는 두 부재의 교점에서 기둥 상부의 횡변위는 자유로우나 부재간의 상대적인 회전은 허용되지 않는 경우이다. Table 2에서 P_i 는 시스템 단위하중에 의한 기둥의 축력을 나타낸 것으로 유효좌굴계수 k_i 는 식(43)을 이용하여 얻어질 수 있으며 적용된 회전 및 횡방향 병진 스프링은 각각 $k_\theta = 2100\text{kN}\cdot\text{m/rad}$ ($R_\theta = 10$)와 $k_v = 21\text{kN/m}$ ($R_v = 10$)이고 다양한 해석조건에 대해 시스템 좌굴하중을 나타내었다.

(a) Buckling loads with various spring rigidities

(b) Effective length factor with various spring rigidities

Fig. 9. Semi-rigid angle frame with various spring rigidities

Fig. 10. Eigen vectors of semi-rigid angle frame

Fig. 9는 Fig. 8에서의 회전 및 병진 스프링 강성을 변수로 취하여 정규화된 스프링 강성의 크기 변화에 따른 좌굴하중을 나타낸 것이다. Fig. 8(b) 및 Fig. 8(c)의 스프링 강성이 커짐에 따라 Fig. 8(a)의 좌굴하중에 접근하였으나 반대로 스프링 강성이 작아지는 경우 Fig. 8(b)는 Fig. 8(d)에, Fig. 8(c)는 Fig. 8(f)에 수렴함을 알 수 있다.

Fig. 10에 제시된 좌굴모드는 Fig. 8에 대응하는 고유벡터(Eigen Vector)로서 Penalty Method를 이용하여 얻어졌으며 회전 및 병진 스프링이 좌굴형상에 반영되어 있음을 확인할 수 있다.

5.3 브레이싱된 부분강절 라멘

본 예제는 한지 경계조건을 갖는 브레이싱 라멘에 대하여 수평부재의 양단이 회전스프링 k_θ 에 의해 기둥과 연결되었고 브레이싱의

단면적을 변화시킬 때 하중 P 에 의한 좌굴강도를 조사하였다. 브레이싱의 양단은 활절 연결이며 기둥과 보는 각각 10m와 20m의 길이를 갖고 동일한 재료를 적용하였으며 단면계수는 Fig. 11의 우측과 같이 보(①), 기둥(②) 그리고 브레이싱(③)으로 구분하여

Fig. 11. Braced portal frame with semi-rigid connections

Table 3. Buckling load of semi-rigid portal frame with various bracing area A_3

Bracing			Mageirou (2006)	Present study				
$A_3(\text{cm}^2)$	$\log_{10}(A_3)$	λ_{br}		System buckling P_{cr} (kN)		Axial force of column P_i (kN)	k_i (column)	Buckling mode
				Method 1	Method 2			
0	$-\infty$	∞	14.77	14.767	14.767	1.0	7.7860	Sway mode
0.1	-1	2.2361		766.08	766.08	0.99999	1.0810	
1.0	0	7.0711		7527.6	7527.6	0.99991	0.34486	
1.1	0.041393	7.4162		8278.5	8278.5	0.99990	0.32885	
1.2023	0.08	7.7533		8976.1	8976.2	0.99989	0.31581	Coupled mode
1.3	0.11394	8.0623		8981.7	8981.9	0.99988	0.31572	Non-sway mode
10	1	22.361		8988.7	8988.8	0.99911	0.31572	
100	2	70.711		9058.3	9058.4	0.99144	0.31572	
106	6	7071.1	11227	11227	0.80045	0.31571		

(a) System buckling loads of braced portal frame with various bracing area

(b) Effective buckling coefficients with various slenderness ratio of bracing

Fig. 12. Relations between the coefficients of bracing and the column effective length factor

Fig. 13. Eigen vectors of braced portal frame with semi-rigid connections

나타내었다. 다양한 브레이싱 단면적을 갖는 경우에 대해 좌굴하중과 기둥부재의 유효좌굴계수 k_i 그리고 좌굴모드를 Table 3과 Fig. 12 및 Fig. 13에 제시하였으며 브레이싱이 없는 경우 Mageirou(2006)의 결과와 서로 잘 일치하였다. Fig. 12에서 기둥의 좌굴하중은 시스템 좌굴하중 P_{cr} 과 기둥의 축력 P_i 의 곱으로 얻어지며 브레이싱의 단면적을 증가시키에 따라 초기에 좌굴강도가 급격하게 증가하였으나 브레이싱 단면적 A_3 가 1.3cm^2 를 넘어서면 좌굴모드가 변형되어 불연속 단조증가 형태를 나타내게 된다. 여기서 브레이싱의 단면적 증가는 전체 구조계에 작용한 하중을 브레이싱이 나누어 부담하게 되어 기둥의 축력 P_i 를 감소시키에 따라 $A_3 > 1.3\text{cm}^2$ 인 경우에 전체 구조계의 시스템좌굴하중이 단조 증가하더라도 기둥만의 좌굴하중은 일정한 값(8981.3kN)을 유지하게 된다. 또한 Fig. 12(b)로부터 브레이싱의 세장비가 증가함에 따라 부분강절 라멘을 구성하는 기둥의 유효좌굴계수 k_i 는 단조 감소하였고 좌굴모드가 변화하는 $A_3 \approx 1.2\text{cm}^2$ ($\lambda_{lr} = 7.753$)보다 브레이싱 단면적이 큰 경우에 k_i 는 0.3157에 수렴함을 알 수 있다. 브레이싱의 단면적이 매우 작은 경우($A_3 \leq 1.1\text{cm}^2$)는 Fig. 13(a),(b)와 같이 횡변위 좌굴모드가 나타나고 $A_3 > 1.3\text{cm}^2$ 인 경우에는 Fig. 13(d)와 같이 횡변위 좌굴모드가 방지되며 $A_3 \approx 1.2\text{cm}^2$ 인 경우는 Fig. 13(c)와 같이 두 개 모드가 복합되어 나타남을 알 수 있다. 본 예제의 해석 결과로부터 브레이싱의 단면적이 극단적으로 작지 않다면 좌굴 거동에 있어서 브레이싱 고유의 설치 목적인 가로 흔들이가 방지되는 것으로 판단된다.

6. 결론

현재까지 부분강절 뼈대구조의 정확한 좌굴거동을 파악하기 위하여 수많은 연구가 진행되었으나 다양한 형태의 시스템 좌굴해석이 가능한 일반화가 이루어지지 않았으며 비선형 형태의 접선 강도행렬과 선형화된 탄성 및 기하학적 강도 행렬이 제시되지 못하였다. 본 연구에서는 현재까지 타 연구자들에 의해 제시된 부분강절 이론의 단점을 보완하고 일반화된 부분강절 뼈대구조의 좌굴해석 이론을 제시하기 위하여, 안정함수를 처짐함수로 적용하고 부재간 연결부에 탄성 회전 및 병진 스프링을 부분강절로 고려하여 엄밀한 평면 뼈대구조의 접선강도행렬과 탄성 및 기하학적 강도행렬을 유도하였으며 포트란을 이용한 수치해석 프로그램을 개발함으로써 부분강절 구조물의 시스템 좌굴강도 및 유효좌굴길이에 대한 매개변수 연구를 수행하였고 그 내용을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 안정함수(stability function)를 이용하여 회전 및 병진 스프링을 갖는 일반화된 부분강절 뼈대구조의 엄밀한 접선강도행렬 k_t 를 제시함.
- (2) 유도된 접선강도행렬에 대해 Taylor 전개를 적용하여 탄성 및 기하학적 강도행렬을 각각 분리하여 제시함.
- (3) 엄밀한 안정함수(식(4))가 이용되므로 직선부재 하나에 1개의 요소만 모델링해도 정확한 수치해석결과를 얻을 수 있는 이론 및 프로그램 개발함.

- (4) Penalty method를 이용한 고유벡터(Eigen Vector)를 산정함으로써 좌굴 형상을 파악할 수 있는 프로그램 개발함.
- (5) 일반화된 부분강절 뼈대구조의 유효좌굴 길이를 산정하기 위한 $P-\Delta$ 및 시스템좌굴 해석 수행함.
- (6) 양단 모두 부분강절인 경우뿐만 아니라 한 쪽 단만 부분강절인 비대칭 구조에 대하여 접선강도행렬과 탄성 및 기하학적 강도행렬을 유도함으로서 임의의 형상 및 다양한 연결조건을 갖는 부분강절 뼈대 구조물의 좌굴해석 이론 제시함.

감사의 글

본 연구는 인덕대학교의 2010학년도 교내연구비에 의해 수행되었으며 연구지원에 대하여 깊은 감사를 드립니다.

References

- Aristizabal-Ochoa, J.D. (2004). "Column stability and minimum lateral bracing : effects of shear deformations" *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 130, pp. 1223~1232.
- Banerjee JR, Williams FW. (1994). "The effect of shear deformation on the critical buckling of columns" *J. Sound and Vibration*, 174(5), pp145~168.
- Bathe, K. (1993). *Finite element methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, pp.110~113.
- Bridge RQ, Fraser DJ. (1987). "Improved G-factor method for evaluating effective lengths of Columns" *J. Struct. Eng. ASCE*, vol. 113, pp1341~1356.
- Chen WF, Lui EM. (1987). *Structural Stability*, Elsevier Science Publishing Co., New York.
- Chen WF, Lui EM. (1991). *Stability Design of Steel Frames*, CRC Press, Inc., New York.
- Essa H.S. (1997). "Stability of columns in unbraced frames" *J. Struct., Eng. ASCE*, 123:952-957
- Eurocode 3. (2004). *Design of steel structures Part 1.1: General rules for buildings*. CEN Brussels 2004, CEN Document EN 1993-1-1.
- Goto Y, Suzuki S., Chen WF. (1993). "Stability behavior of semi-rigid sway frames" *Eng. Struct.*, 15(3):209- 219
- Kato, S., Mutoh, I., and Shomura, M. (1998). "Collapse of semi-rigid jointed reticulated domes with initial geometric imperfections" *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 48, pp. 145~213.
- Kishi N., Chen WF. and Goto, Y. (1997). "Effective length factor of columns in semi-rigid and unbraced frames" *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 123, No.3, March, pp. 313~320.
- Kishi N., Chen WF., Goto Y., Kimuro M. (1998). "Effective length factor of columns in flexible jointed and braced frames" *J. Contr, Steel, Res*, 47:93-118
- Li, Q.S. and Mativo, J. (2003). "Approximate estimation of the maximum load of semi-rigid steel frames" *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 54, pp. 213~238.
- LRFD (1999). *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. Chicago : American Institute of Steel Construction Inc. USA.
- Mageirou, G.E., and Gantes, C.J. (2006). "Buckling strength of multi-story sway, non-sway and partially-sway frames with semi-rigid connections" *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 62, August, pp. 893~905.
- Raftoyannis, I.G (2005). "The effect of semi-rigid joints and an elastic bracing system on the buckling load of simple rectangular steel frames" *Journal of Constructi onal Steel Research*, Vol. 61, pp. 1205~1225.
- Sekulovic, M., and Salatic, R. (2001). "Nonlinear analysis of frames with flexible connections" *Computer & Structures*, Vol. 79, pp. 1097~1107.
- Jin M.S., Kyung Y.S., Kim M.Y.(2004). "Determination of effective buckling length of plane frames" *KSCE*, Vol. 24, 3A, pp. 509~516.
- Min B.C., Min D.J., Jung M.R., Kim M.Y.(2011). "Stability analysis of shear-flexible and semi-rigid plane frames" *KSCE*, Vol. 31, 1A, pp. 9~18 (in Korean).