Students' Understanding and Application of Monty Hall Dilemma in Classroom

몬티홀 딜레마에 대한 학생들의 이해와 수업적용

PARK Jung Sook 박정숙

Although Monty Hall dilemma is used in many areas including philosophy, economics, and psychology, it is used in the current mathematics textbooks only as a material for reading or one of probability questions. The present study tries to explore students' understanding of Monty Hall dilemma through a class case. In this study, a group of high-school students participated in group activities, in which they read an argument about Monty Hall dilemma, and tried to resolve it through small-group and whole-class discussions, and then studied the conditional probability. The analysis supports the studies in psychology that intuitive understandings on probability do not change easily, and that counter-intuitivity in Monty Hall dilemma induces confusion and offers a basis for discussions among students. Similar results are anticipated when other dilemmas on probability are used.

Keywords: Monty Hall dilemma, intuition; 몬티홀 딜레마, 직관.

MSC: 97U20 *ZDM:* U23

1 서론

몬티홀 딜레마는 문제가 발표된 이래 계속적으로 논쟁의 대상이 되고 있으며, 서로 다른 영역에서 학자들의 관심을 끌고 있다. 몬티홀 딜레마를 학교 수학 차원에서 해결하려면 기초 확률 개념이 필요하며, 좀 더 확장하면 조건부 확률을 확장한 베이즈 정리를 활용하기도 한다. 그러나 몬티홀 딜레마는 단지 학교 수학에서만 활용되고 있는 것은 아니다. 경제학에서는 게임이론과 연결시켜 몬티홀 딜레마를 다루고 있으며 [4, 17], 의사결정과 관련시켜 단순한 수학 퍼즐 문제가 아니라 수학적 모델링을 학습할 수 있는 훌륭한 도구라고 설명하기도 한다 [5]. 통계학자 [14], 심리학자 [8]들의 연구를 비롯하여, 어떤 특정한 경우에서 합리적 선택에 대한 수학적 논쟁과 관련되어 있다고 주장하는 수학자 [16, 18]들에 이르기까지 여러 분야에서 몬티홀 딜레마에 관심을 가지고 다루고 있다.

몬티홀 딜레마는 1963년부터 40년 동안 지속된 미국의 TV 쇼 “Let's make a deal”에서 유래되었다. 이 쇼의 진행자인 몬티홀은 다음과 같은 게임을 한다.

1. 문 3개가 있는데 한 문 뒤에는 자동차가 있고 나머지 두 문 뒤에는 염소가 있다. 참가자는 이 상황에서 문을 하나 선택하여 그 뒤에 있는 상품을 얻는다.
2. 참가자가 어떤 문을 선택하면 진행자는 나머지 두 문 중에 염소가 있는 문 한 개를 열어 참가자에게 그 문에 염소가 있다고 확인시켜준다. 이때 나머지 두 문 뒤에 염소가 있으면 진행자는 임의로 한 문을 열어준다.
3. 그 후 진행자는 참가자에게 선택한 문을 닫혀있는 다른 문으로 선택을 바꿀 기회를 준다.

여기서 문제는 처음 선택을 고수하는 쪽이 자동차를 얻게 되기에 유리할까, 아니면 선택을 바꾸는 것이 유리할까라는 의문에서부터 시작한다. 이 문제의 해결을 위해 각 경우에 대한 자동차를 얻을 확률을 계산해 본다. 많은 사람들의 의견은 바꾸든 안 바꾸든 상관없이 확률은 $\frac{1}{2}$ 로 같다고 답한다. 그 근거로 진행자가 문을 여는 행동과 관계없이 남아있는 문은 2개이고 한 문에는 자동차, 다른 문에는 염소가 있기 때문에 확률은 $\frac{1}{2}$ 이라는 것이다. 그러나 실제 확률은 선택을 바꾸는 경우 자동차를 얻을 확률이 $\frac{2}{3}$ 가 되므로 선택을 바꾸는 것이 유리하다. 이와 같은 결과는 많은 사람들의 직관과 다른 결과를 제공하기 때문에 $\frac{2}{3}$ 임을 논리적으로 설득하기 위한 풀이 방법을 다양하게 제기하기도 하고 [15], 왜 사람들의 직관은 $\frac{1}{2}$ 을 고집하는가에 대한 연구를 하기도 하고 [8], 몬티홀 딜레마의 조건을 바꾸면 확률이 어떻게 달라지는가에 대한 연구 [13,16]를 하기도 한다.

우리나라에서는 몬티홀 딜레마를 직접적으로 다룬 선행 연구를 찾기 어렵지만 확률의 패러독스를 다룬 다른 선행 연구는 찾을 수 있다. 송하석 [19]은 두 봉투의 역설에 대한 논리적 분석을 시도하였고, 이종학 [10]은 학교 수학의 확률·통계 내용과 관련된 역사적 패러독스들은 무엇이고 어떠한 수학적 배경에 의해 나타나게 되었으며, 풀이 방법에 대하여 기술하였다. 조차미, 박종률, 강순자 [2]는 Bertrand의 패러독스에 나타난 ‘임의의 현’의 분명치 않은 의미 때문에 나타나는 다양한 풀이 방법과 이를 기반으로 기하학적 확률 지도에 대한 제언을 기술한 바 있다. 그러나 이 연구들은 확률의 패러독스 그 자체에 초점을 맞추어 분석한 연구이므로 수업에 활용할 수 있는 구체적인 방법을 제안한 것은 아니다. 반면 이정연, 이경화 [11]는 Simpson의 패러독스를 활용한 수업을 통하여 영재학생들의 창의성이 어떻게 발현되는지에 대한 연구를 실시하여 패러독스를 현장에서 활용한 결과를 제안하였다. 이 연구는 대상이 초등 영재 학생라는 특수성을 가지고 있어 수업 현장에 직접 적용하기에는 한계를 가질 수 있다.

학교수학에서 몬티홀 딜레마는 확률에서 패러독스의 소재로 활용되기도 하고 직관에 반하는 확률에 대하여 이야기 하고 싶을 때 적용하기도 한다. 그러나 선행연구를 살펴볼

때, 다양한 영역에서 몬티홀 딜레마에 관심을 가지고 있음에도 불구하고, 일반 고등학교의 학생들이 몬티홀 딜레마에 대해 어떤 이해를 하고 있는지, 수업에 어떻게 활용할 수 있는지에 대한 연구는 충분치 않음을 알 수 있다. 따라서 본 연구는 몬티홀 딜레마를 활용한 수업 사례를 통하여 학생들의 몬티홀 딜레마에 대한 이해와 수업 활용 방안에 대하여 구체적으로 탐구할 것이다.

2 몬티홀 딜레마

2.1 몬티홀 딜레마의 역사

몬티홀 딜레마와 비슷한 문제로 볼 수 있는 문제는 Bertrand의 상자 문제와 세 명의 죄수 문제이다 [6,16]. 몬티홀 딜레마는 원래 1975년 수학자 Stevin이 저널 American Statistician이란 잡지에 「편집장에게 보내는 편지」에 투고함으로써 제기되었다. Stevin이 제시한 답은 <Table 1>과 같다.

자동차가 있는 문	참가자가 선택한 문	몬티홀이 열어준 문	참가자가 바꾼 문	결과
A	A	B 또는 C	C 또는 B	자동차를 얻지 못함
A	B	C	A	자동차를 얻음
A	C	B	A	자동차를 얻음
B	A	C	B	자동차를 얻음
B	B	A 또는 C	C 또는 A	자동차를 얻지 못함
B	C	A	B	자동차를 얻음
C	A	B	C	자동차를 얻음
C	B	A	C	자동차를 얻음
C	C	A 또는 B	B 또는 A	자동차를 얻지 못함

Table 1. Solving method on Monty Hall dilemma by Stevin (Requoted, [7, p.266]); Stevin이 제시한 몬티홀 딜레마의 풀이 방법 [7, p.266]에서 재인용)

<Table 1>에서 자동차를 얻는 경우가 전체 9가지 경우에서 6가지이고 자동차를 얻지 못하는 경우가 3가지이므로 문을 바꾸는 것이 자동차를 얻을 확률이 더 높다. Stevin의 풀이 방법에 대해 독자들은 만족하지 못했고 Stevin이 틀렸다고 주장하는 많은 편지를 받게 된다. 이에 대해 Stevin은 문제의 가정을 보다 명확히 제시하였다. 첫 번째 가정은 진행자인 몬티홀이 어떤 상자에 자동차가 들어 있는지 알고 있다는 것이고, 두 번째 가정은 몬티홀이 염소가 들어 있는 문을 임의로 선택한다는 것이다. 그러나 그 당시 이 문제는 수학자들의 관심을 끌지는 못했다 [6,16].

몬티홀 문제는 다시 1990년 Savant가 편집장으로 있는 잡지인 Parade에 실리게 된다. Savant는 다음과 같은 질문을 받았다.

당신이 3개의 문 중 하나의 문을 선택하는 게임을 한다고 생각해봅시다. 하나

의 문 뒤에는 자동차가 있고 다른 두 개의 문에는 염소가 있습니다. 당신이 1번 문을 선택했고, 문 뒤에 무엇이 있는지 알고 있는 진행자는 염소가 들어 있는 3번 문을 열어주었습니다. 진행자가 “2번 문으로 선택을 바꾸시겠습니까?”라고 질문한다면 문을 바꾸는 것이 이익이 될까요? [16, p.23]

이에 대해 Savant는 다음과 같이 답했다.

네. 바꾸는 것이 좋습니다. 첫 번째 문을 선택한다면 자동차를 받을 확률이 $\frac{1}{3}$ 이지만, 두 번째 문으로 바꿀 경우 자동차를 받을 확률은 $\frac{2}{3}$ 가 됩니다. 백만 개의 문이 있고, 1번 문을 선택했다고 가정하세요. 이제 문 뒤에 숨겨져 있는 것이 무엇인지 알고 있는 사회자가 자동차가 들어 있는 문을 피하고 777,777개의 문만 남기고 자동차가 들어 있지 않은 다른 문을 열어주었다고 합시다. 그렇다면 문을 바꾸는 것이 더 좋겠지요? [16, p.23]

Savant 역시 문을 바꿀 확률이 $\frac{2}{3}$ 이라고 설명하였으나, 이에 대한 후폭풍은 그 전보다 거셌다. 이번에는 수학자의 관심을 끌게 된 것이다. 특히 그 당시에 유명한 수학자인 Erdős(1913–1996)마저도 강력하게 $\frac{1}{2}$ 이라고 생각하였다. 수학자들의 관심은 몬티홀 딜레마를 해결하기 위한 논리적 방법이 개발되기 시작했고, 기초적인 확률 개념뿐 아니라 베이즈 정리를 활용하는 방법도 동원하게 되었다. 몬티홀 딜레마에 대한 다양한 해결 방법과 함께 Monte Carlo가 개발한 시뮬레이션의 결과는 문을 바꿀 때 상품을 얻을 확률이 $\frac{2}{3}$ 임을 지지하고 있다 [6,16].

이제 몬티홀 딜레마를 해결해보자. 앞서 <Table 1>에서 경우의 수를 나열하여 문을 바꿀 경우에 자동차를 얻을 확률이 $\frac{2}{3}$ 임을 설명하고 있다. <Figure 1>은 참가자가 1번 문을 열었을 때, 각각의 문을 열 확률을 이용하여 몬티홀 딜레마를 설명하고 있다. 따라서 문을 바꾸었을 때, 2번 문과 3번 문을 선택하게 되므로 자동차를 얻을 확률은 역시 $\frac{2}{3}$ 이다.

이제 조건부 확률의 개념을 이용한 베이즈 정리를 이용하여 문제를 해결하여 보자. 어떤 두 사건 A, B에 대하여 조건부확률의 정의에 의해 다음과 같은 식이 성립한다고 하자.

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B), \quad P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$$

이 때, 위의 두 식으로 얻어지는 다음과 같은 정리를 베이즈 정리라고 한다.

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

이제 C_i 를 문 뒤에 차가 있을 사건 그리고 M_j 를 몬티홀이 문 j 를 열었을 사건이라고 하자. 참가자가 문1을 선택하고 몬티홀이 문2를 연다고 할 때, 참가자가 선택한 문 뒤에 자동차가 있을 확률을 베이즈 정리는 이용해 나타내면 $P(C_1|M_2) = \frac{P(C_1)P(M_2|C_1)}{P(M_2)}$ 이다.

분모를 확장하여 나타내면

$$P(C_1|M_2) = \frac{P(C_1)P(M_2|C_1)}{P(C_1)P(M_2|C_1) + P(C_2)P(M_2|C_2) + P(C_3)P(M_2|C_3)}$$

Figure 1. The probability on each case when participants opened the door [16, p.53]; 참가자가 문을 열었을 때 각각의 경우에 대한 확률 [16, p.53]

지금 예에서는 몬티홀이 문2를 열게 되므로 차가 문2에 있어서 몬티가 문2를 열게 될 확률 $P(M_2|C_2) = 0$ 이다. 또한 $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서 위의 식은 $P(C_1|M_2) = \frac{P(M_2|C_1)}{P(M_2|C_1)P(M_2|C_3)}$ 로 간단하게 나타내어진다. 이 때, $P(M_2|C_3) = 1$ 이다. 몬티홀 딜레마에서 $P(M_2|C_1) = \frac{1}{2}$ 이므로 $P(C_1|M_2) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}$ 이다 [16]. 즉, 참가자가 문을 바꾸지 않고 문1을 그대로 유지했을 경우 자동차를 받을 확률이 $\frac{1}{3}$ 이므로 문을 바꾸어 자동차를 얻을 확률은 $\frac{2}{3}$ 가 된다. Rosenhouse [16]는 베이지 정리를 이용하여 몬티홀 딜레마의 여러 가지 변형 문제를 해결하고 있다. 그 예를 제시하면 다음과 같다.

(변형1) 앞서 제시한 상황에서 이번에는 3개의 문, 1대의 자동차, 그리고 2마리의 염소가 있다. 참가자가 하나의 문을 선택하고 열지 않은 상태로 둔다. 몬티는 염소가 숨겨져 있다고 알고 있는 하나의 문을 연다. 그러나 이 때, 몬티는 그가 열 수 있는 문 중 가장 큰 수의 문을 연다. 참가자가 선택한 문은 절대 열 수 없음을 알고 있다. 이 때, 참가자가 처음 선택한 문을 바꿀 때와 바꾸지 않을 때, 언제가 자동차를 얻을 확률이 더 높은가?

구체적으로 이 문제를 탐구하기 위해 참가자가 처음에 문1을 선택한다고 가정할 수 있다. 문1에 염소가 숨겨져 있을 때 몬티는 1번 문을 열 수도 없고 자동차가 있는 문도 열 수 없다. 이 때, 몬티가 열지 않은 문에는 자동차가 들어있게 되므로 참가자는 처음 선택한 문을 바꿀 때, 자동차를 얻을 수 있다.

만약 문1에 자동차가 숨겨져 있다면 몬티는 3번 문을 열게 된다. 따라서 몬티가 3번 문을 열지 않고 2번 문을 열었다면 3번 문을 참가자가 선택하지 않은 이상 항상 자동차가 있다고 할 수 있다. 몬티가 3번문을 열었다면 자동차는 1번 또는 2번에 있게 된다. 이 경우는 정말 50-50이라고 할 수 있다. 이 문제를 베이지 정리를 이용하여 풀면 $P(C_1|M_2) = \frac{\frac{1}{2}}{0+1} = \frac{1}{2}$ 이다.

(변형2) 참가자가 문1을 선택하고 몬티는 염소를 보여줄 수 있는 문2를 열었다고 가정하자. 이 경우에 몬티는 참가자가 선택한 문을 열지 않는 한 문을 임의적으로 선택할 수 있다. 이 경우 처음 선택한 문을 바꾸는 것이 옳은가?

이 문제의 경우 몬티가 차가 숨겨져 있는 문을 열 가능성을 배제할 수 없다. 참가자가 문1을 열고 몬티가 문2를 열었기 때문에 문2 뒤에 염소가 숨겨져 있고, 참가자는 몬티가 2번과 3번 중 임의로 하나의 문을 열었다는 것을 알고 있기 때문에 다음과 같은 시나리오가 가능해진다.

1. 몬티가 문2를 임의로 선택했을 때, 문1 뒤에 자동차가 있다.
2. 몬티가 문2를 임의로 선택했을 때, 문3 뒤에 자동차가 있다.

자동차는 문1과 문3 뒤에 있을 가능성이 서로 같기 때문에 이 시나리오가 일어날 가능성은 서로 같다. 결론은 바꾸는 것은 영향을 주지 않는다.

베이지 정리를 이용하여 나타내면 $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$, $P(M_2|C_1) = P(M_2|C_3) = \frac{1}{2}$, $P(M_2|C_2) = 0$ 따라서 $P(C_1|M_2) = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{2})}{\frac{1}{3}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$ 이 되어 일반적으로 알고 있는 몬티홀 딜레마의 해결 방법과는 다를 수 있다.

(변형3) 3개의 똑같은 문 뒤에 2마리의 염소와 한 대의 자동차가 숨겨져 있다는 상황은 똑같이 시작한다. 이번에는 게임에 두 명의 참가자가 있다. 각 참가자는 하나의 문을 선택하지만 문을 열지는 않는다. 각 참가자는 다른 참가자가 이 게임에 참가하고 있다는 것을 알고 있지만 다른 참가자가 어떤 문을 선택했는지는 알지 못한다. 이제 몬티는 다음과 같은 과정에 따라 문을 열게 된다.

1. 모든 참가자가 같은 문을 선택하였다면 모든 진행상황은 고전적인 몬티홀 문제와 같도록 진행된다. 몬티는 임의적으로 염소가 숨겨져 있는 하나의 문을 선택한다.
2. 참가자가 서로 다른 문을 선택하였다면 몬티는 그 뒤에 무엇이 숨겨져 있던지 간에 나머지 하나의 문을 선택하게 된다.
3. 모든 참가자들이 처음 문을 선택할 때 임의적으로 선택한다고 가정한다. 몬티가 염소가 숨겨져 있는 문을 열었을 때, 바꾸는 것이 더 좋은가?

Rosenhouse [16]는 이 문제가 직관을 테스트하기에 좋은 문제라고 하였다. 구체적인 문제 해결을 위해서 참가자 A는 1번 문을 선택하고 몬티는 염소가 숨겨져 있는 문을 연다고 하자. 몬티의 행동은 참가자 B의 선택에 대해 무엇을 말해주는가? 처음에 참가자 B가 문1, 문2, 문3을 열 확률은 서로 같다. 몬티가 문2를 열었다면 다음과 같은 세 가지 시나리오가 가능하다.

첫째, 참가자 B는 문3을 선택하였다. 이 경우 몬티는 2번 문을 열 수 밖에 없고 문2에 염소가 숨겨져 있을 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

둘째, 참가자 B가 문1을 선택하고 문1 뒤에 차가 숨겨져 있을 경우이다. 이 경우 몬티가 2번 문을 열 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 차가 문1 뒤에 숨겨져 있을 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 이 경우가 일어날 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다.

셋째, 참가자 B가 문1을 열고 문3뒤에 차가 숨겨져 있을 경우이다. 이 경우 몬티는 문2를 열 수 밖에 없다. 2번과 3번의 경우에 참가자 B가 1번 문을 선택할 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다. 1번의 경우에 참가자 B가 문3을 선택할 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

참가자 A의 시각에서 4가지 가능성이 있다. (참가자 B가 선택한 문, 차가 있는 장소)로 순서쌍을 나타내면 (3, 1), (3, 3), (1, 1), (1, 3)이다. 첫 번째와 두 번째의 경우 몬티는 문2를 열어야 한다. 즉, 참가자가 3번 문을 연다면 결과적으로 문1과 문3의 가능성에 대해 고려할 필요가 없다. 두 가지 시나리오가 일어날 확률이 $\frac{4}{7}$ 이고 각각의 확률이 서로 같다면 $P(3, 1) = P(3, 3) = \frac{2}{7}$ 이다. 남은 두 가지 경우는 서로 가능성이 같지 않다. 참가자 B가 참가자 A가 선택한 것과 같이 문1을 선택하였다고 하자. 차가 문1 뒤에 있다면 몬티는 임의적으로 문2를 열게 되어 이 때 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 차가 문3 뒤에 있다면 몬티는 문2를 열어야 한다. 이 경우가 일어날 가능성은 $\frac{3}{7}$ 이므로 각각의 확률은 $P(1, 1) = \frac{1}{7}$, $P(1, 3) = \frac{2}{7}$ 이다. 여기서 네 가지 경우 중에 참가자 A가 문을 바꾸는 경우는 (1, 3), (3, 3)이다. 각 경우의 확률은 $\frac{2}{7}$ 이므로 바꿈으로써 자동차를 얻을 확률은 $\frac{4}{7}$ 가 된다.

이와 같이 몬티홀 딜레마의 원래 문제와 함께 변형 문제까지 포함하면 조건부 확률에 대한 다양한 이해를 연습할 수 있으나 우리나라 고등학교 교육과정은 베이즈 정리를 사용하고 있지 않으므로 몬티홀 문제를 조건부 확률로 해결할 수 있도록 상황을 조금 조정하여 문제를 해결하고 있다.

2.2 교과서에 제시된 몬티홀 딜레마

2009 개정 교육과정에 따르면 고등학교 과정에서 「확률과 통계」라는 과목을 개설하고 있다. 「확률과 통계」는 2007 개정 교육과정에 제시된 고등 수학의 순열과 조합, 「미적분과 통계 기본」 또는 「적분과 통계」에 제시되었던 확률과 통계를 하나로 묶어 제시된 과목이다. 2009 개정 교육과정에 따른 교과서는 모두 9개 출판사에서 개발하였으나, 「확률과 통계」는

8개 출판사에서 개발하였다. 교과서에서 몬티홀 딜레마를 어떻게 활용하고 있는지 살펴보기 위하여 각 출판사의 확률 단원에서 몬티홀 딜레마를 어떻게 다루고 있는지 정리하였더니 <Table 2>와 같았다.

출판사	해당 단위	활용 방안
A 출판사	조건부 확률 단위 마무리	창의 사고력 문제로 활용
B 출판사	조건부 확률 단위 도입	단위 도입 읽을거리로 활용
C 출판사	조건부 확률 단위 마무리	읽을거리로 활용
D 출판사	조건부 확률 단위 마무리	창의 인성 키우기 문제로 활용
E 출판사	조건부 확률 단위 마무리	생활 속 수학 이야기로 활용
F 출판사	조건부 확률 단위 마무리	수행평가 문제로 활용
G 출판사		몬티홀 딜레마를 활용하지 않음
H 출판사	조건부 확률 단위 마무리	스스로 탐구하기 문제로 활용

Table 2. Application of Monty Hall dilemma on 「Probability and Statistics」 according to the 2009 revised curriculum; 2009 개정 교육과정에 따른 「확률과 통계」에 제시된 몬티홀 딜레마의 활용 방안

<Table 2>에서 제시한 바와 같이 대부분의 교과서가 몬티홀 딜레마를 다루고 있으며, 조건부 확률 단원의 마무리로 많이 활용하고 있음을 알 수 있다. 전체 8개의 출판사 중 7개의 출판사가 몬티홀 딜레마를 다루고 있었으며 읽을거리로 활용한 교과서가 3개, 탐구 문제로 활용한 교과서가 4개로 조건부 확률을 적용하는 문제로 다루는 경우가 하나 더 많았다. <Figure 2>는 읽을거리로 제시한 교과서와 탐구 문제로 제시한 교과서의 예를 구체적으로 나타낸 것이다.

현재 교육과정에 따른 교과서들을 분석할 때, 몬티홀 딜레마를 다룬 경우 조건부 확률과 관련지어 다루는 사례가 더 많음을 알 수 있다. 실제로 몬티홀 딜레마는 일반 확률로 다룰 수 있으나 바꾼다 바꾸지 않는다는 조건이 첨가되고, 문제 해결 방법 중 조건부 확률을 확장한 베이즈 정리로 문제를 해결할 수 있으므로 조건부 확률을 적용하는 문제로도 활용될 수 있다. 본 연구에서는 몬티홀 딜레마와 같은 확률과 관련된 딜레마 문제가 수업 시간에 어떻게 활용될 수 있는지, 어떤 장점이 있는지 구체적으로 살펴볼 것이다.

3 연구 방법

3.1 연구 참여자

본 연구는 서울 소재의 한 고등학교에 재학 중인 자연계반 학생 16명을 대상으로 실시되었으며 남녀의 비율은 남학생이 13명, 여학생 3명으로 여학생보다 남학생이 비교적 많게 구성되었다. 연구 참여자는 겨울방학 전 학교에 협조를 요청하여 사전 공고를 통해 자발적으로 참여한 학생들이다. 수업은 방과후 학교 수업의 일환으로 진행되었으며 한 모둠에 3명 또는 4명으로 구성하여 모두 5개의 모둠으로 이루어졌으며 한 모둠은 모두 동성으로

Figure 2. Monty Hall dilemma on textbooks [20, p. 92]; [9, p. 83]; 교과서에 사용된 몬티홀 딜레마 [20, p. 92]; [9, p. 83]

구성되었다.

수업을 실시한 교사는 교사경력 3년차의 여선생님으로 평소 수업은 교사가 중심이 되는 강의식 수업을 진행하는 교사였으나 연구자가 연구의 취지를 설명하였을 때 흔쾌히 연구에 참여할 것에 동의하여 수업을 진행하게 되었다. 교사와 학생들은 2년 동안 함께 공부를 해 와서 그런지 서로 교감이 잘 이루어지고 있는 상태였으며, 학생들도 교사의 평소 수업 방식을 잘 이해하고 따랐다. 이번 수업은 확률의 딜레마를 활용하여 학생들의 의사결정 능력을 알아보기 위한 것이므로 연구자와의 협의를 통해 평소 이루어지고 있는 강의식 수업이 아니라 소그룹토론과 전체 토론을 병행하는 수업을 채택하였다.

3.2 자료 수집 및 분석 방법

수업은 2013년 1월 8일에 이루어졌으며 120분 동안 이루어졌다. 주된 자료 수집방법은 모둠별 오디오 녹음과 비디오 녹화이다. 녹음기는 모둠별로 하나씩 놓고 소그룹 토론뿐 아니라 전체 토론 동안에 이루어지는 소집단별 반응을 녹음하였다. 녹음 자료로부터 실시될 분석을 뒷받침하기 위해 비디오 녹화는 칠판 앞에서 학생들을 초점으로 둔 비디오와 교실 뒤에서 교사의 활동과 전체 토론에 초점을 둔 비디오 2대로 실시하였다. 녹음 자료는 녹취록으로 만들어 분석에 활용하였으며, 학생들이 그날 쓴 수업 저널과 수업 후 교사의 인터뷰도 분석 대상이 되었다. 자료의 분석 방법은 수업 상황에서 일어난 일을 위주로 심

층적 기술 방법을 사용하였다.

3.3 수업 방법

몬티홀 딜레마를 적극적으로 활용하기 위하여 교과서에 제시된 탐구활동이나 문제를 사용하지 않고 교재를 준비하였다. 수업 교재의 구성은 몬티홀 딜레마의 이해를 바탕으로 조건부 확률의 개념을 도입하고, 마지막으로 조건부 확률을 활용하여 몬티홀 딜레마의 결과를 확인하는 과정으로 진행되었다. 교재에 몬티홀 딜레마, Savant와 Erdős의 주장을 각색하여 실었고 Savant와 Erdős의 주장의 근거를 실었다. 수업 진행은 먼저 아래와 같이 몬티홀 딜레마에 대한 설명과 이에 대해 $\frac{2}{3}$ 라고 답한 Savant와 $\frac{1}{2}$ 이라고 답한 Erdős의 글을 비교하여 제시한 글을 읽고 어떤 주장을 따를지 생각해보고 발표하도록 하였다.

이것은 미국 NBC방송의 ‘Let’s make a deal’이라는 프로그램에서 소개된 ‘몬티홀 딜레마’라는 매우 유명한 퀴즈이며 그 내용은 다음과 같다.

3개의 문이 있는데 하나의 문 뒤에는 고급 자동차가, 나머지 2개의 문 뒤에는 염소가 있다. 참가자가 3개의 문 중에서 하나를 선택하면 사회자는 나머지 2개의 문 중에서 염소가 있는 문 하나를 열어 보여준다. 이때, 사회자는 참가자가 최초로 선택한 문과 남은 하나의 문 중 다시 한번 선택할 수 있는 기회를 준다.

예를 들어, 참가자가 2번 문을 선택한다면 사회자가 염소가 있는 1번 문을 열어 염소를 보여주고, 참가자에게 문을 바꿀 수 있는 기회를 한 번 더 제공한다. 이때, 참가자는 2가지의 선택을 할 수 있다. 처음에 선택한 문을 바꾸지 않고 그대로 유지하거나 처음에 선택한 문을 버리고 남아 있는 다른 하나의 문을 선택할 수가 있다. 그리고 참가자는 최종 선택한 문을 열어 그 문 뒤에 고급 자동차가 있으면 자동차를 상품으로 받고 염소가 있으면 상품을 받지 못한다.

이러한 상황에 직면했을 때 선택한 문을 바꾸는 것이 좋을지 그대로 있는 것이 좋을지 궁금했던 사람들 중 한 명이 기네스북 최고의 IQ 보유자(IQ 228)인 매릴린 사반트(Marilyn von Savant)에게 해답을 구했고, 그녀는 1990년 9월 ‘퍼레이드’라는 잡지의 칼럼에서 다음과 같이 조언했다고 한다.

“자동차를 받고 싶다면 선택을 바꾸는 것이 2배로 유리하다. 처음의 선택을 바꾸지 않는다면 당첨될 확률이 $\frac{1}{3}$ 이지만, 다른 문으로 선택을 바꾸면 당첨될 확률이 두 배로 증가한다.”

그러나 실제로 이 칼럼이 공개되고 나서 매릴린 사반트는 수학자들을 비롯한 많은 독자들로부터 항의의 글을 받았다. 정수론의 대가 폴 에어디시(1913-1996, 헝가리)는 이 문제를 한 번 보고는 다음과 같이 이야기 했다.

“나는 선택을 바꾸는 것만으로 고급 자동차를 받을 확률이 달라진다는 사실에 동의할수 없다. 다른 문으로 옮기든 원래 문을 고집하든 확률은 $\frac{1}{2}$ 로 똑같은 테니까...”

Savant의 주장에 대해 쉽게 이해하지 못하는 학생들을 위해 <Figure 3>과 같이 Savant의 주장을 제시한 그림을 함께 첨부하였다.

Figure 3. Explanation of Savant on Monty Hall dilemma; 몬티홀 딜레마에 대한 Savant의 설명

학생들의 소그룹 토론 후 교사는 전체 토론을 이끌어 학생들의 의견을 조율한 후 학생들끼리 역할을 정해 사회자나 참가자가 되어 게임을 해보도록 하고, 마지막으로 시뮬레이션을 통해서 문을 바꾸는 전략을 선택했을 때 자동차를 받을 확률을 통계적으로 알아볼 수 있도록 구성하였다. 이러한 구성은 처음부터 의도했던 것은 아니지만 몬티홀 딜레마가 역사적으로 인정받은 순서를 그대로 따르고 있다. 학생들이 몬티홀 딜레마를 이해했다고 판단하면 교사는 몬티홀 딜레마를 활용하여 조건부 확률의 개념을 도입하고 그에 따른 문제를 해결하도록 하였다.

4 연구 결과

4.1 몬티홀 딜레마에 대한 학생들의 직관적인 이해

몬티홀 딜레마를 해결하기 위해 교사는 학생들의 직관적인 이해가 어떤 상태에 있는지 먼저 확인하였다. 교사는 몬티홀 딜레마를 들어본 사람이 있는지 확인한 후 들어봤다고 한 학생에게 먼저 설명을 하도록 한 후 다시 어떤 문제인지 다시 설명해 준 다음 학생들에게 바꿀 것인지 바꾸지 않을 것인지에 대해 답하도록 하였다.

교사: 무슨 상황인지 이해돼요? 문이 3개가 있는데 세 개의 문 중 하나의 문을 골라요, 세 개의 문 뒤에는 한 개의 문 뒤에만 차가 있고 여러분이 원하는 차 여러분이 원하는 아무거나 하세요 여러분이 원하는 무언가 있고 나머지 문 뒤에는 여러분이 원하지 않는 무언가 있어요 이 중에 문 하나를 고릅니다. 아직 애가 무엇인지는 안 보여준 상황에서 나머지 두 개의 문 중에서 최소한 1개는 뭐가 있어? 염소가 있을거야 그 염소가 있는 문을 열어요 사회자가 염소인 문을 열어 보여주고 다시 물어봐요, 그리고 묻습니다. 니가 원래 선택했던 문 그대로 할래 아니면 선택을 바꿀래? 이렇게 물어봐요 어떻게 할거야? 학생 B4는?

학생 B4: 저는 안 바꿀 것 같아요.

교사 : 왜요? 남자는 독심? 뭐 이런거?

학생 B4 : 맞아요

교사 : B3은?

B3 : 저요? 좀 생각 좀 해볼게요.

교사 : 생각 좀 해보세요... 학생 E2는 어떡할거야? 바꿀거야 안 바꿀거야?

학생 E2 : 안 바꿀거예요.

교사 : 안바꿀 것 같아요. 학생 A1은

학생 A1 : 저는 바꿉니다.

교사 : 바꿀 거예요? 학생 B1는요?

학생 B1 : 안 바꿀 거예요.

교사 : 학생 C1이는 어떡할 거야?

학생 C1 : 바꿀 것 같아요.

교사는 모두 6명의 학생에게 질문하였는데 바꾼다는 사람이 2명이었고 안 바꾼다 3명, 그리고 생각해본다고 답변한 학생이 1명이었다. 학생들은 바꾸어야 하는지 혹은 바꾸지 않아야 하는지 그 근거를 가지고 논하는 것이 아니라 단지 이런 상황에 자신이 처했다면 이렇게 할 것이라라는 입장에서 답한 것으로 보여진다. 바꾸지 않는다고 답한 학생 중 “시험볼 때 답을 표시했다가 바꾸었을 때 항상 틀렸어요.”라고 그 이유를 설명한 경우도 있었다. 다음에 이어진 소그룹 토론에서 5개의 모둠 중 5개의 모둠들 중 3분의 2라고 생각하는 모듬은 모두 2팀이었고, 2분의 1이라고 생각하는 모듬은 모두 3팀이었다. 다음은 2분의 1이라는 생각이 잘 바뀌지 않는 모듬의 소그룹 토론이다.

학생 E1 : 근데 전체 경우의 수를 찾아야지.

학생 E2 : 염소가 있을 경우는 3가지지.

학생 E1 : 왜 3가지야?

학생 E2 : 여기 있을 수도 있고 여기 있을 수도 있잖아 여기 있을 수 있고.

학생 E1 : 염소가 2마리잖아?

학생 E2 : 2마리고 문이 3개니까 여기, 여기, 여기 3가지잖아.

(중간 생략)

학생 E1 : 난 이걸 생각해 보겠어 (그림을 보고) 자동차를 갖고 싶을 경우 무조건 바꿀 경우 ...1번에 차가 있는 경우... 왜 여기서 $1/6$ 이 될까? 여기서 왜 없을 확률이 $1/6$ 이야?

학생 E2 : 여기서 먼저 $1/3$ 하고 그다음에 여기서 2개 중의 하나니까 $1/2$ 하니까 $1/6$ 이 되지.

학생 E1 : 전체? 둘을 더한 거야 이거는?

학생 E2 : 둘을 더한 거지.

(중간 생략)

교사 : 너희들이 의논해봐. 그대들은 다 $1/2$ 라는 거잖아 그지? 논리적으로 설명해봐.

학생 E2 : 어차피 반반이니까 바꾸나 안 바꾸나 똑같은 거 아냐?

학생 E3 : 읽어보면 확률을 바꿔야 하니까.

학생 E1 : 말이 안돼 난 이해가 안돼.

(중간 생략)

학생 E1 : 이게 당첨될 확률이 전체의 $\frac{1}{3}$ 이라는 거지 이게 전체 가지수.

학생 E3 : 여기서도 그러고 여기서도 $\frac{1}{3}$.

학생 E1 : 이걸 이미 열었는데 이미 열어서 보여준 다음에 그걸 확률로 생각 하는거 자체가 웃긴거 아닌가?

학생 E3 : 맞아, 이미 열었으니까 $\frac{1}{3}$ 은 버려야 하는 거 아닌가 연관이 없잖아.

이 학생들은 전체 경우의 수를 3가지로 생각하고 있었으며 그것은 염소가 배치될 수 있는 전체 경우의 수를 염두에 둔 것이다. 3개의 문 뒤에 2개의 문에 염소가 있어야 하므로 염소 두 마리가 배치되는 전체 경우의 수는 학생들의 말처럼 3가지라고 할 수 있다. 소그룹 토론의 내용을 읽어보면 학생들은 바꿀 때의 확률이 더 높다고 설명하고 있음을 교재의 설명을 읽어 이미 알고 있지만, 결국 2개의 문 중 하나에 차가 있으니 바꾸나 바꾸지 않으나 확률은 2분의 1로 바뀌지 않을 것이라 생각하고 있음을 알 수 있다. 특히 마지막 문장에 학생 E1과 E3의 대화를 보면 “이걸 이미 열었는데 이미 열어서 보여준 다음에 그걸 확률로 생각하는거 자체가 웃긴거 아닌가?”와 “이미 열었으니까 3분의 1은 버려야 하는 거 아닌가 연관이 없잖아”에서 학생들은 이미 열었다는 것 자체가 하나의 상황은 이미 끝난 것이고 결국 차를 얻을 수 있는 확률은 마지막 행동에서 결정된다고 생각하고 있다. 다음은 3분의 2라고 주장하는 모둠의 소그룹 토론이다.

학생 A1 : 이거 첫 번째 질문 왜 $\frac{1}{3}$ 이고 왜 $\frac{2}{3}$ 인지는 알지?

학생 A2 : 아 그거 뭐 나오는지? 보기 하나 지워주는 거 아니야? 어차피 지금 염소를 하나 보여주면 자동차는 나오는 경우는 2개 중 하나에 있는 거니까.

학생 A1 : 어?

학생 A2 : 그러니까 지금 선택을 하고 선택을 했으면 하나 보여주잖아 자동차를 골라야 하는데 염소를 고를 리 없을 것 아니야 보여주는 거는 자동으로 선택에서 지워지는 거 아니야.

학생 A3 : 처음에 했던 건 $\frac{1}{3}$ 의 확률인데 두 번째는 하나가 없어. 지는 거니까 3개 중에 2번 안고르는 거니까 3분의 2의 확률이라는 거잖아 그치?

학생 A2 : 그거 아니야?

학생 A1 : 염소를...1번을 선택했다고 해봐? 그러면 2번을 보여줄 것 아니야 그런데 3번이 차(car)지? 애(3번)는 안 돼 처음이 염소야 2번이 염소야 그러면

2번을 선택했다고 해봐 그러면 염소를 보여줄 거 아니야 그러면 이것도 안돼 염소를 고를 거야 여기서 차를 선택하면 안 바꾸면 차를 선택한 거야 3개 중에 하나가 차니까 $1/3$ 인 거고 두 번째 바꾼다고 하면 처음에 염소를 선택했을 때 바꾸면 차야 염소를 선택하면 (바꾸면) 차를 선택하게 되어 있어 그러니까 염소를 선택할 경우가 경우의 수가 2개야 그러니까 $2/3$ 여기서는 차를 선택할 경우만 $1/3$.

학생 A1의 설명이 있기 전에 다른 두 학생들은 왜 바꾸었을 때 3분의 2가 되는지에 설명을 타당하게 하지 못하고 단지 교재에 3분의 2가 옳은 설명으로 기술되어 있기 때문에 3분의 2가 된다고 생각하고 있음을 알 수 있다. 소그룹토론에서 나타난 학생 A1의 설명은 단순하지만 역사적으로 보았을 때 초기에 몬티홀 딜레마의 설명과 유사하며, 3분의 2가 되어야 한다는 타당성을 확률 개념을 이용해서 보여주고 있다. 학생 A1의 설명은 소그룹 토론 내에서 충분히 받아들여져서 그 모둠의 논의 결과는 바꾸었을 때의 확률이 3분의 2가 되므로 바꾸어야 한다고 결론 내렸다.

교사는 소그룹 토론을 확인한 후 전체 토론에서 먼저 2분의 1이라고 주장하는 모둠의 설명을 먼저 하도록 하고 그 후에 3분의 2라고 주장하는 팀이 설명하도록 하였다. 다음은 전체 토론에서 2분의 1이라고 주장하는 모둠과 3분의 2라고 주장하는 모둠의 설명이다.

학생 B1: 문이 세 개일 때, 두 개일 때는 진행하는 사람이 어차피 답이 아닌 문을 열자나요, 세 개나 두 개나 독립적인 경우라 생각하고, 그러면 두 개가 남았을 때 자기가 선택을 보존했을 때 맞을 경우와, 안 맞을 경우 2가지가 있고 바꿀 때 맞을 경우와 안 맞을 경우 총 4가지인데 결국 맞는 경우는 두 가지이기 때문에 확률은 $1/2$ 이라고 생각합니다.

학생 B1: (칠판에 설명을 쓰고 있음) 그러니까 선택을 보존했을 때 맞을 경우와, 안 맞을 경우, 바꿀 때 맞을 경우와 안 맞을 경우 총 4가지인데 결국 맞는 경우는 두 가지니까 $1/2$ 이 됩니다.

교사: 2분의 1이다. 네 잘했어요. 그러면 $2/3$ 인 것을 설명합니다. 학생 A2가 설명해 보세요.

학생 A2: 문이 세 개가 있는데 이 중 두 개는 염소가 있고 한 곳에 차가 있죠. 처음에 자기가 고른 문을 소신 있게 그대로 밀고 나갈 경우는 예를 들어 처음에 염소를 골랐어요. 그런데 안 바꿀 거니까 그대로 밀고 나갈 거 아니에요 첫 번째 골랐을 경우에는 염소가 나오죠. 그러면 차는 못 받아요. 두 번째 애를 골라요 애를 골랐는데 사회자는 다른 염소를 골라야 하니까 이걸 고르겠죠 자기는 그대로 밀고 나갈거니까 애는 또다시 염소가 나오고 마지막으로 차를

골랐을 때에는 이 중에서 아무거나 염소를 하나 보여주겠죠? 어차피 자기는 소신있게 밀고 나갈거니까 자신의 주장을 고수할 경우에는 차가 걸릴 확률은 $1/3$ 이 나와요, 그런데 만약 사회자가 보여주고 난 다음에 자기의 선택을 바꾸는 경우에는 절대 사회자는 자동차를 보여주지 않을 거니까 이걸 고르겠죠. 그럼 바꿀 때 차가 나오겠죠. 이번에 그 다음 염소를 골랐을 때는 이걸 고를 테니까 역시 차를 얻게 되죠 세 번째 선택했을 때에는 차를 골랐기 때문에 바꿨을 때는 무조건 염소가 나오게 되죠. 차가 나오게 될 확률은 바꾸었을 때 $2/3$ 가 되고 그래서 저 아줌마(메릴린)가 말한대로 바꾸었을 때 2배가 되는 것은 이것 때문입니다.

(학생들 박수)

학생 A2는 소그룹 토론에서 학생 A1이 한 설명을 듣고 몬티홀 딜레마에 대해 이해한 학생이며 전체 토론에서는 직접 나와 설명하였다. 그러나 이 설명은 소그룹토론과 달리 전체 학생들에게 바로 받아들여지지 못했다.

교사: 학생 B1가 말한 것처럼 바꿈(ox), 안바꿈(ox) 4가지인거고요, 학생 A2가 말한 건 전략을 본거죠 Keep 전략, 첫 전략을 유지, 바꾸는 change 전략, keep일 땐 차를 받을 확률은 $1/3$ 이죠, change 전략을 썼을 때는 $2/3$ 이 되어서 고수하는 것 보다 선택을 바꾸는 전략이 2배로 더 크다 알 수 있죠. 그죠? 처음에 2분의 1로 한 사람들 학생 B1아 처음 $1/2$ 가 아직도 맞는 것 같아? 어떻게 달라?

학생 B1: 경우가 달라요, 아직 생각해 봐야겠어요.

교사: 학생 E2는 어떤 것 같아요? 아직도 $1/2$ 같아?

학생 E2: ...?

학생 A1: 저는 이게 무조건 맞다고 생각합니다. $1/2$ 의 경우를 생각한다면 학생 B1이 말한 대로 처음에 무조건 염소 하나를 배제하는 경우잖아요 하나의 염소를 배제하고 얻은 경우의 수이기 때문에 여기서 사회자 이 사람이 설정한 세 개 중의 하나는 의미가 없게 되는 거라고 생각하거든요 학생 B1의 말대로는 문 2개로 시작하는 거고, 저의 말은 세 개로 시작하기 때문에 제 말이 확실히 맞다고 생각합니다.

교사 : 나와서 이야기해 볼까? 상황이 다르다는 거죠? 학생 B1가 이야기한 2개의 문의 상황이 아니라는 거죠? 문이 3개인데 하나를 없애버리면 상황이 바뀌어진다는 이런 이야기죠.

학생 A1 : 학생 B1의 말대로 하면, 사회자는 결국 어떤 것을 선택해도 염소 하나를 배제하게 되고 둘 중 하나를 고르게 된다고 해서 $1/2$ 이라는 거잖아요 그런데 우리 B1군의 말대로 하면 총 문 3개를 고려해서 나온 확률이기 때문에 사회자의 의도를 생각해보면 3개를 고려해서 차를 골라라 그러므로 세 개의 문을 다 고려해서 확률을 구해야 한다고 생각합니다. 그래서 $2/3$ 으로 봐야 한다고 봅니다.

(중간 생략)

학생 D1 : 저는 $2/3$ 이 아니라 $1/2$ 이 맞다고 생각합니다.

교사 : $2/3$ 이 아니라고 생각해요?

학생 D1: 선택을 두 번 하잖아요. 결국엔 자동차를 받기 위한 선택은 두 번 짜인데 두 번째 선택할 때 선택할 수 있는 경우의 수는 두 가지이기 때문에 $1/2$ 라고 생각해요. 최종적으로 선택했을 때 그때를 봐야할 것 같아요. 상품을 받으려면

학생 D1의 의견은 소그룹토론에서 2분의 1이라고 생각한 모둠의 설명과 같다. 즉, 학생들의 확률에 대한 직관적인 사고는 표본공간을 제대로 이해하지 못하는 것에서 출발하고 있음을 알 수 있다. 다시 말하면 몬티홀 딜레마의 문제 상황은 두 단계가 함께 이루어진 것으로 보아야 하는데 마지막 단계에만 초점을 맞추기 때문인 것으로 보인다. 소그룹토론과 전체 토론을 통해서 볼 때, 학생들의 직관이 바뀌는 것은 쉽지 않은 것으로 보인다.

계속 반복적으로 전개되는 이 상황을 해결하기 위해 교사는 학생들이 직접 사회자와 참가자가 되어 실험해볼 것을 제안했다. 몇 번의 실험을 하게 한 후, 실제 수업에서 충분히 많은 실험을 하는 것은 시간적인 제약이 따르므로 교사는 인터넷에 제시된 시뮬레이션을 활용하였다. 학생의 직관적인 이해는 수학적인 설명으로도 쉽게 바뀌지 않는다. 이 상황을 수학적으로 해결하는 것도 필요하지만 시뮬레이션을 통한 통계적 확률의 결과는 학생들이 문을 바꾸는 것이 상품을 얻을 확률이 더 높다는 것에 대한 확신을 주었다.

4.2 몬티홀 딜레마의 수업 적용

몬티홀 딜레마를 수업에 활용할 때의 장점은 의사결정을 위한 토론의 장을 열어준다는 것이다. 앞에서 소그룹토론과 전체 토론 과정에서 학생들은 자신이 생각하는 바가 무엇인지를 이야기 하였으며, 그 이유에 대해 서로 설득하기 위해 노력했다. 실제 수업을 담당한 교사는 몬티홀 딜레마가 주는 효과에 대해 다음과 같이 설명하였다.

교사: 그러니까, 조건부확률을 같은 경우는 오늘 수업이 딜레마와 관련된 거잖아요. 그니까 그.. 딜레마 상황일 때 이렇게도 볼 수 있고 저렇게도 볼 수 있다 라는 걸 생각을 할 때 그.. 정답만 찾고자 하면 말할 수 있는 거리가 되게 없어요. 정답이 아닌 거 같아요 라고도 말할 수 없는 데 이게 정답인 이유를 말을 하고 저게 정답인 이유를 말하면서 애들이 그 말이 오가면서 설득을 주고 받고 하는 그런 상황을 배우는 거잖아요. 저는 다른 단원은 모르겠는데 확률 단원에서는 그런 마음가짐 그런 긍정적인 태도가 좀 필요하다고 생각을 하거든요.

즉, 교사는 딜레마를 소재로 사용한 것이 수업에서 개방적인 접근이 될 수 있었던 계기가 되었다고 생각하였다. 의사결정을 위한 토론이 적극적으로 이루어진 것은 일반적으로 가질 수 있는 직관과 실제의 답이 서로 다르기 때문이다. Granberg와 Dorr [8]는 심리학자들이 몬티홀 딜레마에 관심을 가지는 이유가 두 단계로 이루어진 문제 상황이 실제 상황의 의사결정과 유사하기 때문이라고 설명하였다. 따라서 몬티홀 딜레마와 같은 의사결정 상황을 논리적으로 해결하는 경험은 일상생활에서의 합리적인 의사결정에도 도움을 줄 수 있다. 이와 같은 활동에 대해 학생 A1은 다음과 같이 수업 후 소감을 적었다.

그리고 하나의 문제를 풀어나갈때 토론형식으로 한 사람이 주장하고 또 다른 사람이 반박을 해주기 때문에 더욱 더 많은 경우를 생각하게 되고, 나의 주장에 대한 반박을 듣게됨으로써 나의 주장에서 부족한 점이 무엇이였는지 더 잘 이해 할 수 있었기 때문에 매우 흥미롭고 새로운 수업이 되었다.

둘째, 몬티홀 딜레마는 조건부 확률의 개념을 도입하고 활용하는 탐구 활동으로 활용할 수 있다. 교사는 <Figure 4>와 같은 몬티홀 딜레마에 대한 시뮬레이션¹⁾ 결과를 이용하여 1번의 시행을 한 사람이 한 선택이라고 했을 때, “전체 경우에서 한 명을 선택했을 때, 당첨될 확률을 구하여라.” “당첨된 사람들 중에서 한 명을 선택했을 때, 그 사람이 첫 번째 선택을 변경했을 확률을 구하여라”, “당첨되지 않은 사람들 중에서 한 명을 선택했을 때, 그 사람이 첫 번째 선택을 변경했을 확률을 구하여라.”와 같은 문제를 해결하도록 하였다. <Figure 4>는 처음 선택한 문을 그대로 유지하는 전략을 100번 시행했을 때의 결과와 처음 선택한 문을 바꾸는 전략을 100번 시행한 결과를 보여준다.

문제의 결과를 이용하여 표본공간에 따라 확률이 달라질 수 있음을 학생들이 이해할 수 있도록 하고 조건부 확률의 개념을 도입하였다. 시뮬레이션 전에 시행된 실험을 통해서 문제에 대한 활동을 이어나갈 수도 있었으나 학생들의 입장에서는 몬티홀 딜레마를 보다 잘 설명해줄

1) <http://www.grand-illusions.com/simulator/montysim.htm>

Figure 4. The result of Monty Hall simulation; 몬티홀 시뮬레이션의 결과

수 있는 숫자가 되어 보다 명쾌하게 설명이 되었고 통계적 확률의 개념도 같이 다룰 수 있어 보다 효과적이었다. 학생들은 표본공간에 따라 확률이 달라질 수 있음을 분명히 이해하였으며, 기본적인 확률 개념으로 계산한 몬티홀 딜레마의 풀이 방법을 조건부 확률을 이용하여 확인함으로써 조건부 확률이 필요에 의해 발생한 개념임을 이해할 수 있었다.

이 수업에서는 시간적인 제약으로 활용하지 않았지만 몬티홀 딜레마의 여러 조건을 변형하여 새로운 문제를 만들어 학생들이 학습한 조건부 확률을 연습하는 활동을 할 수도 있다. 문의 개수, 자동차의 수, 진행자가 문 뒤에 자동차가 있는 문을 알고 있는지 그렇지 않은지, 그리고 의도적으로 문을 여는지 그렇지 않은지에 따라 다양한 문제 상황을 제시할 수 있다.

5 결론

몬티홀 딜레마에 대해 다양한 학문 영역에서 관심을 갖는 이유는 문제 상황이 이해하기 쉬운데 반해 직관과 수학적으로 계산한 결과가 달라 수학적 계산 및 논리적 판단의 필요성을 제기하기 때문이다. 실제로 2009 개정 교육과정에 따른 고등학교 수학 교과서 「확률과 통계」에서 몬티홀 딜레마를 사용하지 않는 출판사는 거의 없었다. 본 연구는 몬티홀 딜레마가 다양한 방법으로 해결되었음에도 불구하고 계속적으로 관심을 가지는 이유에 대해 호기심을 가지면서 시작되었고, 문제에 대한 호기심에서 벗어나 몬티홀 딜레마를 활용한 수업 사례를 통하여 다양한 수업 활용 방안을 탐구하고자 하였다.

학생들의 수업 활동을 분석한 결과 확률에 대한 직관적인 이해는 쉽게 바뀌지 않는다는 심리학에서의 연구를 재확인할 수 있었다. 실제로 Grandberg와 Brown [7]의 심리학 연구에서는

세 개의 그룹으로 나누어 몬티홀 딜레마와 관련된 실험으로 사람들의 성향을 연구하였다. 각 그룹은 50번씩 몬티홀 게임을 하고 그에 따른 점수를 모두 합산하도록 했다. 첫 번째 그룹은 상품을 받으면 1점, 상품을 받지 않으면 0점을 받았고, 두 번째 그룹은 첫 번째 문을 그대로 유지해서 상품을 타면 1점 그리고 바꾸어서 상품을 타면 2점을 받았으며, 상품을 받지 않으면 0점을 받았다. 세 번째 그룹은 첫 번째 문을 그대로 유지해서 상품을 타면 1점 그리고 바꾸어서 상품을 타면 4점을 받았으며, 상품을 받지 않으면 0점을 받았다. 연구 결과 첫 번째 그룹은 10%가 처음 선택을 바꾸었으며, 두 번째 그룹은 43%, 세 번째 그룹은 36%가 처음 선택을 바꾸었다고 한다. 이와 같이 문을 바꾸도록 환경을 제공하였음에도 불구하고 쉽게 문을 바꾸지 못하는 이유는 시험 볼 때 답을 고쳐 쓰면 항상 답이 틀렸었던 것과 같이 과거의 경험이 수학적 사고를 방해하여 실생활과 확률 계산을 관련시키지 못하기 때문일 수도 있다. 그러나 Grandberg와 Brown [7]는 시행을 반복하면서 처음 선택을 바꾸는 경우가 빠른 속도로 증가한다는 것을 발견하였다. 결국 직관적인 이해가 바뀌려면 반복적인 시행을 통해서 가능성을 보여주고 있다. 그러한 의미에서 몬티홀 딜레마에 대한 시뮬레이션 활동은 학생들의 수학적 결과에 대한 확신을 주는 역할을 한다고 볼 수 있다.

이경화 [12]는 확률·통계 영역의 교수·학습에서 역사적 패러독스를 다룸으로써 확률·통계 개념의 수학적 과정에서 어떤 수학적 장애에 부딪혔는가를 이해할 수 있으며, 이를 통해 교실 수업에 활기를 불어일으켜 학생들의 수학에 대한 흥미와 동기를 함양할 수 있다고 주장한 바 있다. 확률에서 패러독스 또는 딜레마는 역사적인 근거를 가지고 있으므로 학생들의 사고 과정 또한 어느 정도 예상 가능하다. 예상되는 두 가지 또는 세 가지 경우에 대해 탐구하게 함으로써 자연스럽게 의사결정 과정을 경험하게 할 수 있다. 실제로 몬티홀 딜레마를 활용한 수업은 강의식 수업에 익숙한 학생들도 토론 학습에 쉽게 적응할 수 있는 계기를 마련해 주었으며, 서로의 주장을 듣고 이해하면서 확률에 대한 이해의 폭을 넓혀갈 수 있다.

또한, 몬티홀 딜레마는 조건부 확률을 제대로 이해하고 있는지 확인하는 차원에서 벗어나 조건부 확률 개념을 도입하는 탐구활동으로도 활용할 수 있다. 몬티홀 딜레마는 조금만 변형해도 새로운 문제가 될 수 있다. 문의 개수, 자동차의 수, 진행자가 문 뒤에 자동차가 있는 문을 알고 있는지 그렇지 않은지, 그리고 의도적으로 문을 여는지 그렇지 않은지에 따라 확률이 달라지며 다양한 활용 문제가 가능하다 [1,13]. Fischbein [3]은 다른 영역보다 확률 영역에서 특히 직관과 논리적 구조 사이의 관계가 중요하다고 하였다. 이러한 결과는 확률에 대한 다른 딜레마를 활용하였을 때도 유사한 결과를 이끌어 낼 수 있을 것으로 기대된다.

References

1. H. BAILEY, Monty Hall uses a mixed strategy, *Mathematics Magazine* 73(2) (2000), 135–141.
2. CHO C. M, PARK J. Y., KANG S. J., A Study on Geometrical Probability Instruction through Analysis of Bertrand's Paradox, *School Mathematics* 10(2) (2008), 181–197. 조차미, 박종률,

- 강순자, Bertrand's paradox의 분석을 통한 기하학적 확률에 관한 연구, *대한수학교육학회지 <학교수학>* 10(2) (2008), 181-197.
3. E. FISCHBEIN, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Reidel, Holanda, 1975.
 4. D. FRIEDMAN, Monty Hall's three doors: construction and deconstruction of a choice anomaly, *American Economic Review* 88 (1998), 933-946.
 5. R. D. GILL, The Monty Hall problem is not a probability puzzle, *Statistica Neerlandica* 65(1) (2011), 58-71.
 6. P. GORROOCHURN, *Classic problems of probability*, New Jersey: Wiley, 2012.
 7. D. GRANBERG, T. BROWN, (1995). The Monty Hall dilemma, *Personality and Social Psychology Bulletin* 21(7) (1995), 711-723.
 8. D. GRANBERG, N. DORR, Further exploration of two-stage decision making in the Monty Hall dilemma, *American Journal of Psychology* 111(4) (1998), 561-579.
 9. KIM W. K. et al, *Probability and Statistics*, Seoul : Visang Education, 2014. 김원경 외, 확률과 통계, 서울: 비상교육, 2014.
 10. LEE J. H., Historic Paradoxes of Probability and Statistics Usable in School Mathematics, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(4) (2011), 119-141. 이종학, 학교 수학에 활용 가능한 확률·통계 영역에서의 역사적 패러독스, *한국수학사학회지* 24(4) (2011), 119-141.
 11. LEE J. Y., LEE K. H., A Case Study of Creativity Development Using Simpson's Paradox for Mathematically Gifted Students, *The Journal of Educational Research in Mathematics* 20(3) (2010), 203-219. 이정연, 이경화, Simpson의 패러독스를 활용한 영재교육에서 창의성 발현 사례 분석, *대한수학교육학회지 <수학교육학연구>* 20(3) (2010), 203-219.
 12. LEE K. H., Study on the Didactic Transposition of the Concept of Probability, Unpublished doctoral dissertation of Seoul University, 1996. 이경화, 확률개념의 교수학적 변환에 관한 연구, 서울대학교 박사학위 논문, 1996.
 13. S. LUCAS, J. ROSENHOUSE, A. SCHEPLER, The Monty Hall problem, reconsidered, *Mathematics Magazine* 82(5) (2009), 332-342.
 14. J. P. MORGAN, N. R. CHAGANTY, R. C. DAHIYA, M. J. DOVIK, Let's make a deal: The player's dilemma, *The American Statistician* 45(4) (1991), 284-287.
 15. A. MORONE, A. FIORE, Monty Hall's Three Doors for Dummies, *Theory and Decision Library Series* 42 (2008), 151-162.
 16. J. ROSENHOUSE, *The Monty Hall problem*, New York: Oxford University Press, 2009.
 17. T. SLEMBECK, J. R. TYRAN, Do institutions promote rationality? An experimental study of the three doors anomaly, *Journal of Economic Behavior & Organization* 54 (2004), 337-350.
 18. J. SPRENGER, Probability, rational single-case decisions and the Monty Hall problem, *Synthese* 174 (2010), 331-340.
 19. SONG H. S., On the two Envelope-Paradox, *Logic Research* 6(1) (2003), 1-18. 송하석, 두 봉투의 역설에 대하여, *논리연구* 6(1) (2003), 1-18.
 20. WHANG S. W. et al, *Probability and Statistics*, Seoul : Sinsago, 2014. 황선욱 외, 확률과 통계, 서울: 신사고, 2014.