슬롯을 갖는 회전 원판의 주파수 수렴 현상에 대한 연구

A Study on the Frequency Convergence Phenomenon in a Rotating Circular Plate with Slots

황 성 택*. 김 성 진**. 유 정 훈*. 이 승 엽†

Seoung-Tack Hwang, Seong-Jin Kim, Jeong-Hoon Yoo and Seung-Yop Lee

(2010년 9월 6일 접수 ; 2010년 11월 1일 심사완료)

Key Words : Vibration(진동), Circular Plate(원판), Frequency-convergence(주파수 수렴), Slot(슬롯), Critical Speed(임계속도), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

A circular plate is the main part of a circular saw blade, which is widely used in industrial cutting tools. In experiments using a circular saw containing slots, we observed that a number of natural frequencies are simultaneously emerged in specific frequency regions. The interesting phenomenon is called the frequency convergence. Effects of design parameters such as the number, the length and the width of slots, on the frequency-convergence phenomenon are analyzed by FEM simulations using ALGOR. The frequency-convergence phenomenon will be intensified when the number, length and width of slots increase.

1. 서 론

회전하는 원판 진동은 Lamb과 Southwell⁽¹⁾이래로 주기적인 슬롯을 갖는 회전 톱에 대한 연구를 기반으로 많은 연구가 있어왔고^(2,4), 최근에는 하드 디스크 및 광 디스크를 포함한 정보저장기기 분야의 진동해석을 위해서 많은 연구들이 이루어져 오고 있다.

회전 원판의 횡방향 진동(transverse vibration)은 정지 관찰자의 절대 좌표계와 디스크에 고정되어 함께 회전하는 회전 좌표계 두 가지로 나타낼 수 있다. 정지한 원판의 횡방향 진동은 디스크의 굽힘 강성을 고려하는 원판으로 나타내는데 정지한 구조물의 진동과 비교하여 회전 원판에서 나타나는 중

요한 동역학적 특징은 회전에 의한 응력과 모드분리현상, 그리고 임계속도 및 플러터 속도 등을 들 수 있다^(5,6).

원판이 회전하게 되면서 면방향(in-plane)으로 원심력이 작용하여 반지름 방향과 원주 방향으로 응력이 발생한다. 따라서 회전 좌표계에서 측정된 진동모드의 고유진동수는 정지 시에 비하여 증가하게 된다. 또한 절대 좌표계에서 정지관찰자가 측정한 회전 원판의 고유진동수는 동일한 진동모드에 대해서 전진파(forward wave) 및 후진파(backward wave) 고유진동수 두 가지로 나타난다.

회전 톱을 비롯하여 많은 응용분야에서 원판은 의도적으로 만들어지거나 불가피하게 생겨난 주기적인 패턴 및 기하학적 비대칭성을 가지며, 이로 인해 원판의 진동 특성이 영향을 받게 된다⁽⁷⁻⁹⁾.

이 연구에서는 산업적으로 널리 활용되는 회전톱에서 특정한 주파수 대역에서 여러 개의 진동 모드들이 함께 나타나는 주파수 수렴(frequency-convergence) 현상을 실험을 통해 확인하고, 슬롯의 길이와 개수, 톱

† 교신저자; 정회원, 서강대학교 기계공학과

E-mail : sylee@sogang.ac.kr

Tel : (02)705-8638, Fax : (02)712-0799

* 정회원, 연세대학교 기계공학과

** 서강대학교 대학원 기계공학과

과 같은 설계 변수들이 이 현상에 미치는 영향을 유한요소 해석으로 알아본다.

2. 회전원판의 이론적 배경

2.1 운동방정식

회전하는 원판의 진동은 Fig. 1과 같이 디스크가 Ω 의 속도로 회전할 때 디스크에 고정된 좌표계를 이용하여 횡방향 진동 $w(r, \theta, t)$ 에 관한 운동방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽³⁾.

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^2 (D \nabla^2 w) - \frac{\partial}{r \partial r} \left(r \sigma_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\sigma_\theta \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) = 0 \quad (1)$$

여기서 ρ 와 h 는 디스크의 밀도와 두께이며 D 는 디스크의 굽힘강성이다. 정지 관찰자에 바라본 절대 좌표 ϕ 와 회전 좌표와는 $\phi = \theta + \Omega t$ 의 관계가 성립한다. 그리고 안쪽 경계 $r = a$ 에서는 고정된 경계조건을 가지며,

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

바깥쪽 경계 $r = b$ 에서는 자유단의 경계조건을 가진다.

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) = 0 \quad (4)$$

2.2 회전원판의 모드분리와 임계속도

회전원판의 고유진동수는 정지원판의 고유진동수와 다음과 같은 관계에 있다⁽¹⁾.

$$\omega_{mn}^2 = (\omega_{mn}^s)^2 + \Omega^2 (\alpha_n + n^2 \beta_n) \quad (5)$$

여기서, ω_{mn}^s 은 정지원판의 고유진동수를 나타내며 α_n 과 β_n 은 각각 원판 회전에 의한 반지름방향과 원주방향의 응력효과를 나타내는 값이다. 고유진동수 아래첨자 m 은 절원(nodal circle)을 의미하며 n 은

Fig. 1 schematic of a rotating annular plate

Fig. 2 Vibration modes of a circular plate

절지름(nodal diameter)을 의미한다. 원판에 발생하는 진동모드는 절점원과 절지름의 개수에 따라 다양한 형태가 나타나는데 Fig. 2는 몇 가지의 진동모드의 형태를 보여준다.

위의 고유진동수는 회전 좌표계에서 관찰된 것이므로 정지관찰자에서 측정된 고유진동수로 변환하면 각각 전진파 및 후진파 고유진동수로 나타난다.

$$\omega_{mn}^f = \omega_{mn} + n\Omega, \quad \omega_{mn}^b = \omega_{mn} - n\Omega \quad (6)$$

원판의 회전속도가 증가하면서 위의 식의 후진파 고유진동수는 0이 되는데 이때를 임계속도(critical speed)라 정의한다.

3. 회전원판 실험

3.1 시험원판 및 실험 장치

실험에 사용된 시험원판은 슬롯이 없는 환형 원판, 슬롯이 있는 환형 원판 및 실제 제품으로 쓰이는 환형원판에 날이 부착된 제품에 대해서 실험을 수행하였다. 실험에 이용된 25개의 동일한 반경방향 슬롯을 가진 환형 원판 및 제품에 대해서는 Fig. 3과 4에

Table 1 Annular plate dimensions and material properties

Outer radius	171.5 mm
Inner radius	90.0 mm
Thickness	2.4 mm
Slot length	13.8 mm
Slot width	2.2 mm
Modulus of elasticity	205 GPa
Density	7,850 kg/m ³
Poisson's ratio	0.29

Fig. 3 Annular plate containing 25 equally spaced, identical radial U-slots

Fig. 4 Test product containing annular plate containing 25 equally spaced, identical radial U-slots and blade tip

Fig. 5 Schematic of impact-testing in rotating circular plate

설명되어 있다. 원판의 기하학적 치수와 물성은 Table 1에 설명되어있다.

시험에 사용된 원판은 실제 회전을 위해 모터에 체결될 때, 모터 축($\phi 40$)과 원판의 양쪽 면에 $\phi 180$ 의 플랜지(flange)를 사용하여 체결된다. 시험에 사용된 측정장비로는 Polytec회사의 LDV(laser doppler vibrometer)를 사용하였으며, 모터는 삼상 유도전동기 1.5 kw, 2 HP, 3 PH, 60 Hz를 사용하였다. 모터 속도 제어는 상용화된 모터 속도 컨트롤러를 사용하였다.

3.2 실험 결과

회전 시 슬롯이 없는 $\phi 343$ 시험 원판에 관한 임팩트 실험 결과를 Fig. 6과 7에 나타내었다. 특정한 회전 속도에서 측정된 주파수 결과만을 갖고는 회전 원판의 모드 주파수를 구별하는 것이 쉽지 않지만 회전 속도를 증가시키면서 측정된 주파수를 함께 그린 waterfall그래프로는 진동 모드를 쉽게 판별할 수 있다. 실험에서는 회전 속도를 30 rpm의 간격으로 측정하였는데 Fig. 6은 0~1500 rpm까지, Fig. 7은 같은 조건에서 5000 rpm까지 실험한 결과를 보여준다.

Fig. 6을 살펴보면 정지 시 고유진동수가 154 Hz에서 한 개의 절지름을 갖는 (0,1)모드가 처음으로 나타나며 231 Hz에서 (0,0)모드가 약하게 나타나고 254 Hz에서 (0,2)모드가 나타난다. 원판이 회전하면서 정지 시 고유진동수가 두 개로 분리되는데 전진과 고유진동수와 다르게 (0,1)모드의 후진과 고유진동수는 매우 약하게 나타나지만 (0,2)모드 이상으로는 후진과 고유진동수를 확인할 수 있다. 후진과 고유진동수의 기울기를 선형이라 가정한다면 간단한 비례식을 통하여 임계속도(critical speed)를 예측할 수 있다. 절원 모드들은 절지름 모드들보다 고주파에서 나타나는데 진폭이 작으므로 실험에서는 명확

Fig. 6 Waterfall plot of a rotating test sample of ø343 (0~1500 Hz) without slot

Fig. 7 Waterfall plot of a rotating test sample of ø343 (0~5000 Hz) without slot

하게 관찰되지 않는데 Fig. 7에서 4591 Hz에 나타난 것은 (1,9)모드이다.

Fig. 8과 9는 Fig. 4에서 보여준 25개의 슬롯을 갖는 ø343의 실제 회전 톱 제품을 사용하여 실험한 결과를 보여준다. 블레이드 팁의 무게로 인해서 슬롯이 없는 경우에 비해서 전체적으로 고유진동수가 감소하며 유사한 모드 분리 현상을 관찰할 수 있다. 정지 시 137 Hz에서 (0,1)모드가 나타나며 198 Hz와 259 Hz에서 각각 (0,2)와 (0,3)모드가 나타난다. 그런데 Fig. 9를 살펴보면 정지 시 2300~2450 Hz 주변에서 많은 수의 진동 모드들이 겹치는 주파수 수렴 (frequency-convergence) 현상이 발생한다. Fig. 10은 주파수 수렴 구간을 자세히 보여주는데 분리되는

Fig. 9 Waterfall plot of a rotating test sample of ø343 product (0~5000 Hz) with slot

Fig. 8 Waterfall plot of a rotating test sample of ø343 product (0~1500 Hz) with slot

Fig. 10 Waterfall plot of a rotating test sample of ø343 product (1800~2800 Hz) with slot

모드들의 기울기가 서로 다르므로 여러 진동 모드들이 이 주파수 대역에 몰려 있음을 알 수 있다. 따라서 회전 톱의 경우 구간 회전 속도가 증가되면서 여러 진동 모드들이 전진파와 후진파로 분리되면서 특정 영역 내에서 고유진동수가 몰려 있는 것을 확인할 수 있다. 이러한 주파수 수렴 현상은 회전 톱의 경우 여러 진동 모드들을 동시에 가진시켜 진동 불안정성을 야기할 수 있다.

4. 슬롯 변수에 대한 영향

슬롯을 갖는 $\phi 343$ 제품의 실험에서 2300~2450 Hz 근처에서 여러 개의 고유진동수가 함께 나타나는 주파수 수렴 현상이 발생하였다. 회전 톱의 설계 인자에 따른 주파수 수렴 현상을 유한요소 해석을 사용하여 알아보는데 해석의 타당성을 위해 먼저 실험 결과를 유한요소 해석 결과와 비교하였다.

이 연구에서 해석에 사용되는 모델은 실험과 동일

하게 13.8 mm의 깊이와 2.2 mm의 폭의 25개 슬롯을 갖는 $\phi 343$ 제품과 슬롯이 없는 원판에 대해서 수행하였다. Autodesk사의 ALGOR를 이용한 유한요소해석에서는 13625개의 고체요소와 72232개의 절점으로 이루어진 모델이 사용되었다. 두 가지 경우에 대한 유한요소 해석에 의한 고유진동수를 Fig. 11에 나타내었다. 슬롯이 없는 경우에는 주파수 수렴 현상의 발생 없이 고유진동수가 증가하는 것에 비해서 25개의 슬롯을 갖는 경우는 2400 Hz 근처와 4000 Hz 근처 두 영역에서 주파수 수렴 현상이 발생함을 알 수 있다. Table 2는 2400 Hz 근처에서 고유진동수에 대한 유한요소 해석과 실험 결과를 비교하였다.

또한 상기와 같은 특정 영역의 주파수 대역에서 여러 개의 고유진동수가 함께 나타나는 주파수 수렴 현상에 영향을 미치는 설계 변수를 슬롯의 길이, 개수, 폭으로 선정하여 아래와 같이 유한요소 해석을 수행하였다

4.1 슬롯 길이에 따른 영향

슬롯의 길이가 주파수 수렴에 미치는 영향을 파악하기 위하여 Fig. 3의 표준 샘플에서 나타난 슬롯의 개수 및 폭은 25개와 2.2 mm로 동일한 조건이며, 13.8 mm 슬롯의 길이를 2 mm씩 증감시켜 9.8 mm에서 29.8 mm까지 유한요소 해석을 수행하여 Fig. 12와 13에 나타내었다.

Fig. 12는 슬롯의 변화에 따른 각 진동 모드별 기준으로 나타내었고 Fig. 13은 측정되는 고유진동수를 순서대로 그린 결과이다. 표준 제품의 슬롯 길이인 13.8 mm를 기준으로 슬롯의 길이를 증가시킬 때 (0,13) 모드 이상의 주파수에서 주파수 수렴이 발생하는 것을 확인하였는데 주파수 수렴이 발생하는 주파수 대역은 슬롯의 개수 만큼의 절지름 모드와 절지름 개수가 1/2이 되는 모드의 주파수 영역에서 수렴 구간이 발생한다. 즉 25개의 슬롯을 가진 경우는 (0,13) 모드와 (0,25) 모드의 고유주파수 구간으로 수렴이 발생한다. 또한 그림에서 슬롯의 길이가 상대적으로 커졌을 때, 수렴 구간을 형성하는 모드들 사이에서 고유주파수 값의 차이가 작아져서 주파수 수렴 구간이 좁아지게 됨을 확인할 수 있다. 그리고 슬롯의 길이가 증가함에 따라 각 수렴되는 주파수 영역이 전반적으로 감소함을 확인하였다. 슬롯의 길이가

Fig. 11 FEM analysis of natural frequencies of a rotating saw with/without slots

Table 2 Comparisons of FEM and experimental results of 343 ϕ product with 25 slots around 2400 Hz

$\phi 343$ product			
FEM		Exp.	Error(%)
Mode	Hz	Hz	
(0,13)	2320.45	2307	0.58
(1,7)	2386.99	2346	1.72
(0,14)	2464.24	2403	2.49
(1,8)	2510.43	2445	2.61

Fig. 12 Effect of slot-length on frequency convergence (mode based plot)

Fig. 14 Effect of slot-number on frequency convergence

Fig. 13 Effect of slot-length on frequency convergence (frequency based plot)

작아지는 9.8 mm와 11.8 mm의 경우에는 주파수 수렴 현상이 명확하게 나타나지 않는다.

4.2 슬롯 개수에 따른 영향

슬롯의 개수가 주파수 수렴에 미치는 영향을 파악하기 위하여 Fig. 3의 표준 샘플에서 슬롯의 개수를 4, 5, 14, 15, 24, 25개로 변화하였을 때 해석을 수행하였다. 슬롯의 길이와 폭은 각각 25.8 mm와 2.2 mm로 동일하다. 슬롯이 없는 경우와 비교하기 위하여 직경이 같은 환형 원판의 결과를 함께 Fig. 14에 나타내었다.

Fig. 14의 고유진동수는 진동 모드와 고유진동수를 연속적으로 그린 것이다. 이 연구 결과에서 슬롯 개수의 영향을 알아보기 위해서는 모드 해석 결과 중 사인 함수 모드들만 주파수 크기 순으로 정렬하여 번호를 붙였다. 주파수 수렴이 발생할 수 있는

슬롯 길이 이상인 경우(슬롯 길이 25.8 mm)에서도, 슬롯의 개수에 따라서 각 해석 모델마다 수렴 구간이 발생하는 위치가 변하며, 개수가 상대적으로 작은 4개와 5개의 경우에는 주파수 수렴 현상의 명확하게 나타나지 않는다. 그러나 슬롯 개수가 증가하면서 주파수 수렴 현상이 명확하게 나타남을 확인할 수 있으며, 수렴을 나타내는 구간의 주파수 영역도 고주파 쪽으로 변경됨을 알 수 있는데 그 이유는 주파수 수렴이 되는 영역이 슬롯 개수와 일치하거나 1/2이 되는 절지름을 갖는 진동모드의 주파수이기 때문이다.

또한 일정 길이의 슬롯에서 슬롯의 개수가 늘어나게 되면서 주파수 수렴 대역, 즉 포함되는 모드의 개수가 증가함을 알 수 있다.

4.3 슬롯 폭에 따른 영향

슬롯의 폭이 주파수 수렴에 미치는 영향을 파악하기 위하여 표준 샘플에서 슬롯의 폭을 1.1, 2.2, 3.3, 4.4 mm로 변경하였을 때 해석을 수행하였다. 슬롯의 길이와 개수는 25.8 mm, 25개로 동일하다. Fig. 15를 살펴보면, 슬롯의 폭이 증가될수록 상대적으로 주파수 수렴이 명확하게 발생함을 확인할 수 있다.

슬롯의 개수가 25개가 아닌 17개의 경우에 대해서 슬롯의 길이는 25.8 mm로 동일하고 슬롯의 폭은 1.1 mm에서 4.4 mm까지 같은 간격으로 변경될 때 순차적으로 나타나는 진동 모드의 고유진동수를 순차적으로 Fig. 16에 나타내었다. 슬롯의 개수가 17개가 되기 때문에 (0,17)모드가 생기는 2800 Hz 근처와 (0,9)모드가 발생하는 1900 Hz 영역에서 주파수 수렴 현상이

Fig. 15 Effect of slot-width on frequency convergence : slot number of 25

Fig. 16 Effect of slot-width on frequency convergence : slot number of 17

발생한다. 또한 슬롯의 폭이 커질수록 상대적으로 명확한 주파수 수렴 현상이 발생됨을 알 수 있으며 슬롯의 폭이 가장 작은 1.1 mm의 경우에는 주파수 수렴 구간이 넓어짐을 확인 할 수 있다.

5. 결 론

이 연구에서는 산업적으로 널리 활용되는 원형 회전 톱은 일정 간격으로 생긴 슬롯에 의해서 특정 영역의 주파수 대역에서 여러 개의 고유진동수가 함께 나타나는 소위 주파수 수렴(frequency-convergence) 현상이 발생함을 실험적으로 규명한다. 그리고 설계 변수인 슬롯의 길이, 슬롯의 개수, 슬롯의 폭이 주파수 수렴 현상에 미치는 영향을 유한요소법을 통하여 해석하였다.

(1) 슬롯을 가진 원판에 날이 붙은 제품의 경우 특정 영역의 주파수 대역에서 여러 개의 고유 진동수가 함께 나타나는 주파수 수렴 현상이 발생하였다. 유한요소 해석에 의해서 주파수 수렴 현상이 2400 Hz와 4000 Hz 근처에서 발생함을 확인하였고 이 주파수 수렴 구간은 슬롯 개수와 일치하거나 1/2이 되는 절지름을 갖는 진동모드의 주파수임을 확인하였다.

(2) 주파수 수렴 현상에 영향을 미치는 인자를 슬롯의 길이, 개수, 폭으로 선정하여 유한요소해석을 진행한 결과에 따르면, 슬롯의 길이 및 폭은 그 값이 증가 되어질 때, 주파수 수렴 구간 내에서 인접 모드간의 고유주파수 값의 차이가 작아져 보다 명확한 주파수 수렴 현상이 발생한다. 또한 슬롯의 개수가 증가되면서 수렴되는 구간의 주파수도 증가하며, 수렴 구간 내에 포함될 수 있는 모드의 개수가 증가된다.

참 고 문 헌

- (1) Lamb, H. and Southwell, R. V., 1921, "The Vibration of a Spinning Disk," Proceeding of the Royal Society, Vol. 99, pp. 272~280.
- (2) Mote, C. D., 1965, "Free Vibration of Initially Stressed Circular Disks," ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 87, pp. 285~264.
- (3) Eversman, W. and Dodson, R. O., 1969, "Free Vibration of a Centrally Clamped Spinning Circular Disk," AIAA Journal, Vol. 7, No. 10, pp. 2010~2012.
- (4) Chung, J. T., Kang, N. C. and Lee, J. M., 1996, "A Study on Free Vibration of Spinning Disk," KSME International Journal, Vol. 10, No. 2, pp. 138~145.
- (5) Lee, S.-Y., Kim, J.-D. and Kim, S., 2002, "Critical and Flutter Speeds of Optical Disks," Microsystem Technologies, Vol. 8, pp. 206~211.
- (6) Kim, J. and Lee, S.-Y., 2000, "Vibration Characteristics of a New Optical Disk with Initial Stress," Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers-A, Vol. 24, No. 10, pp. 2513~2519.
- (7) Mote, C. D., 1972, "Stability Control Analysis

of Rotating Plates by Finite Element: Emphasis on Slots and Holes,” Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 94, pp. 64~70.

(8) Nishio, S. and Marui, E., 1996, “Effects of Slots on the Lateral Vibration of a Circular Saw Blade,” International Journal of Machine Tools and

Manufacture, Vol. 36, No. 7, pp. 771~787.

(9) Lee, H., 2009, “Modal Vibration Characteristics of an Annular Disk Containing Evenly Spaced Narrow Radial Slots,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 19, No. 6, pp. 560~568.