경계조건에 따른 다중벽 탄소나노튜브의 유체유발 불안정성 변화

Flow-induced Instability of Multi-wall Carbon Nanotubes for Various Boundary Conditions

윤 경 재* · 송 오 섭†

Kyungjae Yun and Ohseop Song

(2010년 6월 10일 접수 ; 2010년 7월 8일 심사완료)

Key Words : Multi-wall Carbon Nanotubes(다중벽 탄소나노튜브), Flutter(플러터), Divergence(다이버전스), Critical Flow Velocity(임계유속), Boundary Conditions(경계조건), Van der Waals Forces(반데르발스 힘)

ABSTRACT

This paper studies the influence of internal moving fluid and flow-induced structural instability of multi-wall carbon nanotubes conveying fluid. Detailed results are demonstrated for the variation of natural frequencies with flow velocity, and the flow-induced divergence and flutter instability characteristics of multi-wall carbon nanotubes conveying fluid and modelled as a thin-walled beam are investigated. Effects of various boundary conditions, Van der Waals forces, and non-classical transverse shear and rotary inertia are incorporated in this study. The governing equations and three different boundary conditions are derived through Hamilton's principle. Numerical analysis is performed by using extended Galerkin's method which enables us to obtain more exact solutions compared with conventional Galerkin's method. This paper also presents the comparison between the characteristics of single-wall and multi-wall carbon nanotubes considering the effect of van der Waals forces. Variations of critical flow velocity for different boundary conditions of two-wall carbon nanotubes are investigated and pertinent conclusion is outlined.

1. 서 론

탄소나노튜브(carbon nanotubes ; 이하 CNT)는 기계적 특성 등이 매우 우수하여 다양한 분야에서 광범위한 연구가 수행되었다. 지금까지 연구결과에 의하면 CNT는 다른 어떠한 알려진 재료 보다 우수한 기계적 특성을 보이며, 또한 물리적, 화학적으로도 탁월한 특성 때문에 구조물 등의 요소로서 크게

각광받고 있다.

응용분야를 보면 수소저장 연료전지, 나노 와이 어, 나노 캡슐, 나노 핀셋, 단전자 소자, 가스센서, 의·공학용 미세 부품, 고기능 복합체 등에서 무한한 응용 가능성을 보여주고 있다. 이러한 이유로 CNT의 기계적 거동의 전체적인 이해가 CNT 응용 분야의 핵심이기 때문에 CNT의 기계적 거동에 대한 연구가 최근 많은 주요한 연구 대상이 되어왔다. 또한 가스를 저장하기 위한 나노 컨테이너와 유체를 수송하는 나노튜브로 사용될 수 있는 가능성을 지니고 있다. 특히, 나노튜브는 내부를 흐르는 유동 유체의 속도에 따라 그 거동 특성이 크게 달라지므로 이에 대한 연구가 필수적이다. 그러나 CNT의

† 교신저자; 정회원, 충남대학교 기계공학과
E-mail : songos@cnu.ac.kr
Tel : (042)821-5650, Fax : (042)822-5642

* 정회원, 국방과학연구소

기계적 거동에 관한 연구는 아직 활발하지 않으며, 특히 그 진동 특성들에 관한 연구는 초기 단계에 있다 할 수 있으며 비교적 최근에는, 나노기술까지 향하는 CNT의 잠재적 응용 관점에서, 탄성 셀과 보 모델을 사용한 CNT의 진동 모드를 연구하기 위한 노력들이 시도되어왔다.

CNT는 두 가지 종류로 나눌 수 있는데, 단일벽 탄소나노튜브(single wall carbon nanotube; 이하 SWCNT)와 다중벽 탄소나노튜브(multi wall carbon nanotube; 이하 MWCNT)로 나눌 수 있다. SWCNT는 한 개의 튜브로만 구성되어 있으며, MWCNT는 여러 개의 튜브가 동심원 형태로 배열되어 있다. MWCNT의 경우 각 튜브사이에 반데르발스(van der Waals) 힘 때문에 반경방향 진동모드가 발생하므로 반데르발스 힘의 효과를 고려한 MWCNT의 특성에 대한 연구가 활발히 진행되어지고 있다.

지금까지의 탄소나노튜브에 대한 연구동향을 살펴보면, Karl Sohlberg와 그의 공동연구자들⁽¹⁾은 연속체 모델링을 CNT의 진동에 적용하여 CNT 진동 분석에 관한 방법으로서 다양하고 효과적인 대안을 제시하였다. 또한 Q. Wang과 V. K. Varadan⁽²⁾은 다양한 압축하중 상태에서 SWCNT 안정성 해석을 위해 탄성보와 셀 모델을 사용하였으며, J. Yoon과 그의 공동연구자들은 양단 단순지지, 양단 고정 각각의 경우, 오일러 보(이하 EB) 이론을 적용하여 나노튜브 내부를 흐르는 유체가 자유진동에 미치는 영향, 나노튜브의 유체유동에 의한 구조적 불안정성⁽³⁾과 외팔보 나노튜브의 유체유동에 의한 플러터 불안정⁽⁴⁾에 관하여 연구하였다. 또한 C. M. Wang과 그의 공동연구자들⁽⁵⁾은 작은 중형비를 가진 CNT의 해석을 위해, 티모센코 보 (이하 TB) 모델을 사용하여 MWCNT의 자유진동해석을 하였으며 DQ방법(differential quadrature method)을 사용하여 중형비와 경계조건을 달리하며 운동방정식을 풀어 오일러 보의 결과와 비교하였다. 최근에는 Metin Aydogdu⁽⁶⁾ 등이 GSDT (generalized shear deformation beam theory)를 이용한 MWCNT의 자유진동해석을 수행하였다. Euler beam 이론에 기초한^(3,4,7-9) CNT의 유체유발진동 해석결과는 전단변형과 회전관성 효과가 무시됨으로 인해 CNT의 길이가 상대적으로 짧고 재질의 E/G(G: 전단탄성계수) 값이 큰 경우 고차진동모드로 갈수록 오일러 보 이론이 잘 맞지

않게 된다. 이러한 결과에 기초하여 최근 유체유동에 의한 CNT의 플러터 불안정성에 대한 연구⁽¹²⁾가 수행되었다. 그리고 유체유동에 의한 다중벽 탄소나노튜브의 안정성 해석을 통해 MWCNT의 유체유발 진동 모델을 유도하고 그에 따른 모드별 고유진동수 및 플러터가 발생하는 임계유속에 대한 연구⁽¹³⁾가 수행되었다.

이 연구에서는 두 개의 나노튜브사이에서 반경방향으로 작용하는 반데르발스 힘과 전단변형, 회전관성효과를 고려한 박판 보 모델(thin-walled beam model)^(7,10,11)에 기초하여 경계조건(외팔보, 양단단순지지, 양단고정) 변화에 따른 MWCNT의 플러터(flutter) 및 다이버전스(divergence) 불안정성 특성 변화에 대하여 고찰하였다. 또한 이를 SWCNT 경우에 대한 결과와 비교 분석하였다.

2. 이론 해석

2.1 변위장

MWCNT 내의 각점 A_1, A_2 의 변위 벡터를 변위 변수(kinematic variables)로 표시하면 다음과 같다 (Fig. 1).

$$\begin{aligned} u_1(s_1, z_1, t) &= u_{1o}(z_1, t) - Y_1(s_1) \phi_1(z_1, t) \\ v_1(s_1, z_1, t) &= v_{1o}(z_1, t) + X_1(s_1) \phi_1(z_1, t) \\ w_1(s_1, z_1, n_1, t) &= \\ &w_{1o}(z_1, t) + \theta_{Y_1}(z_1, t) [X_1(s_1) + n_1 \frac{dY_1}{ds_1}] \\ &+ \theta_{X_1}(z_1, t) [Y_1(s_1) - n_1 \frac{dX_1}{ds_1}] \\ &- \phi'_1(z_1, t) [F_{w_1}(s_1) + n_1 a_1(s_1)] \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} u_2(s_2, z_2, t) &= u_{2o}(z_2, t) - Y_2(s_2) \phi_2(z_2, t) \\ v_2(s_2, z_2, t) &= v_{2o}(z_2, t) + X_2(s_2) \phi_2(z_2, t) \\ w_2(s_2, z_2, n_2, t) &= \\ &w_{2o}(z_2, t) + \theta_{Y_2}(z_2, t) [X_2(s_2) + n_2 \frac{dY_2}{ds_2}] \\ &+ \theta_{X_2}(z_2, t) [Y_2(s_2) - n_2 \frac{dX_2}{ds_2}] \\ &- \phi'_2(z_2, t) [F_{w_2}(s_2) + n_2 a_2(s_2)] \end{aligned} \quad (1b)$$

여기에서, $u_{1o}, v_{1o}, w_{1o}, u_{2o}, v_{2o}, w_{2o}$ 는 각각 X, Y, Z 축 방향의 병진 변위이며, $\theta_{X_1}, \theta_{Y_1}, \phi_1, \theta_{X_2}, \theta_{Y_2}, \phi_2$ 는 X, Y, Z 축에 관한 회전 변위이다. $F_{w_1}(s_1), F_{w_2}(s_2)$

와 $n_1 a_1(s_1), n_2 a_2(s_2)$ 는 비틀림에 의해 발생하는 축방향 변위인 1차 와평함수와 2차 와평함수를 나타낸다⁽¹¹⁾. (n_1, s_1, z_1) 및 (n_2, s_2, z_2) 좌표는 각각 반경방향, 원주방향, 축방향 좌표를 나타낸다.

2.2 구성 방정식

MWCNT의 (n_1, s_1, z_1) 및 (n_2, s_2, z_2) 좌표에 관한 응력-변형을 관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{s_1 s_1} \\ \sigma_{z_1 z_1} \\ \sigma_{n_1 n_1} \\ \sigma_{n_1 z_1} \\ \sigma_{s_1 n_1} \\ \sigma_{s_1 z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{13}} & \overline{Q_{23}} & \overline{Q_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{s_1 s_1} \\ \epsilon_{z_1 z_1} \\ \epsilon_{n_1 n_1} \\ \gamma_{z_1 n_1} \\ \gamma_{s_1 n_1} \\ \gamma_{s_1 z_1} \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{s_2 s_2} \\ \sigma_{z_2 z_2} \\ \sigma_{n_2 n_2} \\ \sigma_{n_2 z_2} \\ \sigma_{s_2 n_2} \\ \sigma_{s_2 z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{13}} & \overline{Q_{23}} & \overline{Q_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{s_2 s_2} \\ \epsilon_{z_2 z_2} \\ \epsilon_{n_2 n_2} \\ \gamma_{z_2 n_2} \\ \gamma_{s_2 n_2} \\ \gamma_{s_2 z_2} \end{bmatrix} \quad (2b)$$

3D 응력을 두께방향 (n_1, n_2) 에 대하여 적분하여

s_1 와 z_1 , s_2 와 z_2 만의 함수인 2D 합응력과 합모멘트를 구하면 다음과 같다⁽¹¹⁾.

(a) Configuration

(b) Geometry

Fig. 2 Configuration and geometry of MWCNT

(X_1, Y_1, Z_1) : Global Coordinate System
 (n_1, s_1, z_1) : Local (Surface) Coordinate System

(X_2, Y_2, Z_2) : Global Coordinate System
 (n_2, s_2, z_2) : Local (Surface) Coordinate System

Fig. 1 Kinematic variables, coordinate system of thin-walled beam model for MWCNT

$$\begin{bmatrix} N_{z_1 z_1} \\ N_{s_1 z_1} \\ L_{z_1 z_1} \\ N_{n_1 z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{z_1 z_1}^{o_1} \\ \gamma_{s_1 z_1}^{o_1} \\ W_{M_1} \\ \epsilon_{z_1 z_1}^{n_1} \\ \gamma_{n_1 z_1} \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$\begin{bmatrix} N_{z_2 z_2} \\ N_{s_2 z_2} \\ L_{z_2 z_2} \\ N_{n_2 z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{z_2 z_2}^{o_2} \\ \gamma_{s_2 z_2}^{o_2} \\ W_{M_2} \\ \epsilon_{z_2 z_2}^{n_2} \\ \gamma_{n_2 z_2} \end{bmatrix} \quad (3b)$$

2.3 운동방정식과 경계조건

해밀턴의 변분원리를 이용하여 유체운동에 의한 MWCNT의 운동방정식과 경계조건을 유도하면 다음과 같다.

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (-\delta V + \delta K + \delta W_f + \delta W_{vdw}) dt = 0 \quad (4)$$

$t = t_0, t = t_1$ 에서

$$\delta u_{1o} = \delta v_{1o} = \delta w_{1o} = \delta \theta_{Y_1} = \delta \theta_{X_1} = \delta \phi_1 = 0$$

$$\delta u_{2o} = \delta v_{2o} = \delta w_{2o} = \delta \theta_{Y_2} = \delta \theta_{X_2} = \delta \phi_2 = 0$$

식(4)에서 MWCNT의 변형 에너지 V 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{1i1j} \epsilon_{1i1j} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{2i2j} \epsilon_{2i2j} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_C [N_{z_1 z_1} \epsilon_{z_1 z_1}^{o_1} + L_{z_1 z_1} \epsilon_{z_1 z_1}^{n_1} + N_{s_1 z_1} \gamma_{s_1 z_1}^{o_1} \\ &\quad + N_{s_1 z_1} \frac{A_{C_1}}{\beta_1} \phi'_1 + N_{n_1 z_1} \gamma_{n_1 z_1}] ds_1 dz_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \int_C [N_{z_2 z_2} \epsilon_{z_2 z_2}^{o_2} + L_{z_2 z_2} \epsilon_{z_2 z_2}^{n_2} + N_{s_2 z_2} \gamma_{s_2 z_2}^{o_2} \\ &\quad + N_{s_2 z_2} \frac{A_{C_2}}{\beta_2} \phi'_2 + N_{n_2 z_2} \gamma_{n_2 z_2}] ds_2 dz_2 \end{aligned} \quad (5)$$

식(4)에서 운동에너지 K 는 MWCNT의 운동에너지 K_p 와 유체운동 운동에너지 K_f 의 합이며 MWCNT의 운동에너지 K_p 는 식(6)과 같다.

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_1 [(\frac{\partial u_1}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v_1}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w_1}{\partial t})^2] d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_2 [(\frac{\partial u_2}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v_2}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w_2}{\partial t})^2] d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

파이프의 변형에 의한 2차 유동이 없다고 가정할 때, 유체의 운동은 파이프의 중심선을 따라 움직인다. 따라서 변형 후 파이프 중심선의 임의의 점에 대한 위치벡터를 $\vec{R}_{pc}$, 같은 점에서 유체의 위치벡터를 $\vec{R}_{f/pc}$ 라 할 때 그 관계식은 다음과 같다(Fig. 3).

$$\vec{R}_{f_1} = \vec{R}_{pc_1} + \vec{R}_{f_1/pc_1} \quad (7)$$

여기에서, $\vec{R}_{pc}$ 와 $\vec{R}_{f/pc}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\vec{R}_{pc_1} = u_1 \vec{I} + v_1 \vec{J} + (z_1 + w_1) \vec{K} \quad (8)$$

$$\vec{R}_{f_1/pc_1} = x_{b_1} \vec{i}_b + y_{b_1} \vec{j}_b \quad (9)$$

$\theta_{Y_1}, \theta_{X_1}, \phi_1 \ll 1$ 일 때, 식(8), (9)의 $(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$ 와 $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ 사이의 좌표 변환식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_b \\ \vec{j}_b \\ \vec{k}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & \theta_{Y_1} \\ -\phi_1 & 1 & \theta_{X_1} \\ -\theta_{Y_1} - \theta_{X_1} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} \quad (10)$$

그러므로 유체의 운동에너지는 다음과 같으며

$$K_f = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_f \vec{R}_{f_1} \cdot \vec{R}_{f_1} d\tau \quad (11)$$

Fig. 3 Displacement of MWCNT conveying fluid

식(1)을 식(8)에 대입한 후 이를 식(7)에 대입하고 그 결과를 식(11)에 대입하면 유체의 운동에너지와 병진변위와 회전변위의 함수로 나타낼 수 있다.

끝단($z_1 = L$)에서 유속 U_1 의한 가상일(δW_f)은 다음과 같다.

$$\delta W_f = - \int_0^{2\pi} \int_0^{(R_1 - \frac{h_1}{2})} \rho_{f_1} U_1 [\dot{u}_{10} + U_1 u_{10}'] \delta u_{10} + (\dot{v}_{10} + U_1 v_{10}') \delta v_{10} + \dot{w}_{10} \delta w_{10} \Big|_{z_1=L} r_1 dr_1 d\theta_1 \quad (12)$$

각 튜브사이의 작용하는 반데르발스(van der Waals; 이하 vdw) force에 의한 일은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta W_{vdw_1} = -c_1 (u_{2o} - u_{1o}) \quad (13a)$$

$$\delta W_{vdw_2} = c_1 (u_{2o} - u_{1o}) \quad (13b)$$

여기에서, c_1 은 반데르발스 상호작용계수(interaction coefficient), Δ 은 탄소-탄소 본드의 길이이며 다음과 같다.

$$c_1 = \frac{320 \times (2R_1) \text{erg/cm}^2}{0.16\Delta^2}$$

$$\Delta = 0.142 \text{ nm}$$

MWCNT의 변형에너지식 (5), MWCNT의 운동에너지식 (6), 유체의 운동에너지식 (11), 외력에 의한 가상일식 (12), van der Waals force에 의한 일식 (13)을 해밀턴의 변분원리식 (4)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 운동방정식과 경계조건을 유도할 수 있다.

운동방정식

$$\begin{aligned} \delta u_{1o} : & a_{44}^{(1)} (u_{1o}'' + \theta_{y_1}') = \\ & b_{1o}^{(1)} \ddot{u}_{1o} + m_{f_1} \ddot{u}_{1o} + 2m_{f_1} U_1 \dot{u}_{1o}' \\ & + m_{f_1} U_1^2 u_{1o}'' + c_1 (u_{2o} - u_{1o}) \\ \delta u_{2o} : & a_{44}^{(2)} (u_{2o}'' + \theta_{y_2}') = b_{2o}^{(2)} \ddot{u}_{2o} - c_1 (u_{2o} - u_{1o}) \\ \delta \theta_{y_1} : & a_{22}^{(1)} \theta_{y_1}'' - a_{44}^{(1)} (u_{1o}' + \theta_{y_1}) = (b_5^{(1)} + b_{15}^{(1)}) \ddot{\theta}_{y_1} \\ \delta \theta_{y_2} : & a_{22}^{(2)} \theta_{y_2}'' - a_{44}^{(2)} (u_{2o}' + \theta_{y_2}) = (b_5^{(2)} + b_{15}^{(2)}) \ddot{\theta}_{y_2} \end{aligned} \quad (14)$$

① 외팔보 경계조건( )

$$\begin{aligned} \text{at } z_1 = z_2 = 0 : & u_{1o} = \theta_{y_1} = 0, u_{2o} = \theta_{y_2} = 0, \\ \text{at } z_1 = L : & a_{44}^{(1)} (u_{1o}' + \theta_{y_1}') = 0, a_{22}^{(1)} \theta_{y_1}' = 0 \\ \text{at } z_2 = L : & a_{44}^{(2)} (u_{2o}' + \theta_{y_2}') = 0, a_{22}^{(2)} \theta_{y_2}' = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

② 양단 단순 지지 경계조건( )

$$\begin{aligned} \text{at } z_1 = 0, z_1 = L : & u_{1o} = a_{22}^{(1)} \theta_{y_1}' = 0 \\ \text{at } z_2 = 0, z_2 = L : & u_{2o} = a_{22}^{(2)} \theta_{y_2}' = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

③ 양단 고정 경계조건( )

$$\begin{aligned} \text{at } z_1 = 0, z_1 = L : & u_{1o} = \theta_{y_1} = 0, \\ \text{at } z_2 = 0, z_2 = L : & u_{2o} = \theta_{y_2} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

여기에서, $(\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial T}$, $()' = \frac{\partial()}{\partial \xi}$

$$\begin{aligned} a_{44}^{(1)} &= \int_C [K_{22}^{(1)} (\frac{dx_1}{ds_1})^2 + A_{44}^{(1)} (\frac{dy_1}{ds_1})^2] ds_1 \\ a_{44}^{(2)} &= \int_C [K_{22}^{(2)} (\frac{dx_2}{ds_2})^2 + A_{44}^{(2)} (\frac{dy_2}{ds_2})^2] ds_2 \\ a_{22}^{(1)} &= \int_C [K_{11}^{(1)} x_1^2 + K_{44}^{(1)} (\frac{dy_1}{ds_1})^2] ds_1 \\ a_{22}^{(2)} &= \int_C [K_{11}^{(2)} x_2^2 + K_{44}^{(2)} (\frac{dy_2}{ds_2})^2] ds_2 \end{aligned} \quad (18)$$

$a_{44}^{(1)}, a_{44}^{(2)}, a_{22}^{(1)}, a_{22}^{(2)}$ 는 각각 MWCNT의 전단 및 굽힘 강성계수이며, $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, (b_5^{(1)} + b_{15}^{(1)}), (b_5^{(2)} + b_{15}^{(2)})$ 는 각각 MWCNT의 단위길이 당 질량과 극관성모멘트를 나타낸다.

3. 수치 해석

3.1 무차원화

다음과 같이 무차원화된 파라미터들을 가정한다.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{z_1}{L}, \quad \overline{\eta}_1(\xi_1, T) = \frac{u_{10}(z_1, t)}{L}, \\ \overline{\Theta}_{Y_1}(\xi_1, T) &= \theta_{y_1}(z_1, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xi_2 &= \frac{z_2}{L}, \quad \bar{\eta}_2(\xi_2, T) = \frac{u_{20}(z_2, t)}{L}, \\
 \bar{\Theta}_{Y_2}(\xi_2, T) &= \theta_{y_2}(z_2, t), \\
 \bar{u} &= \sqrt{\frac{m_f L^2}{a_{22}}} U, \quad T = \sqrt{\frac{a_{22}^{(1)}}{b_1^{(1)} + m_{f_1}}} \frac{t}{L^2}, \\
 \beta &= \frac{m_{f_1}}{b_1^{(1)} + m_{f_1}}, \\
 \sigma_1 &= \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{44}^{(2)} L^2}, \quad \sigma_2 = \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{44}^{(2)} L^2}, \\
 \gamma_1 &= \left(\frac{b_5^{(1)} + b_{15}^{(1)}}{b_1^{(1)} + m_{f_1}} \right) \frac{1}{L^2}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{b_5^{(2)} + b_{15}^{(2)}}{b_1^{(2)} + m_{f_2}} \right) \frac{1}{L^2}, \\
 \Phi_1 &= \frac{c_1 L^4}{a_{44}^{(1)}}, \quad \Phi_2 = \frac{c_1 L^4}{a_{44}^{(2)}}
 \end{aligned} \tag{19}$$

여기에서, $b_1^{(1)}$, $b_1^{(2)}$ 은 MWCNT의 단위길이 당 질량이며, m_{f_1} 은 유체의 단위길이 당 질량이다. 그리고 Φ_1 , Φ_2 는 반데르발스 계수의 무차원화 된 값이다.

식 (19)를 운동방정식 (14) 및 경계조건 식 (15)~(17)에 대입하면, 다음과 같은 무차원화된 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \bar{\Theta}_{Y_1}' + \bar{\eta}_1'' &= \sigma_1 \bar{\eta}_1 + 2\sigma_1 \bar{u}_1 \beta^{\frac{1}{2}} \bar{\eta}_1' + \sigma_1 \bar{u}_1^2 \bar{\eta}_1'' - \Phi_1 (\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1) \\
 \bar{\Theta}_{Y_2}' + \bar{\eta}_2'' &= \sigma_2 \bar{\eta}_2 + 2\sigma_2 \bar{u}_2 \beta^{\frac{1}{2}} \bar{\eta}_2' + \sigma_2 \bar{u}_2^2 \bar{\eta}_2'' + \Phi_1 (\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1) \\
 \sigma_1 \bar{\Theta}_{Y_1}'' - \bar{\Theta}_{Y_1} - \bar{\eta}_1' &= \sigma_1 \gamma_1 \bar{\Theta}_{Y_1} \\
 \sigma_2 \bar{\Theta}_{Y_2}'' - \bar{\Theta}_{Y_2} - \bar{\eta}_2' &= \sigma_2 \gamma_2 \bar{\Theta}_{Y_2}
 \end{aligned} \tag{20}$$

① 외팔보 경계조건( )

$$\begin{aligned}
 \text{at } \xi_1 = \xi_2 = 0; \quad \bar{\eta}_1 &= \bar{\Theta}_{Y_1} = 0, \quad \bar{\eta}_2 = \bar{\Theta}_{Y_2} = 0 \\
 \text{at } \xi_1 = 1; \quad \bar{\Theta}_{Y_1} + \bar{\eta}_1' &= 0, \quad \sigma_1 \bar{\Theta}_{Y_1}' = 0 \\
 \text{at } \xi_2 = 1; \quad \bar{\Theta}_{Y_2} + \bar{\eta}_2' &= 0, \quad \sigma_2 \bar{\Theta}_{Y_2}' = 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

② 양단 단순 지지 경계조건( )

$$\begin{aligned}
 \text{at } \xi_1 = 0, \quad \xi_1 = L; \quad \bar{\eta}_1 &= \sigma_1 \bar{\Theta}_{Y_1}' = 0 \\
 \text{at } \xi_2 = 0, \quad \xi_2 = L; \quad \bar{\eta}_2 &= \sigma_2 \bar{\Theta}_{Y_2}' = 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

③ 양단 고정 경계조건( )

$$\begin{aligned}
 \text{at } \xi_1 = 0, \quad \xi_1 = L; \quad \bar{\eta}_1 &= \bar{\Theta}_{Y_1} = 0 \\
 \text{at } \xi_2 = 0, \quad \xi_2 = L; \quad \bar{\eta}_2 &= \bar{\Theta}_{Y_2} = 0
 \end{aligned} \tag{23}$$

3.2 고유치 문제 및 모드 형상

Extended Galerkin's method를 사용하여 위의 고유치문제의 해를 구하기 위하여 다음과 같이 해를 가정한다.

$$\bar{\eta}_1(\xi_1, T) = \sum_{j=1}^N a_{1j}(T) \phi_{1j}^{(1)}(\xi_1) \tag{24a}$$

$$\bar{\Theta}_{Y_1}(\xi_1, T) = \sum_{j=1}^N b_{1j}(T) \phi_{2j}^{(2)}(\xi_1) \tag{24b}$$

$$\bar{\eta}_2(\xi_2, T) = \sum_{j=1}^N a_{2j}(T) \phi_{2j}^{(1)}(\xi_2) \tag{24c}$$

$$\bar{\Theta}_{Y_2}(\xi_2, T) = \sum_{j=1}^N b_{2j}(T) \phi_{2j}^{(2)}(\xi_2) \tag{24d}$$

여기에서 외팔보인 경우, 시험함수는 내부 유동유체가 없는 경우의 한단 고정, 타단 자유의 경계조건을 만족시키는 TB의 고유함수를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_{1j}^{(1)}(\xi_1) = \frac{1}{\omega_{1j}^2} (-\phi_{1j}^{(2)}(\xi_1))''' \tag{25a}$$

$$\phi_{2j}^{(1)}(\xi_2) = \frac{1}{\omega_{2j}^2} (-\phi_{2j}^{(2)}(\xi_2))''' \tag{25b}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{1j}^{(2)}(\xi_1) &= -[q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \text{Cos}(p_j)] \text{Cosh}(q_j \xi_1) \\
 &\quad + [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sinh}(q_j \xi_1) \\
 &\quad + [q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \text{Cos}(p_j)] \text{Cos}(p_j \xi_1) \\
 &\quad + \frac{q_j^3}{p_j^3} [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sin}(p_j \xi_1)
 \end{aligned} \tag{25c}$$

$$\begin{aligned}\phi_{2j}^{(2)}(\xi_2) = & -[q_j \cosh(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \cos(p_j)] \cosh(q_j \xi_2) \\ & + [q_j \sinh(q_j) + p_j \sin(p_j)] \sinh(q_j \xi_2) \\ & + [q_j \cosh(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \cos(p_j)] \cos(p_j \xi_2) \\ & + \frac{q_j^3}{p_j^3} [q_j \sinh(q_j) + p_j \sin(p_j)] \sin(p_j \xi_2)\end{aligned}\quad (25d)$$

단순 지지의 경우, 시험함수 ϕ_j 는 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned}\phi_{1j}^{(1)}(\xi_1) &= \sin(j\pi\xi_1), \\ \phi_{2j}^{(1)}(\xi_2) &= \sin(j\pi\xi_2)\end{aligned}\quad (26a)$$

$$\begin{aligned}\phi_{1j}^{(2)}(\xi_1) &= \cos(j\pi\xi_1), \\ \phi_{2j}^{(2)}(\xi_2) &= \cos(j\pi\xi_2)\end{aligned}\quad (26b)$$

양단 고정인 경우, 시험함수는 내부 유동유체가 없는 경우의 경계조건을 만족 시키는 TB의 고유함수를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_{1j}^{(1)}(\xi_1) = \frac{1}{\omega_{1j}^2} (-\phi_{1j}^{(2)}(\xi_1))''' \quad (27a)$$

$$\phi_{2j}^{(1)}(\xi_2) = \frac{1}{\omega_{2j}^2} (-\phi_{2j}^{(2)}(\xi_2))''' \quad (27b)$$

$$\begin{aligned}\phi_{1j}^{(2)}(\xi_1) = & q_{1j}^3 [\cosh(q_{1j}) - \cos(p_{1j})] \cosh(q_{1j} \xi_1) \\ & - [q_{1j}^3 \sinh(q_{1j}) - p_{1j}^3 \sin(p_{1j})] \sinh(q_{1j} \xi_1) \\ & - q_{1j}^3 [\cosh(q_{1j}) - \cos(p_{1j})] \cos(p_{1j} \xi_1) \\ & - \frac{q_{1j}^3}{p_{1j}^3} [q_{1j}^3 \sinh(q_{1j}) - p_{1j}^3 \sin(p_{1j})] \sin(p_{1j} \xi_1)\end{aligned}\quad (27c)$$

$$\begin{aligned}\phi_{2j}^{(2)}(\xi_2) = & q_{2j}^3 [\cosh(q_{2j}) - \cos(p_{2j})] \cosh(q_{2j} \xi_2) \\ & - [q_{2j}^3 \sinh(q_{2j}) - p_{2j}^3 \sin(p_{2j})] \sinh(q_{2j} \xi_2) \\ & - q_{2j}^3 [\cosh(q_{2j}) - \cos(p_{2j})] \cos(p_{2j} \xi_2) \\ & - \frac{q_{2j}^3}{p_{2j}^3} [q_{2j}^3 \sinh(q_{2j}) - p_{2j}^3 \sin(p_{2j})] \sin(p_{2j} \xi_2)\end{aligned}\quad (27d)$$

여기에서, $p_{1j}, p_{2j}, q_{1j}, q_{2j}$ 는 다음과 같으며, s_{1j}, s_{2j} 는 양단 고정정보의 j 번째 고유치이다.

위 식 (25)~(27)을 운동방정식 (22)와 경계조건식 (23)~(25)에 대입한 후 적분을 수행하고 행렬식으로

정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (28)$$

여기에서, $\{\ddot{q}\}, \{\dot{q}\}, \{q\}$ 및 $[M], [C], [K]$ 는 다음과 같다.

$$\{\ddot{q}\} = \begin{bmatrix} \ddot{a}_{1j} \\ \ddot{a}_{2j} \\ \ddot{b}_{1j} \\ \ddot{b}_{2j} \end{bmatrix}, \quad \{\dot{q}\} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{1j} \\ \dot{a}_{2j} \\ \dot{b}_{1j} \\ \dot{b}_{2j} \end{bmatrix}, \quad \{q\} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ b_{1j} \\ b_{2j} \end{bmatrix}$$

$$M_{1i1j}^{(11)} = \sigma_1 \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1$$

$$M_{1i1j}^{(22)} = \gamma_1 \sigma_1 \int_0^1 \phi_{1j}^{(2)} \phi_{1i}^{(2)} d\xi_1$$

$$M_{2i2j}^{(22)} = \gamma_2 \sigma_2 \int_0^1 \phi_{2j}^{(2)} \phi_{2i}^{(2)} d\xi_2$$

$$C_{1i1j}^{(11)} = 2\beta_1^{\frac{1}{2}} \sigma_1 \overline{u_1} \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)'} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1$$

$$C_{2i2j}^{(11)} = 2\beta_2^{\frac{1}{2}} \sigma_2 \overline{u_2} \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)'} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_2$$

$$\begin{aligned}K_{1i1j}^{(11)} = & \sigma_1 \overline{u_1^2} \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)''} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1 - \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)'} \phi_{1i}^{(1)'} d\xi_1 \\ & + [\phi_{1j}^{(1)'} \phi_{1i}^{(1)}]_0^1 - \Phi_1 \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{2i2j}^{(11)} = & \sigma_2 \overline{u_2^2} \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)''} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_1 - \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)'} \phi_{2i}^{(1)'} d\xi_2 \\ & + [\phi_{2j}^{(1)'} \phi_{2i}^{(1)}]_0^1 - \Phi_2 \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_2\end{aligned}$$

$$K_{1i1j}^{(12)} = - \int_0^1 \phi_{1j}^{(2)'} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1 + [\phi_{1j}^{(2)} \phi_{1i}^{(1)}]_0^1 \quad (29)$$

$$K_{2i2j}^{(12)} = - \int_0^1 \phi_{2j}^{(2)'} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_2 + [\phi_{2j}^{(2)} \phi_{2i}^{(1)}]_0^1$$

$$K_{1i1j}^{(21)} = \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)'} \phi_{1i}^{(2)} d\xi_1$$

$$K_{2i2j}^{(21)} = \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)'} \phi_{2i}^{(2)} d\xi_2$$

$$\begin{aligned}K_{1i1j}^{(22)} = & -\sigma_1 \int_0^1 \phi_{1j}^{(2)''} \phi_{1i}^{(2)} d\xi_1 \\ & + \int_0^1 \phi_{1j}^{(2)} \phi_{1i}^{(2)} d\xi_1 + \sigma_1 [\phi_{1j}^{(2)'} \phi_{1i}^{(2)}]_0^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{2i2j}^{(22)} = & -\sigma_2 \int_0^1 \phi_{2j}^{(2)''} \phi_{2i}^{(2)} d\xi_2 \\ & + \int_0^1 \phi_{2j}^{(2)} \phi_{2i}^{(2)} d\xi_2 + \sigma_2 [\phi_{2j}^{(2)'} \phi_{2i}^{(2)}]_0^1\end{aligned}$$

$$K_{1i2j}^{(11)} = \Phi_1 \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1$$

$$K_{2i1j}^{(11)} = \Phi_2 \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_2$$

상기 식 (29)를 상태공간방법으로 표현하면, 다음과 같다.

$$\{\dot{Z}\} = [A]\{Z\} \quad (30)$$

$$\{Z\} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}, [A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (31)$$

식 (30)의 해는 $e^{\lambda t}$ 형태이며 $|[A] - \lambda I| = 0$ 을 만족시키는 고유치 $\bar{\lambda}_r$ 에 의해 안정성이 결정된다. 고유치는 감쇠가 존재하는 경우 다음과 같은 복소수의 형태로 표현된다.

$$\bar{\lambda}_r = \bar{\alpha}_r \pm i\bar{\omega}_r \quad (32)$$

여기에서, $\bar{\alpha}_r$ 은 감쇠, $\bar{\omega}_r$ 은 고유진동수를 나타내며 각각의 고유진동수에 대한 계수벡터 값은 모드 형상을 나타낸다.

이 연구의 수치해석에 사용된 MWCNT 및 유체의 재료 특성은 다음과 같다.

$$E = 1 \text{ TPa}, G = 0.4 \text{ TPa}, \nu = 0.25$$

$$\rho_1 = 2.3 \text{ g/cm}^3, \rho_2 = 2.3 \text{ g/cm}^3,$$

$$\rho_{f_1} = 1 \text{ g/cm}^3$$

3.3 안정성

CNT의 안정성은 식 (32)의 고유치 $\bar{\lambda}_r$ 의 실수부인 $\bar{\alpha}_r$ 의 부호에 의해 결정된다. 즉, $\bar{\alpha}_r < 0$ 이면 안정, $\bar{\alpha}_r > 0$ 이면 불안정이다. 특히, $\bar{\alpha}_r > 0$ 인 경우 중, $\bar{\omega}_r \neq 0$ 이면 플러터(flutter) 형태의 불안정, $\bar{\omega}_r = 0$ 이면 발산(divergence) 형태의 불안정성을 나타내게 된다.

3.4 무차원 상대 유속

무차원화 된 유속의 상대비교를 위해, 상대 유속을 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{U}_{rel} = u_1 R_1 \frac{1}{L} \quad (33)$$

여기에서, $\bar{R}_1 = \sqrt{\frac{m_{f_1}^*}{a_{22}^{(1)*}}} / \sqrt{\frac{m_{f_1}}{a_{22}^{(1)}}}$, $\bar{L} = \frac{L}{L^*}$ 이며, $(\cdot)^*$ 는 $h_1 = 20 \text{ nm}$, $L = 800 \text{ nm}$, $R_{1o} = 40 \text{ nm}$ 일 때의 수치이다.

4. 해석결과 및 고찰

Figs. 4, 5, 6은 MWCNT와 참고문헌 (12)에서 제시한 SWCNT의 유속 변화에 따른 TB의 처음 저차 3개 고유치의 변화에 대한 비교를 그림으로 나타내고 Figs. 7, 8, 9는 고유치의 실수부를 x축에 허수부를 y축에 표시하여 경계조건에 대해서 플러터 및 정적불안정(divergence)이 발생하는 임계유속 값에

Fig. 4 Variation of natural frequencies with fluid velocity for cantilevered case (TB)

Fig. 5 Variation of natural frequencies with fluid velocity for simply supported case (TB)

Fig. 6 Variation of natural frequencies with fluid velocity for clamped-clamped case(TB)

Fig. 7 Variation of real and imaginary parts of eigenvalues with fluid velocity for cantilever case (TB)

Fig. 8 Variation of real and imaginary parts of eigenvalues with fluid velocity for simply supported case(TB)

대한 MWCNT와 SWCNT(참고문헌 (12))의 결과를 비교 확인하였다.

Fig. 4는 경계조건이 외팔보인 경우로서, 수학적으로 실수부가 음수에서 양수로 변하는 점에서의 임계유속이 되며 이때 플러터(flutter)가 발생한다. 즉, 물리적으로 임계유속에서 MWCNT의 외팔보가 계속해서 떨리는 동적 불안정성 현상을 나타내게 된다. 현 조건에서 임계유속은 2차 모드에서 발생하는 것을 알 수 있다. Figs. 5, 6은 경계조건이 양단 단조 지지보 및 양단 고정보인 경우로서, 수학적으로 허수부가 점점 감소하여 0이 되는 점에서 임계유속이 되며, 이때 정적불안정(divergence)이 발생된다. 즉, 물리적으로 임계유속이상에서 MWCNT가 좌굴형태로 유지되는 정적 불안정성 현상을 나타낸다. 현 조건에서 최저 임계유속은 1차 모드에서 발생하며 양단 고정인 경우의 최저 임계유속 값이 양단 단조 지지인 경우의 최저 임계유속 값보다 약 2 배 정도 크다는 것을 수 있다. 또한 Figs. 5, 6에서 유체유동이 없거나 유속이 작은 경우에는 SWCNT가 MWCNT보다 고유진동수가 큰 값을 가지나, 유속이 증가함에 따라 임계유속 부근에서 SWCNT보다 MWCNT의 고유진동수가 커지는 역전현상이 발생하여 결과적으로 임계유속 값이 MWCNT가 SWCNT보다 더 커짐을 확인할 수 있다. 이는 SWCNT보다 MWCNT가 더 안정성 있는 구조물임을 보여주는 결과이다. 즉, 모든 경계조건(외팔보, 양단지지보, 양단고정보)에서 MWCNT가 SWCNT에 비해 플러터

Fig. 9 Variation of real and imaginary parts of eigenvalues with fluid velocity for clamped-clamped case(TB)

Table 1 Variation of relative critical velocity, $\overline{U_{rel,cr}}$,
($\frac{R_{in}}{R_{out}} = 0.5$, $\overline{L} = 1$ fixed)

Boundary conditions	$\overline{U_{rel,cr}}$					
	SWCNT [Ref.12]			MWCNT [Present]		
	TB	EB	$\Delta(\%)$	TB	EB	$\Delta(\%)$
SS	3.109 (1st)	3.142 (1st)	1.06	3.498 (1st)	3.561 (1st)	1.80
CF	4.743 (2nd)	4.941 (2nd)	4.17	5.026 (2nd)	5.239 (2nd)	4.24
CC	6.037 (2nd)	6.284 (2nd)	4.07	6.391 (2nd)	6.657 (2nd)	4.16

및 정적불안정(divergence)에 더 안정성이 있는 구조물임을 확인할 수 있다.

Table 1은 임계유속을 참고문헌 (12)의 SWCNT결과와 이 논문의 MWCNT 결과에 대해서 각각 TB와 EB의 경우로 나누어 비교한 것으로, 경계조건에 따른 임계유속의 차이 및 TB와 EB 경우에 따른 임계유속의 차이를 나타낸다. 세 가지 경계 조건 모두에서, EB이론에 의한 임계유속 값이 TB에 의한 임계유속 값 보다 크다는 것을 알 수 있다. 이는 참고문헌 (12)에서 외팔보의 경우에 대하여 연구되었듯이 나노튜브의 길이가 길어질수록 그 차이가 줄어들고, 나노튜브의 길이가 짧아질수록 그 차이가 커진다. 그러므로 길이가 짧은 경우는 TB이론에 기초하여 해석하는 것이 EB이론에 의한 것보다 정확한 결과 값을 얻을 수 있다. 또한 Table 1을 통해서 양단지지보(SS)의 경우가 외팔보(CF) 및 양단고정보(CC)에 비해 차이가 상대적으로 작게 나타남을 확인할 수 있다. 그리고 경계조건에 따른 임계유속의 크기를 비교해보면 $SS < CF < CC$ 순으로 커짐을 알 수 있다. 즉, CC가 임계유속에 가장 안정하며 CF 그리고 SS순으로 안정한 구조물임을 보여주고 있다.

5. 결 론

이 연구에서 유체유동에 의한 다중벽 탄소나노튜브의 다양한 경계조건을 고려한 안정성 해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) MWCNT의 임계유속은 외팔보의 경우 2차

모드에서, 양단 단순지지보, 양단 고정보의 경우에는 1차 모드에서 처음으로 발생한다.

(2) 유속이 증가함에 따라 임계유속 부근에서 SWCNT보다 MWCNT가 커지는 역전현상이 발생하여 결과적으로 임계유속 값이 MWCNT가 SWCNT보다 상대적으로 크므로 보다 더 안정성 있는 구조물이며 또한 모든 경계조건(외팔보, 양단고정보, 양단지지보)에서 MWCNT가 SWCNT에 비해 플러터 및 정적불안정(divergence)에 더 안정성이 있는 구조물임을 확인할 수 있다.

(3) MWCNT의 경계조건에 따른 임계유속의 크기를 비교해보면 $SS < CF < CC$ 순으로 커짐을 알 수 있다. 즉, CC가 임계유속에 가장 안정하며 CF 그리고 SS순으로 안정한 구조물임을 보여주고 있다.

(4) EB와 TB 이론 사이의 임계유속 값의 차이가 외팔보(CF) > 양단 고정보(CC) > 양단 단순지지보(SS)의 순서를 보인다. 즉, SS의 경우가 다른 경계조건들의 결과값에 비해 그 차이가 2배 이상 작으므로 상대적으로 더 일치함을 할 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Sohlberg, K., Sumpter, B. G., Tuzun, R. E. and Noid, D. W., 1998 "Continuum Methods of Mechanics as a Simplified Approach to Structural Engineering of Nanostructures," Nanotechnology, Vol. 9, pp. 30~36.
- (2) Wang, Q. and Varadan, V. K., 2005, "Stability Analysis of Carbon Nanotubes via Continuum Models," Smart Materials and Structures, Vol. 14, pp. 281~286.
- (3) Yoon, J., Ru, C. Q. and Mioduchowski, A., 2005, "Vibration and Instability of Carbon Nanotubes Conveying Fluid," Composites Science and Technology, 65, pp. 1326~1336.
- (4) Yoon, J., Ru, C. Q. and Mioduchowski, A., 2006, "Flow-induced Flutter Instability of Cantilever Carbon Nanotubes," International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, pp. 3337~3349.
- (5) Wang, C. M., Tan, V. B. C. and Zhang, Y. Y., 2006 "Timoshenko Beam Model for Vibration Analysis of Multi-walled Carbon Nanotubes," Journal

of Sound and Vibration, Vol. 294, pp. 1060~1072.

(6) Metin Aydogdy, 2008, "Vibration of Multi-walled Carbon Nanotubes by Generalized Shear Deformation Theory," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 50, pp. 837~844.

(7) Paidoussis, M. P., 1998, "Fluid-structure Interactions : Slender Structures and Axial Flow," Vol. 1, Academic Press.

(8) Weaver Jr, W., Timoshenko, S. P. and Young, D. H., 1990, "Vibration Problems in Engineering," John Wiley & Sons, Inc.

(9) Ryu, B. J., Jung, S. H. and Lee, J. W., 2000, "Effects of Attached Masses on the Instability and Vibration Suppression of a Flexible Pipe Conveying Fluid," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 10, No. 2, pp. 280~290.

(10) Choi, J. W. and Song, O. S., 2001, "Stability Analysis of Composite Material Pipes Conveying Fluid," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 11, No. 8, pp. 314~321.

(11) Librescu, L., Song, O. S., 2006, Thin-walled Composite Beams: Theory and Application, Springer.

(12) Choi, J. W., Gil, B. R. and Song, O. S., 2008, "Flow-induced Vibration of Carbon Nanotubes Conveying Fluid," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 18, No. 6, pp. 654~662.

(13) Song, O. S. and Yun, K. J., 2010, "Stability of Multi-wall Carbon Nanotubes Conveying Fluid," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 20, No. 6, pp. 593~603.