부분적으로 물에 잠겨있는 Shell 구조물의 바닥면과 거리변화에 따른 진동해석 연구

Vibration Analysis for Partially Immersed Shell Structure in Water with Gap from Bottom

구 재 량†·곽 문 규*.송 오 섭**.배 춘 희***

Jae R. Koo, Moon K. Kwak, Oh S. Song and Chun H. Bae

(2011년 6월 27일 접수 ; 2011년 8월 19일 심사완료)

Key Words : Immersed Shell Structure in Water(부분적으로 물속에 잠겨있는 셸 구조물), Fluid-structure Interaction(유체-구조 연성), Shell Structure Vibration of Water Pump(물 유입 펌프의 셸의 진동)

ABSTRACT

The free flexural vibration of a hanged clamped-free cylindrical shell partially submerged in water with gap from bottom is investigated. The fluid is assumed to be inviscid and irrotational. The cylindrical shell is modeled by using the Rayleigh-Ritz method based on the Sanders shell theory. The kinetic energy of the fluid is derived by solving the boundary-value problem related to the fluid motion. The natural vibration characteristics of the partially submerged cylindrical shell are discussed with respect to the added virtual mass approach. In this study, experiments were carried out to confirm theoretical results. It was found that theoretical prediction is in good agreement with experimental results.

1. 서 론

화력발전소에 사용하는 대형 워터 펌프는 모터, 프로펠러, 모터와 프로펠러를 연결하는 축, 그리고 원통형 셸로 구성되어 있다. 원통형 셸 구조물은 물을 끌어올리도록 부분적으로 몰수되어 있으며 모터가 구동됨에 따라 진동이 발생한다. 화력발전소 현장에서 조수 간만의 차에 따라 가끔 비정상적으로 진폭이 커지는 경우가 관찰되어 그 원인에 대한 조사가 필요하게 되었는데 현장에서의 실험 결과는

셸 구조물이 몰수되는 높이에 따라 고유진동수가 급격하게 변화됨을 보여준다. 이와 같은 구조물에 대해 실험을 수행하는 것이 용이하지 않기 때문에 Kwak et al.⁽¹⁾은 원형 원통형 셸이 부분적으로 몰수되어 있는 경우에 대해 이론적인 연구를 수행하였다. 그러나 그 결과가 실험적으로 증명되지는 못하였다. 또한 현장에서 관찰한 원통형 셸은 바닥과 어느 정도 간극을 유지하고 있어 Kwak et al.⁽¹⁾의 결과에 대한 이론적인 보완도 필요하게 되었다. 이 연구에서는 먼저 바닥면과의 간극이 있는 경우에 대한 이론을 정립하고, 수치 계산을 통해 간극이 고유진동수 변화에 미치는 영향을 조사하였다. 또한 실험을 통해 이론 결과를 검증하였다.

접수 진동을 하는 원통형 셸에 대한 이론적인 해석을 위해서는 먼저 공기중 원통형 셸에 대한 이론이 필요한데 가장 간단한 이론은 Donnell-Mushtari

† 교신저자; 정회원, 한국전력연구원

E-mail : kjrforyou@kepeco.co.kr

Tel : (042)865-7557

* 정회원, 동국대학교 기계로봇에너지공학과

** 정회원, 충남대학교

*** 정회원, 한국전력연구원

이론⁽²⁾이다. 그 외 많은 셀 이론⁽³⁻⁵⁾이 존재하지만 이 연구에서는 Kwak et al.⁽¹⁾의 이론 결과를 채택해 Sanders 이론⁽⁶⁾을 사용한다.

부분적으로 또는 완전히 몰수된 셀이나 내부에 유체가 채워진 셀에 대한 연구로는 Amabili⁽⁷⁾, Amabili and Touze⁽⁸⁾, Endo and Tosaka⁽⁹⁾, Kwak⁽¹⁰⁾, Zhanget al.⁽¹¹⁾, Sohnet al.⁽¹²⁾, Jeon and Jung⁽¹³⁾, Jeong and Lee⁽¹⁴⁾의 연구 결과들이 있다. 그렇지만 이들 이론 연구들은 이 연구에서 해석하고자 하는 매달린 셀에 대한 해석 결과가 아니어서 새로운 접근 방법을 필요로 한다. 매달린 셀에 대한 해석은 Kwak et al.⁽¹⁾의 연구와 Askari and Jeong⁽¹⁵⁾의 연구가 유일하다. 특히 Askari and Jeong⁽¹⁵⁾은 Love의 박판 셀 이론을 이용하고 collocation 방법을 사용해 셀과 바닥면간의 간격 문제를 해석하였다.

이 연구에서는 Kwak et al.⁽¹⁾의 이론적인 연구 결과를 검증하고, Askari and Jeong⁽¹⁵⁾가 연구하였던 바닥과의 간격 문제에 대한 보다 쉬운 접근방법을 제시하였다. 수치계산을 수행하고 접수 진동 실험을 수행하여 이론 결과와 비교하였다.

2. 원통형 셀의 운동에너지와 탄성에너지

Kwak et al.⁽¹⁾이 유도한 이론 결과를 요약하면 다음과 같다. Fig. 1과 같은 원통형 셀을 고려해보자. 여기서 R 은 원통형 셀의 반경, h 는 두께, L 은 길이, θ 는 수직축에 대한 각도, x 는 길이 방향 축, u , v , w 는 x , θ 와 z 방향의 변위를 나타낸다. 이런 원통형 셀에 대한 운동에너지는 다음과 같이 표현된다⁽¹⁾.

Fig. 1 Cylindrical shell

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R dz d\theta dx \quad (1)$$

여기서 ρ 는 원통형 셀의 질량 밀도이다.

도입한 가정은 다음과 같다. u , v 와 w 는 z 의 함수가 아니다. 셀의 물성치는 균일하며 등방성이다. z 는 셀의 중간면으로 부터 임의의 점까지의 거리이다.

Love의 첫 번째 가정에 근거해 σ_{zz} 와 면내 전단 응력을 무시하면 원통형 셀의 탄성에너지는 다음과 같다⁽¹⁾.

$$V = \frac{ER}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \epsilon_x^2 + \epsilon_\theta^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_\theta + \frac{(1-\nu)}{2} \epsilon_{x\theta}^2 \right\} dz d\theta dx \quad (2)$$

여기서 E 는 영률이며 ν 는 푸아송비이다. Sanders의 셀 이론⁽⁶⁾에 의하면 변형량은 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} - \frac{z}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad (3b)$$

$$\epsilon_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2z \left(\frac{1}{4R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{3}{4R} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right). \quad (3c)$$

면내 전단 변형량은 무시되었다.

진동 해석을 위해 각 방향 변위를 n 개의 원주 방향 절점을 가지는 함수들의 급수전개로 다음과 같이 표현해보자.

$$u(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, \theta, t), \quad (4a)$$

$$v(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, \theta, t), \quad (4b)$$

$$w(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, \theta, t) \quad (4c)$$

$n=0$ 인 경우 원통형 셀은 절점 없이 진동하는데 이와 관련된 고유진동수는 원주 방향 절점이 있는 고유진동수 보다 아주 높게 나타난다. 그래서 이 연구

의 수치계산에서는 $n \geq 1$ 인 경우만 고려하였다. 변위를 급수전개로 표현하면 운동에너지와 탄성에너지 역시 급수 전개로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_{sn}, \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} V_{sn} \quad (5a,b)$$

해석을 쉽게 하기 위해 각 원주 방향 모드를 다음과 같이 표현해 보자.

$$u_n(x, \theta, t) = \bar{u}_n(x, t) \cos n\theta, \quad (6a)$$

$$v_n(x, \theta, t) = \bar{v}_n(x, t) \sin n\theta, \quad (6b)$$

$$w_n(x, \theta, t) = \bar{w}_n(x, t) \cos n\theta. \quad (6c)$$

더 나아가서 x 와 관련된 변위를 허용함수를 도입해 다음과 같이 표현해 보자.

$$\bar{u}_n(\xi, t) = \Phi_u(\xi) \mathbf{q}_{nu}(t), \quad (7a)$$

$$\bar{v}_n(\xi, t) = \Phi_v(\xi) \mathbf{q}_{nv}(t), \quad (7b)$$

$$\bar{w}_n(\xi, t) = \Phi_w(\xi) \mathbf{q}_{nw}(t). \quad (7c)$$

여기서 무차원 변수 $\xi = x/L$ 가 도입되었다. 또한

$$\Phi_u(\xi) = [\Phi_{u1}(\xi) \Phi_{u2}(\xi) \cdots \Phi_{um}(\xi)] \quad (8a)$$

$$\Phi_v(\xi) = [\Phi_{v1}(\xi) \Phi_{v2}(\xi) \cdots \Phi_{vm}(\xi)] \quad (8b)$$

$$\Phi_w(\xi) = [\Phi_{w1}(\xi) \Phi_{w2}(\xi) \cdots \Phi_{wm}(\xi)] \quad (8c)$$

$$\mathbf{q}_{nu}(t) = [q_{nu1}(t) q_{nu2}(t) \cdots q_{num}(t)]^T \quad (8d)$$

$$\mathbf{q}_{nv}(t) = [q_{nv1}(t) q_{nv2}(t) \cdots q_{nvm}(t)]^T \quad (8e)$$

$$\mathbf{q}_{nw}(t) = [q_{nw1}(t) q_{nw2}(t) \cdots q_{nwm}(t)]^T \quad (8f)$$

이다. 여기서 $\Phi_u(\xi), \Phi_v(\xi), \Phi_w(\xi)$ 는 각 방향 허용함수들로 구성된 행렬을 나타내고 $\mathbf{q}_{nu}(t), \mathbf{q}_{nv}(t), \mathbf{q}_{nw}(t)$ 는 일반 변위 벡터를 나타낸다. 그리고 m 은 급수 전개를 위해 사용된 허용함수의 개수를 나타낸다.

식 (7), (8)을 이용하고 식 (6)을 식 (5)에 대입하면 운동에너지와 탄성에너지가 다음과 같이 표현된다⁽¹⁾.

$$T_{sn} = \frac{1}{2} \pi \rho R h L \left(\dot{\mathbf{q}}_{nu}^T \mathbf{M}_{uu} \dot{\mathbf{q}}_{nu} + \dot{\mathbf{q}}_{nv}^T \mathbf{M}_{vv} \dot{\mathbf{q}}_{nv} + \dot{\mathbf{q}}_{nw}^T \mathbf{M}_{ww} \dot{\mathbf{q}}_{nw} \right), \quad (9a)$$

$$V_{sn} = \frac{\pi E R h}{(1-\nu^2) L} \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_{nu}^T \mathbf{K}_{nuu} \mathbf{q}_{nu} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_{nv}^T \mathbf{K}_{nvv} \mathbf{q}_{nv} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_{nw}^T \mathbf{K}_{nvw} \mathbf{q}_{nw} + \mathbf{q}_{nu}^T \mathbf{K}_{nuv} \mathbf{q}_{nv} + \mathbf{q}_{nv}^T \mathbf{K}_{nvu} \mathbf{q}_{nu} + \mathbf{q}_{nw}^T \mathbf{K}_{nwn} \mathbf{q}_{nw} + \mathbf{q}_{nu}^T \mathbf{K}_{nuw} \mathbf{q}_{nw} + \mathbf{q}_{nw}^T \mathbf{K}_{nwn} \mathbf{q}_{nw} \right), \quad (9b)$$

여기서

$$\mathbf{M}_{uu} = \Phi_{uu}, \quad \mathbf{M}_{vv} = \Phi_{vv}, \quad \mathbf{M}_{ww} = \Phi_{ww}, \quad (10a,b,c)$$

$$\mathbf{K}_{nuu} = \bar{\Phi}_{uu} + \frac{(1-\nu)\alpha^2 n^2}{2} \left(1 + \frac{\beta^2}{48} \right) \Phi_{uu}, \quad (10d)$$

$$\mathbf{K}_{nvw} = \alpha^2 \Phi_{vw} + \frac{\beta^2}{12} \left(\frac{\hat{\Phi}_{vw}}{\alpha^2} + \alpha^2 n^4 \Phi_{vw} - 2\nu n^2 \tilde{\Phi}_{vw} + 2(1-\nu)n^2 \bar{\Phi}_{vw} \right), \quad (10e)$$

$$\mathbf{K}_{nvv} = \alpha^2 n^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{12} \right) \Phi_{vv} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(1 + \frac{\beta^2}{16} \right) \bar{\Phi}_{vv}, \quad (10f)$$

$$\mathbf{K}_{nuv} = \nu n \alpha \tilde{\Phi}_{uv} - \frac{(1-\nu)\alpha n}{2} \left(1 - \frac{\beta^2}{16} \right) \hat{\Phi}_{uv}, \quad (10g)$$

$$\mathbf{K}_{nuw} = \nu \alpha \tilde{\Phi}_{uw} + \frac{(1-\nu)n^2 \alpha \beta^2}{24} \hat{\Phi}_{uw}, \quad (10h)$$

$$\mathbf{K}_{nvw} = \alpha^2 n \left(1 + \frac{n^2 \beta^2}{12} \right) \Phi_{vw} - \frac{\nu \beta^2}{12} \tilde{\Phi}_{vw} + \frac{(1-\nu)n \beta^2}{8} \bar{\Phi}_{vw}, \quad (10i)$$

여기서 $\alpha = L/R$, $\beta = h/R$ 이며

$$\Phi_{uu} = \int_0^1 \Phi_u^T \Phi_u d\xi, \quad \Phi_{vv} = \int_0^1 \Phi_v^T \Phi_v d\xi, \quad (11a,b)$$

$$\Phi_{ww} = \int_0^1 \Phi_w^T \Phi_w d\xi, \quad \Phi_{vw} = \int_0^1 \Phi_v^T \Phi_w d\xi, \quad (11c,d)$$

$$\bar{\Phi}_{uu} = \int_0^1 \Phi_u'^T \Phi_u' d\xi, \quad \bar{\Phi}_{vv} = \int_0^1 \Phi_v'^T \Phi_v' d\xi, \quad (11e,f)$$

$$\bar{\Phi}_{ww} = \int_0^1 \Phi_w'^T \Phi_w' d\xi, \quad \bar{\Phi}_{vw} = \int_0^1 \Phi_v'^T \Phi_w' d\xi, \quad (11g,h)$$

$$\tilde{\Phi}_{uv} = \int_0^1 \Phi_u'^T \Phi_v d\xi, \quad \tilde{\Phi}_{uw} = \int_0^1 \Phi_u'^T \Phi_w d\xi, \quad (11i,j)$$

$$\tilde{\Phi}_{vw} = \int_0^1 \Phi_v'^T \Phi_w d\xi, \quad \tilde{\Phi}_{vw} = \int_0^1 \Phi_v'^T \Phi_w'' d\xi, \quad (11k,l)$$

$$\hat{\Phi}_{uv} = \int_0^1 \Phi_u'^T \Phi_v' d\xi, \quad \hat{\Phi}_{uw} = \int_0^1 \Phi_u'^T \Phi_w' d\xi, \quad (11m,n)$$

$$\hat{\Phi}_{vw} = \int_0^1 \Phi_v''^T \Phi_w'' d\xi. \quad (11o)$$

이 결과는 Donnell-Mushtari 이론에 근거한 Kwak⁽¹⁰⁾의 연구 결과와 약간 차이가 남을 주목하기 바란다.

3. 유체-구조 연성

Kwak et al.⁽¹¹⁾이 고려한 문제와 달리 이 연구에서는 Fig. 2와 같이 고정-자유 원통형 셸이 부분적으로 몰수되어 있으며 바닥면과 어느 정도의 간격이 있는 경우를 고려하였다. 유체는 비점성이며 비회전으로 가정하였다. 점선으로 표현되어 있는 경계면은 가상의 강체 원통을 나타내는데 수학적 해석의 편의성을 위해 도입되었다.

Kwak et al.⁽¹¹⁾이 고려한 바와 같이 먼저 원통형 셸의 외부에 접해있는 유체에 대해 살펴보자. 포텐셜 역시 셸의 탄성 변위 표현식과 마찬가지로 원주방향 절점수에 대해 급수 전개로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi^e(r, \bar{x}, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^e(r, \bar{x}, \theta, t) \quad (12)$$

Fig. 2 Cylindrical shell partially immersed in water

여기서 $\phi^e(r, \bar{x}, \theta, t)$ 는 외부 유체에 대한 포텐셜을 나타내며 $\phi_n^e(r, \bar{x}, \theta, t)$ 는 n 번째 원주 방향 모드와 관련된 유체의 속도 포텐셜을 나타낸다. 유체 영역 해석을 위해 새로운 좌표계 $\bar{x} = x - (L - H)$ 가 도입되었다.

n 번째 원주방향 모드에 대해 셸과 외부와 내부적으로 접해있는 유체의 속도 포텐셜에 대한 지배방정식은 다음과 같이 Laplace 방정식으로 주어진다.

$$\nabla^2 \phi_n^e = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (13)$$

Fig. 2와 같은 셸 구조물에 대해 유체-구조 접촉면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi_n^e}{\partial r} = \begin{cases} -\dot{w}_n(\bar{x}, \theta, t) & \text{at } r = R, 0 \leq \bar{x} \leq H \\ 0 & \text{at } r = R, H \leq \bar{x} \leq H + D \end{cases} \quad (14)$$

이 경계조건 두 번째 조건은 위에서 언급한 바와 같이 강체 원통이 존재하는 것을 의미한다. 실제로는 유체가 자유롭게 이동할 수 있는데 이와 같은 경우를 이론적으로 해석하는 것은 Askari and Jeong⁽¹⁵⁾의 collocation 방법이 유일하다. 이 연구에서 도입한 경계조건을 가지는 셸을 일반적으로 Baffled 셸이라고 부른다⁽¹⁰⁾. 이 경우에는 해석적인 해를 비교적 쉽게 구할 수 있다.

자유표면과 하부 벽면에서의 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_n^e = 0 \quad \text{at } \bar{x} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \phi_n^e}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{at } \bar{x} = H + D \quad (16)$$

외부 유체의 속도 포텐셜은 먼 거리에서 0으로 수렴해야한다. 따라서 다음과 같은 조건들이 만족되어야 한다.

$$\phi_n^e, \frac{\partial \phi_n^e}{\partial r} \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (17)$$

경계치 문제를 풀기 위해 유체의 속도 포텐셜을 변수분리법을 도입해 다음과 같이 표현해 보자.

$$\phi_n^e(r, \bar{x}, \theta, t) = \Phi_n^e(r, t) f(\bar{x}) \cos n\theta \quad (18)$$

식 (18)을 식 (13)에 대입하면 다음과 같은 결과가 얻어진다.

$$\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} + \lambda^2 f = 0, \quad (19)$$

$$\frac{d^2 \Phi_n^e}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_n^e}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \lambda^2 \right) \Phi_n^e = 0. \quad (20)$$

식 (19)의 일반해는 다음과 같다.

$$f(\bar{x}) = \bar{E} \sin \lambda \bar{x} + \bar{F} \cos \lambda \bar{x}. \quad (21)$$

식 (15)와 식 (16)을 식 (21)에 적용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\bar{F} = 0, \quad \bar{E} \cos \lambda(H+D) = 0. \quad (22)$$

식 (22)를 만족하는 무한개의 λ 가 있는데 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2(H+D)}, \quad k=1,2,\dots,\infty. \quad (23)$$

Kwak et al.⁽¹⁾의 연구 결과와 비교하면 식 (23)으로 주어진 특성값에 바닥판의 간극, D 가 포함됨을 알 수 있다. Kwak et al.⁽¹⁾이 지적하였듯이 수치계산을 위해서는 무한개의 사인함수를 고려할 수 없다. 따라서 유한개의 λ_k 를 고려하고 벡터-행렬 표현식을 사용해 보면 식 (18)을 최종적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi_n^e(r, \bar{x}, \theta, t) = \mathbf{s}_\lambda(\bar{x}) \mathbf{K}_{n\lambda}(r) \mathbf{b}_n(t) \cos n\theta \quad (24)$$

여기서

$$\mathbf{s}_\lambda(\bar{x}) = [\sin \lambda_1 \bar{x} \quad \sin \lambda_2 \bar{x} \quad \cdots \quad \sin \lambda_\ell \bar{x}], \quad (25a)$$

$$\mathbf{K}_{n\lambda}(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n(\lambda_1 r) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_n(\lambda_2 r) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}_n(\lambda_\ell r) \end{bmatrix}, \quad (25b)$$

$$\mathbf{b}_n(t) = [b_{n1}(t) \quad b_{n2}(t) \quad \cdots \quad b_{n\ell}(t)]^T, \quad (25c)$$

여기서 $\mathbf{K}_n$ 은 2종 수정 Bessel 함수이다. 식 (24)를

경계조건식 (14)에 대입하고 식 (6c)와 (7c)를 사용하면 다음과 같은 결과가 얻어진다.

$$\mathbf{s}_\lambda(\bar{x}) \mathbf{P}_{n\lambda} \mathbf{b}_n(t) = -\mathbf{\Phi}_w(x) \dot{\mathbf{q}}_{nw}(t) \quad (26)$$

여기서

$$\mathbf{P}_{n\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_n(\lambda_1 R) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}'_n(\lambda_2 R) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}'_n(\lambda_\ell R) \end{bmatrix} \quad (27)$$

식 (26)의 앞에 $\mathbf{s}_\lambda^T(\bar{x})$ 를 곱하고 0부터 $H+D$ 까지 적분을 수행하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_0^{H+D} \mathbf{s}_\lambda^T(\bar{x}) \mathbf{s}_\lambda(\bar{x}) d\bar{x} \mathbf{P}_{n\lambda} \mathbf{b}_n(t) = -\int_0^H \mathbf{s}_\lambda^T(\bar{x}) \mathbf{\Phi}_w(x) d\bar{x} \dot{\mathbf{q}}_{nw}(t) \quad (28)$$

사인 함수의 직교성을 이용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\int_0^{H+D} \mathbf{s}_\lambda^T(\bar{x}) \mathbf{s}_\lambda(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{(H+D)}{2} \mathbf{I}_\ell \quad (29)$$

여기서 $\mathbf{I}_\ell$ 은 $\ell \times \ell$ 의 단위 행렬이다. 이를 이용하면 미지수, $\mathbf{b}_n(t)$ 가 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{b}_n(t) = -\frac{2}{(H+D)} \mathbf{P}_{n\lambda}^{-1} \mathbf{E}_{\lambda w} \dot{\mathbf{q}}_{nw}(t) \quad (30)$$

여기서

$$\mathbf{E}_{\lambda w} = \int_0^H \mathbf{s}_\lambda^T(\bar{x}) \mathbf{\Phi}_w(x) d\bar{x} \quad (31)$$

따라서 외부 유체의 속도 포텐셜에 대한 최종식은 식 (30)을 식 (24)에 대입하여 다음과 같이 유도된다.

$$\phi_n^e(r, \bar{x}, \theta, t) = -\frac{2 \cos n\theta}{(H+D)} \mathbf{s}_\lambda(\bar{x}) \mathbf{K}_{n\lambda}(r) \mathbf{P}_{n\lambda}^{-1} \mathbf{E}_{\lambda w} \dot{\mathbf{q}}_{nw}(t) \quad (32)$$

원통형 셀의 내부에 속해있는 유체의 속도 포텐셜 또한 이와 비슷한 정식화 과정을 거쳐 다음과 같이 유도된다.

$$\phi_n^i(r, \bar{x}, \theta, t) = \frac{2 \cos n\theta}{(H+D)} \mathbf{s}_\lambda(\bar{x}) \mathbf{I}_{n\lambda}(r) \mathbf{Q}_{n\lambda}^{-1} \mathbf{E}_{\lambda w} \dot{\mathbf{q}}_{nw}(t) \quad (33)$$

여기서

$$\mathbf{I}_{n\lambda}(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n(\lambda_1 r) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n(\lambda_2 r) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I}_n(\lambda_\ell r) \end{bmatrix}, \quad (34a)$$

$$\mathbf{Q}_{n\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}'_n(\lambda_1 R) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{I}'_n(\lambda_2 R) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I}'_n(\lambda_\ell R) \end{bmatrix}. \quad (34b)$$

여기서 $\mathbf{I}_n$ 은 1종 수정 Bessel 함수이다. Kwak et. al⁽¹⁾의 결과에 의하면 외부 및 내부 유체의 속도 포텐셜에 대한 n 번째 원주 방향 모드와 관련된 유체의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_{fn} = \frac{1}{2} \pi \rho_f R^2 H \dot{\mathbf{q}}_{nw}^T \mathbf{M}_{fwn} \dot{\mathbf{q}}_{nw} \quad (35)$$

여기서

$$\mathbf{M}_{fwn} = \frac{2}{\kappa} \bar{\mathbf{E}}_{\lambda w}^T \left(-\bar{\mathbf{P}}_{n\lambda}^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{n\lambda} + \bar{\mathbf{Q}}_{n\lambda}^{-1} \bar{\mathbf{I}}_{n\lambda} \right) \bar{\mathbf{E}}_{\lambda w} \quad (36)$$

는 무차원화된 부가수 질량 행렬을 나타낸다. 또한,

$$\left[-\bar{\mathbf{P}}_{n\lambda}^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{n\lambda} \right]_{ij} = \frac{\mathbf{K}_n(\lambda_i R) \delta_{ij}}{\lambda_i R \mathbf{K}_{n+1}(\lambda_i R) - n \mathbf{K}_n(\lambda_i R)}, \quad (37a)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, \ell$$

$$\left[\bar{\mathbf{Q}}_{n\lambda}^{-1} \bar{\mathbf{I}}_{n\lambda} \right]_{ij} = \frac{\mathbf{I}_n(\lambda_i R) \delta_{ij}}{\lambda_i R \mathbf{I}_{n+1}(\lambda_i R) + n \mathbf{I}_n(\lambda_i R)} \quad i, j = 1, 2, \dots, \ell, \quad (37b)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{\lambda w} = \int_0^1 \mathbf{s}_\lambda^T(\bar{\xi}) \Phi_w(\xi) d\bar{\xi}. \quad (37c)$$

여기서 δ_{ij} 는 Dirac delta 함수이고, 다음과 같이 무차원화된 변수들이 사용되었다.

$$\xi = x/L, \quad \bar{\xi} = \bar{x}/H, \quad (38a,b)$$

$$\xi = (1-\delta) + \delta \bar{\xi}, \quad \delta = H/L, \quad (38c,d)$$

$$\mathbf{P}_{n\lambda} = \bar{\mathbf{P}}_{n\lambda}/R, \quad \mathbf{Q}_{n\lambda} = \bar{\mathbf{Q}}_{n\lambda}/R, \quad (38e,f)$$

$$\mathbf{E}_{\lambda w} = H \bar{\mathbf{E}}_{\lambda w}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{n\lambda} = \mathbf{K}_{n\lambda}(R), \quad (38g,h)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{n\lambda} = \mathbf{I}_{n\lambda}(R), \quad \kappa = D/H. \quad (38i,j)$$

그리고

$$\lambda_k R = \frac{(2k-1)\pi}{2\alpha\delta(1+\kappa)}, \quad k=1, 2, \dots \quad (38k)$$

이 식들이 식 (37)을 계산하는데 사용되었다. 총 운동에너지는 셸 구조물의 운동에너지와 외부 및 내부 유체의 운동에너지를 합해서 유도된다. 따라서, 총 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_n = T_{sn} + T_{fn} \quad (39)$$

식 (9a)와 (35)를 식 (39)에 대입하면 유체 운동에너지를 포함하는 총 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_n = \frac{1}{2} \pi \rho R h L \left[\dot{\mathbf{q}}_{nu}^T \mathbf{M}_{nu} \dot{\mathbf{q}}_{nu} + \dot{\mathbf{q}}_{nv}^T \mathbf{M}_{nv} \dot{\mathbf{q}}_{nv} + \dot{\mathbf{q}}_{nw}^T \left(\mathbf{M}_{ww} + \frac{\gamma \delta}{\alpha} \mathbf{M}_{fwn} \right) \dot{\mathbf{q}}_{nw} \right] \quad (40)$$

여기서 $\gamma = \rho_f L / \rho h$ 이다.

식 (40)과 식 (9b)로 표현된 운동에너지와 탄성에너지를 고려하면 n 번째 원주 모드에 대한 자유진동 방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\pi \rho R h L \left(\mathbf{M}_a + \frac{\gamma \delta}{\alpha} \mathbf{M}_f \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{\pi E R h}{(1-\nu^2)L} \mathbf{K}_n \mathbf{q}_n = 0, \quad (41)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

여기서 $\mathbf{q}_n(t) = [\mathbf{q}_{nu}^T \mathbf{q}_{nv}^T \mathbf{q}_{nw}^T]^T$ 이며

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{ww} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{fwn} \end{bmatrix}, \quad (42a,b)$$

$$\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nuu} & \mathbf{K}_{nuv} & \mathbf{K}_{nuw} \\ \mathbf{K}_{nuv}^T & \mathbf{K}_{nvv} & \mathbf{K}_{nvw} \\ \mathbf{K}_{nuw}^T & \mathbf{K}_{nvw}^T & \mathbf{K}_{nww} \end{bmatrix}. \quad (42c)$$

이다. 따라서 고유치 문제는 다음과 같이 주어진다.

$$\left[\mathbf{K}_n - \bar{\omega}_{fn}^2 \left(\mathbf{M}_a + \frac{\gamma\delta}{\alpha} \mathbf{M}_f \right) \right] \mathbf{q}_n = 0, \quad n=1,2,\dots \quad (43)$$

여기서 $\bar{\omega}_{fn} = \omega_{fn} \sqrt{\rho(1-\nu^2)L^2/E}$ 는 유체에서 진동하는 경우의 무차원화된 고유진동수를 나타낸다.

4. 수치계산 및 실험

고정-자유 원통형 셀의 경계조건을 만족하는 허용함수는 다음과 같다^(1,3).

$$\Phi_{wi}(x) = \phi'_{CF}(i, x), \quad (44a)$$

$$\Phi_{vi}(x) = \Phi_{wi}(x) = \phi_{CF}(i, x), \quad i=1,2,\dots,m. \quad (44b)$$

여기서 $\phi_{CF}(i, x)$ 는 균일 외팔보의 고유함수인데 다음과 같이 주어진다⁽²⁾.

$$\begin{aligned} \phi_{CF}(i, x) = & \cosh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) \\ & - \sigma_i \left[\sinh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) \right], \end{aligned} \quad (45)$$

여기서

$$\lambda_i = 1.875, 4.694, 7.855, 10.996, 14.137, \quad (2i-1)\pi/2, \quad i > 5, \quad (46a)$$

$$\sigma_i = \frac{\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i}{\cosh \lambda_i - \cos \lambda_i}. \quad (46b)$$

식 (45)를 이용해 식 (44)를 구성하고 그 결과를 식 (11)의 행렬들을 계산하면 질량행렬과 강성행렬을 계산할 수 있다. 또한, 식 (38c)의 적분을 계산하면 식 (36)으로 주어진 부가수 질량 행렬을 계산할 수 있다.

이론 결과의 타당성 조사를 위해서 알루미늄 원통형 셀을 제작하였다. 알루미늄 셀의 제원은 다음

과 같다. $L=460$ mm, $R=54.4$ mm, $h=1$ mm, $\nu=0.3$, $\rho=3770$ kg/m³, $E=70$ GPa. 이 원통형 셀을 매달기 위해 Fig. 3에 보이는 바와 같은 알루미늄 프로파일을 이용한 지지대가 제작되었다.

먼저 공기중 셀에 대한 수치해석과 진동 실험이 수행되었다. Table 1은 공기중 고유진동수에 대한 이론 결과와 실험 결과를 보여주고 있다.

Fig. 4는 공기중 모달 실험을 통해 얻어진 고유진동 모드들 중 일부를 보여준다. 이들 고유모드들은 이론 결과와 동일한 모습을 보여준다.

Table 1에서 기본 모드인 (2,1)와 고차 모드인 (3,1) 모드에 대해서는 이론 계산에 의한 고유진동수 결과와 실험에 의한 고유진동수 결과가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 보의 굽힘 모드와 같은 (1,1) 모드는 실험에서 계측되지 않았다. 무엇보다도 알루미늄 프로파일로 제작된 지지대가 완벽한 강체로서의 역할을 감당하지 못하기 때문인 것으로 생각된다. 또한 고정-자유 원통형 셀을 구현하기 위해 원통형 셀의 한 부분을 원형 지그를 이용

Fig. 3 Supporting structure for a hanged shell

Table 1 Natural frequencies in air(Hz)

Mode(n,m)	Theory	Experiment
(2,1)	297	299
(1,1)	467	-
(3,1)	713	760
(3,2)	859	888
(2,2)	933	795
(4,1)	1358	-
(4,2)	1407	1518
(3,3)	1416	1364

해 고정시켰지만 이 또한 완벽하게 고정 조건을 만들지 못하기 때문인 것으로 사료된다. 이런 이유로 원주 방향 절점이 있는 모드들만이 비교적 쉽게 예측이 된 것으로 보인다. 접수 진동 실험에서는 예측 가능한 모드들을 대상으로 접수 진동 실험이 수행되었다. 부분 물수된 경우를 구현하기 위해 Fig. 5와 같은 $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$ 의 물탱크를 스테인레스 판을 이용해 제작하고 보강하였다. 그 다음 Fig. 6에 보이는 바와 같이 알루미늄 원통형 셀을 물에 부분적으로 잠수시켰다.

Fig. 5에 보이는 수조는 원통 셀의 직경의 약 10 배에 해당하는 폭을 가지고 있다. 따라서 탱크 벽면의 반사 영향은 무시할 수 있을 것으로 사료되었다. 앞에서 언급한 바와 같이 이 연구에서는 Kwak et al.⁽¹⁾의 연구에서 고려하지 않았던 바닥면과의 간극의 영향을 이론 정립에 도입하였다. 간극의 영향은 Askari and Jeong⁽¹⁵⁾의 연구에서 고려되었는데 이

연구에서는 가상의 강체 원통이 셀 하단에 존재하는 것으로 가정한 Baffled 셀 이론을 사용하였음을 다시한번 언급한다. 간극의 영향을 조사하기 위해 원통형 셀의 물에 잠기는 정도, $H=100\text{ mm}$ 로 고정하고, 바닥면과의 간극, D 를 변화시키면서 고유진동수를 앞의 이론 결과를 이용해 수치적으로 계산하고 Fig. 5와 6에 보이는 것과 같이 실험을 수행하여 고유진동수를 예측하였다. 그 결과가 각각 Fig. 7과 8이다. 수치계산을 위해서 사용한 물의 질량 밀도, $\rho_f=1000\text{ kg/m}^3$ 이다. Fig. 7과 8은 $D=0\text{ m}$ 인 경우의 고유진동수를 기준으로 D 가 커짐에 따라 기준 고유진동수와의 비율이 어떻게 변화하는지 보여준다. Fig. 7과 8로부터 바닥과의 간극이 벌어지면서 고유진동수가 커짐을 보여주는데 이론과 실험 결과 모두 저차 진동수가 가장 크게 변화함을 보여준다. 특히 이론과 실험 결과는 D 가 약간만 커져도 수렴하는 것을 보여준다. 고유진동수의 변화크기는 이론보다 실험이 작음을 알 수 있는데 이론의 경우 최대 변화율이 약 10 % 이내이지만 실험의 경우

(a) (2,1) mode

(b) (3,1) mode

(c) (2,2) mode

Fig. 4 Natural mode shapes in air

Fig. 5 Experimental setup for submerged shell

Fig. 6 Hanged cylindrical shell

변화율이 약 3% 이내임을 보여준다. 실험 결과는 실제 문제를 해석하는 경우 셸이 바닥에 근접한 경우로 해석하여도 크게 문제가 되지 않음을 보여준다. 바닥면이 근접해 있는 경우 유체의 유동이 제약되기 때문에 당연히 유체의 운동에너지가 증가되며 따라서 고유진동수는 바닥면이 떨어져 있는 경우에 비해 작게 나타나게 된다.

바닥면과의 간극, $D=100\text{ mm}$ 로 고정하고 H 를 높여가면서 실험을 수행하였다. 이론적으로 계산한 고유진동수와 실험을 통해 측정한 고유진동수를 비교한 그림이 Figs. 9, 10과 11이다. 공기중 실험을 통해 모든 고유진동수를 추적할 수 없음을 언급하였는데 공기중에서 측정한 고유진동수를 수중 실험에서 추적하는 것도 쉽지 않았다. 수중 실험에서 가속도계를 물이 닿지 않는 부분에 부착하고 충격 해머를 물속에서 셸의 자유단 부분을 가진 후

파워 스펙트럼 분석을 통해 고유진동수를 추적하였다. Fig. 9로부터 기본 진동 모드인 (2,1)모드에 대한

Fig. 9 Natural frequency vs. water height($n=2, m=1$)

Fig. 7 Natural frequency vs. gap distance(theory)

Fig. 10 Natural frequency vs. water height($n=2, m=2$)

Fig. 8 Natural frequency vs. gap distance(experiment)

Fig. 11 Natural frequency vs. water height($n=3, m=2$)

고유진동수 결과는 이론값과 실험값이 비교적 잘 일치하고 있음을 보여준다. 그러나 Fig. 10으로부터 (2,2)모드에 대해서는 공기중 고유진동수에서 차이가 나기 때문이기는 하지만 물의 높이가 작은 경우에 대해서는 차이가 존재하고 물의 높이가 커지면서 그 차이가 줄어들음을 알 수 있다. 그러나 경향은 유사함을 알 수 있다. (3,2)모드에 대한 결과인 Fig. 11은 이론 결과와 실험 결과가 잘 일치함을 보여준다. 그러나 실험에서 물의 높이가 커지면서 (3,2)모드 고유진동수는 예측이 불가능하였다.

Fig. 10과 11에 보이는 고유진동 모드는 길이 방향으로 절점이 한 개 있는 경우다. 즉, $m=2$ 인 경우이다. 이 경우 절점의 영향으로 인해 물의 높이에 따른 고유진동수가 $m=1$ 인 경우인 Fig. 9와는 다른 경향을 보인다. 절점 부근에서는 셸의 변위가 작아지기 때문에 당연히 유체의 유동도 작아지고 따라서 유체의 영향이 작아지게 되기 때문이다. 그러나 Figs. 9, 10과 11 모두 물의 높이가 커짐에 따라 고유진동수가 급격하게 변함을 보여준다. 즉, 워터펌프의 경우 고유진동해석을 위해서는 유체의 영향을 설계 단계에서 반드시 고려해야 됨을 알 수 있다.

5. 토의 및 결론

이 연구에서 부분적으로 유체와 접해 있으며 바닥과 어느 정도 간극이 존재하는 경우의 고정-자유 원통형 셸 구조물에 대한 이론 해석과 실험을 수행하였다. 특히, 바닥면과의 간극을 고려해 유체에 대한 포텐셜 함수를 유도하고, 이를 이용해 부가수 질량 행렬을 유도하였다. 유도된 부가수 질량 행렬은 바닥면과의 간극과 물의 높이의 영향을 반영하고 있다. 이 연구를 통해 다음과 같은 결론이 유도되었다.

(1) 부분적으로 몰수된 원통형 셸의 경우 바닥면과의 간극이 커질 경우 고유진동수는 작아진다. 간극이 커질 경우 고유진동수 변화율은 둔화된다.

(2) 부분적으로 몰수된 경우의 물의 높이가 원통형 셸의 고유진동수에 미치는 영향은 지대하다. 특히, 물의 높이가 원통형 셸의 길이에 비해 작은 경우에도 고유진동수는 급격하게 변화한다. 기본 진동수의 경우 물의 높이가 원통형 셸 길이의 반 이상이 되면 높이의 변화로 인한 고유진동수 변화는 크게 변하지 않는다.

(3) 물의 높이에 따른 고유진동수 변화는 셸의 길이 방향 절점의 영향을 받는다.

(4) 이 연구에서 유도한 부분 몰수 원통형 셸에 대한 이론 해석 과정은 기본 모드에 대해 유효하다. 고차 모드에 대한 오차는 앞으로 해결해야 할 과제로 판단된다.

참고 문헌

- (1) Kwak, M. K., Koo, J.-R. and Bae, C.-H., 2011, Free Vibration Analysis of a Hung Clamped-free Cylindrical Shell Partially Submerged in Fluid, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 27, No. 2, pp. 283~296.
- (2) Blevins, R. D., 1987, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., FL.
- (3) Leissa, A., 1993, *Vibration of Shells*. Acoustical Society of America, Originally issued by NASA 1973.
- (4) Sharma, C. B., 1984, Free Vibrations of Clamped-free Circular Cylindrical Shells, *Thin Walled Structures*, Vol. 2, pp. 175~193.
- (5) Yim, J. S., 1996, Free Vibration Analysis of Clamped-Free Circular Cylindrical Shells, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 6, No. 1, pp. 45~56.
- (6) Sanders, J. L., 1959, An Improved First Approximation Theory of Thin Shells. NASA-TR-T 24.
- (7) Amabili, M., 1999, Vibrations of Circular Tubes and Shells Filled and Partially Immersed in Dense Fluids, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 221, No. 4, pp. 567~585.
- (8) Amabili, M. and Touze, C., 2007, Reduced-order Models for Nonlinear Vibrations of Fluid-filled Circular Cylindrical Shells: Comparison of POD and Asymptotic Nonlinear Normal Modes Methods, *Journal of Fluid and Structures*, Vol. 23, pp. 885~903.
- (9) Endo, R. and Tosaka, N., 1989, Free Vibration Analysis of Coupled External Fluid-elastic Cylindrical

Shell-internal Fluid Systems, JSME International Journal, Series I, Vol. 2, pp. 217~221.

(10) Kwak, M. K., 2010, Free Vibration Analysis of a Finite Cylindrical Shell in Contact with Unbounded External Fluid, Journal of Fluids and Structures, Vol. 26, pp. 377~392.

(11) Zhang, X. M., Liu, G. R. and Lam, K. Y., 2001, Coupled Vibration Analysis of Fluid-filled Cylindrical Shells Using the Waver Propagation Approach, Applied Acoustics, Vol. 62, pp. 229~243.

(12) Sohn, J. W., Kwon, O.-C. and Choi, S.-B., 2009, Modal Characteristics and Vibration Control of Cylindrical Shell Structure: Experimental Results Comparison in the Air and Water, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration

Engineering, Vol. 19, No. 9, pp. 899~906.

(13) Jeon, J. J. and Jung, W. J., 1996, An Analysis on the Underwater Sound Radiation from Finite Cylindrical Shell with Stiffeners, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 6, No. 6, pp. 717~726.

(14) Jeong, K.-H. and Lee, S.-C., 1994, Fourier Series Expansion Method for Free Vibration Analysis of a Fully Liquid-filled Circular Cylindrical Shell, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 4, No. 2, pp. 137~146.

(15) Askari, E. and Jeong, K.-H., 2010, Hydroelastic Vibration of a Cantilever Cylindrical Shell Partially Submerged in a Liquid, Ocean Engineering, Vol. 37, pp. 1027~1035.