경사기능재료를 사용한 회전하는 외팔보의 진동해석

Free Vibration Analysis of a Rotating Cantilever Beam Made-up of Functionally Graded Materials

이 기 복* · 유 흥 희†
Ki Bok Lee and Hong Hee Yoo

(Received May 22, 2013 ; Revised June 27, 2013 ; Accepted July 4, 2013)

Key Words : Functionally Graded Materials(경사기능재료), Cantilever Beam(외팔보), Rotational Motion(회전운동), Natural Frequency(고유진동수), Timoshenko Beam Theory(티모센코 보 이론)

ABSTRACT

The vibration analysis of a rotating cantilever beam made-up of functionally graded materials is presented based on Timoshenko beam theory. The material properties of the beams are assumed to be varied through the thickness direction following a simple power-law form. The frequency equations, which are coupled through gyroscopic coupling terms, are calculated using hybrid deformation variable modeling along with the Rayleigh-Ritz assumed mode methods. In this study, resulting system of ordinary differential equations shows the effects of power-law exponent, angular speed, length to height ratio and Young's modulus ratio. It is believed that the results will be a reference with which other researchers and commercial FE analysis program, ANSYS can compare their results.

1. 서 론

극한 열 환경에서 일반적인 재료를 사용하여 극한 열적 외부 환경을 견디고 기계적 강도를 유지하는 것은 쉬운 작업이 아니다. 일반적인 복합재인 적층된 복합재를 사용하여 이를 극복 할 수도 있겠지만, 두 재료가 마주 닿은 부분에서 응력집중현상이 발생하고 열에 의한 두 팽창률 차이로 인하여 재료가 분리되거나 파괴되는 현상이 발생한다. 그래서 새로운 개념의 재료에 대한 필요성이 나날이 요구되고 있다. 재료공학적으로 새로운 합금을 만드는 것도 방법이 되겠지만 막대한 비용과 시간이 요구된다. 이러한 현상을 극복하기 위한 방법으로 제시된

것이 경사기능재료(functionally graded materials, FGM)이다.

이 논문에서 다루고 있는 FGM은 Niino 등^(1,2)에 의해 일본 Sendai group에서 최초로 소개가 되었다. 이 복합재는 재료의 조성이 서로 다른 재료가 연속적으로 변화하는 이질재료로 특성화 될 수 있다. 일반적으로, 시스템의 바깥쪽 표면은 극한 온도 환경에 저항하고 항산화성이 우수하며 낮은 열전도도 특성을 나타내는 세라믹으로 구성하고 시스템의 안쪽은 기계적 강도가 우수하며 높은 파괴 인성을 지닌 금속으로 구성한다.

이러한 FGM은 원하는 성능과 환경에 맞춰 정해진 방향에 따라 재료의 조성비를 변화 시킬 수 있다. 이와 같은 다양성은 여러 산업에 적용 될 수 있

* Corresponding Author ; Member, School of Mechanical Engineering, Hanyang University
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : +82-2-2220-0446, Fax : +82-2-2293-5070
* Member, School of Mechanical Engineering, Hanyang University

A part of this paper was presented at the KSNVE 2013 Annual Spring Conference
† Recommended by Editor Hyung-Jo Jung
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

으며 FGM을 사용한 보나 평판의 진동해석은 많은 공학적 예제를 대체 할 수 있어 그 의미가 클 것으로 판단된다.

기존 연구에서 Sankar⁽³⁾는 FGM보에 정적 하중을 가하여 구조해석을 수행하였다. Chakraborty⁽⁴⁾는 열탄성 거동을 해석하기 위해 새로운 보 요소를 개발하여 열과 기계적 하중에 의한 정적해석을 수행하였다. 또 다른 방법으로 Zhong과 Yu⁽⁵⁾는 Airy stress function을 사용하여 탄성문제를 해결하였다. 이 후에 Aydogdu와 Taskin⁽⁶⁾은 HSDT(higher-order shear deformation theories)로 진동 해석을 하고 CBT(classical beam theories)의 결과와 비교하였다. Kapuria⁽⁷⁾는 정적 해석과 자유진동 해석을 위한 유한요소 모델을 제안하고 third-order zigzag theories를 사용하였다. 또한 이를 실험과 비교 분석하였다. 최근에 Xiang과 Yang⁽⁸⁾은 FGM/기질/FGM층으로 적층 된 FGM을 구성하고 길이에 따라 두께를 변화하는 다양한 형상을 지닌 모델을 제안하고 초기 열응력을 고려한 자유진동 해석을 수행하였다. Sina⁽⁹⁾는 Timoshenko 보 이론과 다른 새로운 보 이론(FSDT2)을 제안하여 FG보의 진동해석을 하였다. Simsek⁽¹⁰⁾은 다양한 경계조건과 5가지 보 이론을 비교 분석하여 이후 연구에서 운동방정식을 검증 할 수 있는 자료를 제공해 주고 있다. 이와 같은 연구들은 다양한 산업 현장에 기여할 것이다. 하지만 가스터빈 블레이드나 우주항공의 회전익과 같은 기계시스템은 주기적인 회전운동을 한다. 이렇게 회전운동을 하는 시스템은 회전효과에 의한 강성변화로 인하여 다른 진동특성을 나타내며 이에 따른 해석이 요구된다. 대부분의 연구들은 회전운동이 없는 구조해석과 진동해석에 그치고 있어 회전하는 시스템의 해석이 절실히 요구된다. 이 연구의 목적은 FGM으로 만들어진 회전하는 보를 모델링하고 운동방정식을 구성하여 보의 부피분율을 조절한 해석 결과를 도출하여 시스템의 진동 특성을 종합적으로 조사하는 것이다.

이 논문의 구성은 2장에서 FGM 외팔보의 단면을 혼합법칙⁽²⁾을 사용하여 수식적으로 구성하고 복합변형 변수를 이용한 선형 모델링 기법⁽¹¹⁾으로 평면 운동하는 FGM 외팔보를 모델링 하였다. 그리고 Kane의 방법⁽¹²⁾으로 운동방정식을 유도하였다.

3장에서는 유도된 진동 방정식에 근거하여 수치해석을 하였다. 그리고 그 해석 결과를 보인 후, 진

동 특성에 대해 논의 하였다. 마지막 장에서는 이 논문의 결론을 요약하여 수록하였다.

2. 운동방정식

2.1 경사기능재료

이 장에서는 FGM 외팔보의 단면을 구성하는 재료물성치 수식을 간략히 소개하기로 한다. Fig. 1에서 보의 단면적은 두께방향(y-축 방향)으로 재료물성구배가 있다. 세라믹과 금속, 두 종류로 구성되고 중앙에는 기계적 강도를 증가 시킬 수 있는 금속으로, 상/하 위치에서는 각각 바깥의 온도를 극복 할 수 있는 세라믹으로 구성한다. FGM 외팔보는 Voigt의 혼합법칙을 따르며 먹금수 형태로 재료 물성치 변화⁽²⁾를 표현 할 수 있다.

$$P(y) = (P_c - P_m) \left| \frac{2y}{h} \right|^n + P_m \quad (1)$$

여기서 P_m, P_c, n 은 금속과 세라믹의 재료물성치 그리고 부피분율지수($0 \leq n \leq \infty$)를 나타낸다. 이 논문에서 재료물성 변화는 탄성 계수 E , 전단 계수 G 그리고 단위 길이당 질량 ρ 이렇게 세 가지이며 푸아송 비 ν 는 상수로 취급한다. Fig. 2는 외팔보의 단면이 두께방향으로 재료물성의 변화를 나타낸다. n 이 작아질수록 외팔보 단면이 높이에 따라 급격하게 세라믹의 부피분율이 증가하고 n 이 커질

Fig. 1 Configuration of a cantilever beam made-up of functionally graded materials and cross section area

Fig. 2 Variation of the material properties of FGM beams through the thickness of the FGM beams cross section

수록 외팔보 단면이 높이에 따라 세라믹의 부피분율은 감소하여 급격하게 금속 재료물성을 나타내는 외팔보 단면을 이루게 된다.

2.2 경사가능성 외팔보의 탄성에너지

이 장에서는 회전하는 FGM 외팔보의 탄성에너지를 유도하기로 한다. 외팔보 단면에서 높이방향으로 재료물성이 다르고 가스터빈 블레이드와 같은 짧은 블레이드의 해석을 위해서 전단변형을 고려한다. Timoshenko 보 이론을 기반으로 한 FGM 외팔보의 탄성에너지는 다음이 같이 얻어진다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[A \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + 2B \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right) + D \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right)^2 + Zk \left(\theta_3 + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2)$$

여기서 L 은 외팔보의 길이, k 는 전단 보정 계수 그리고 θ_3 는 보 단면의 자세각을 나타낸다. 또한, A , B , D 그리고 Z 는 각각 인장강성, 인장-굽힘 연성된 강성, 굽힘 강성 그리고 전단 강성을 의미하고 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} A &= b \int_{-h/2}^{h/2} E(y) dy \\ B &= b \int_{-h/2}^{h/2} E(y) y dy \\ D &= b \int_{-h/2}^{h/2} E(y) y^2 dy \\ Z &= b \int_{-h/2}^{h/2} G(y) dy \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 b , h 는 보 단면의 너비와 두께이다. 탄성 계수와 전단 계수는 식 (1)을 따르는 y 에 대한 함수이다.

2.3 운동방정식 유도

Fig. 1은 반경 r 의 디스크에 고정되어 평면에서 $\hat{a}_3$ 방향으로 Ω 만큼 회전 운동하는 외팔보를 보여준다. 디스크 축에 부착된 서로 수직인 단위벡터들이 나타나 있으며, x 는 외팔보와 디스크가 고정점 O 로부터 변형 전 임의의 질점까지 거리를, s 는 외팔보 중립축의 임의의 점에서 보가 인장된 길이를 나타낸다. $\vec{u}$ 는 u_1 과 v 로 이루어진 임의의 질점의 탄성 변위벡터를 나타낸다.

연속체의 방정식을 가상 모드법을 이용해 상미분 운동방정식으로 구하기 위해 s , v , θ_3 를 다음과 같이 근사화 한다.

$$\begin{aligned} s(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \\ v(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \\ \theta_3(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_6} \phi_{6j}(x) q_{6j}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 ϕ_{1j} , ϕ_{2j} , ϕ_{6j} 는 각각 s , v , θ_3 를 위한 가상모드, q_{1j} , q_{2j} , q_{6j} 는 일반좌표 그리고 μ_1 , μ_2 , μ_6 는 각각 사용된 일반좌표의 개수이다.

Kane의 방법⁽¹²⁾을 이용한 운동방정식은 다음의 식을 이용하여 구한다.

$$F_i + F_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, \mu \quad (5)$$

여기서 F_i , F_i^* 는 일반작용력과 일반관성력이며 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} F_i &= - \frac{\partial U}{\partial q_i} \\ F_i^* &= - \int_0^L \rho \vec{v}_i \cdot \vec{a}^P dx \\ &\quad - \int_0^L \vec{\omega}_i \cdot \left(\vec{\alpha}^{dB} \cdot \vec{I} + \vec{\omega}^{dB} \times \vec{I} \cdot \vec{\omega}^{dB} \right) dx \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서 $\vec{v}_i^P$ 와 $\vec{\omega}_i^P$ 는 질점 P 의 편속도와 편각속도, ρ 는 단위 길이당 질량, $\vec{\omega}^{dB}$ 와 $\vec{\alpha}^{dB}$ 는 변형에 따른 보의 미소부분 dB 의 각속도와 각가속도, $\vec{I}$ 는 dB 의 단위길이 당 관성 Dyadic을 나타낸다. 이를 더욱 자세히 나타내보면, 회전하는 FGM 외팔보를 보이는 Fig. 1에서 질점 P 의 속도는 다음과 같이 나타난다.

$$\vec{v}^P = \vec{v}^O + {}^A\vec{v}^P + \vec{\omega}^A \times (\vec{r} + \vec{u}) \quad (7)$$

식 (7)에서 참고문헌⁽¹¹⁾을 통해서 인장변위 s 는 u , v 를 이용하여 질점 P 의 속도를 표현하면 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \vec{v}^P = & \left[\dot{s} - \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial \sigma} \right) d\sigma - \omega_3 v \right] \hat{a}_1 \\ & + \left[\omega_3 \left(r + x + s - \frac{1}{2} \right) \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 d\sigma + \dot{v} \right] \hat{a}_2 \end{aligned} \quad (8)$$

미소부분 dB 의 각속도와 각가속도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^{dB} &= \vec{\omega}^A + {}^A\vec{\omega}^{dB} = (\omega_3 + \dot{\theta}_3) \hat{a}_3 \\ \vec{\alpha}^{dB} &= (\dot{\omega}_3 + \ddot{\theta}_3) \hat{a}_3 \end{aligned} \quad (9)$$

그리고, dB 의 단위길이 당 관성 Dyadic $\vec{I}$ 은 다음과 같이 나타난다.

$$\vec{I} = \rho \frac{I_3}{S} \hat{a}_3 \hat{a}_3 \quad (10)$$

여기서 I_3 는 $\hat{a}_3$ 축에 대한 면적 모멘트이고 S 는 외팔보의 단면적을 나타낸다. 2-1장에서 탄성에너지 식 (2)와 식 (7)~(9)를 식 (6)에 대입하여 s 방향, v 방향, θ_3 방향으로 유도하면, 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & + \sum_{j=1}^{\mu_1} \left(\int_0^L \rho \phi_{1i} \phi_{1j} dx \right) \ddot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_1} \left(\int_0^L A \phi'_{1i} \phi'_{1j} dx \right) q_{1j} \\ & - 2\omega_3 \sum_{j=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) \dot{q}_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_6} \left(\int_0^L B \phi'_{6i} \phi'_{6j} dx \right) q_{6j} \end{aligned}$$

$$- \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} \left(\int_0^L \rho \phi_{1i} \phi_{1j} dx \right) q_{1j} = 0 \quad < i = 1, 2, \dots, \mu_1 > \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) \ddot{q}_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L Z \phi'_{2i} \phi'_{2j} dx \right) q_{2j} \\ & - \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) q_{2j} \\ & + \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L \rho (L-x) \phi'_{2i} \phi'_{2j} dx \right) q_{2j} \\ & + \frac{1}{2} \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L \rho (L^2 - x^2) \phi'_{2i} \phi'_{2j} dx \right) q_{2j} \\ & + 2\omega_3 \sum_{j=1}^{\mu_1} \left(\int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{1j} dx \right) \dot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_6} \left(\int_0^L Z \phi'_{2i} \phi'_{6j} dx \right) q_{6j} \\ & = 0 \quad < i = 1, 2, \dots, \mu_2 > \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_6} \left(\int_0^L I_{33} \phi_{6i} \phi_{6j} dx \right) \ddot{q}_{6j} + \sum_{j=1}^{\mu_6} \left(\int_0^L D \phi'_{6i} \phi'_{6j} dx \right) q_{6j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_6} \left(\int_0^L Z \phi_{6i} \phi_{6j} dx \right) q_{6j} + \sum_{j=1}^{\mu_1} \left(\int_0^L B \phi'_{6i} \phi'_{1j} dx \right) q_{1j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L Z \phi_{6i} \phi'_{2j} dx \right) q_{2j} = 0 \quad < i = 1, 2, \dots, \mu_6 > \end{aligned} \quad (13)$$

유도된 운동방정식은 인장-굽힘 운동간 연성을 포함하고 전단효과와 단면관성효과를 고려한 Timoshenko 보 이론을 근간으로 구성된 Sandwich 형태의 회전하는 FGM 외팔보의 운동방정식이다.

2.4 무차원 진동방정식 유도

유도된 운동방정식, 식 (11)~(13)을 무차원화 하기 위해 다음과 같이 시간과 공간 그리고 일반좌표 변수들을 무차원화 한다.

$$\begin{aligned} \tau &\equiv \frac{t}{T}, \quad \xi \equiv \frac{x}{L}, \quad \mathcal{Q}_{1i} \equiv \frac{q_{1i}}{L}, \quad \mathcal{Q}_{2i} \equiv \frac{q_{2i}}{L}, \\ \theta_{3i} &= q_{3i}, \quad \phi_{ai}(x) = \phi_{ai}(\xi), \quad \Omega = T\omega_3 \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)를 이용하여 식 (11)~(13)을 무차원한 진동방정식은 다음과 같다.

$$+ \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[M_{ij}^{11} \ddot{\mathcal{Q}}_{1j} + \eta_2 K_{ij}^{11} \mathcal{Q}_{1j} - \Omega^2 M_{ij}^{11} \mathcal{Q}_{1j} \right]$$

$$-\sum_{j=1}^{\mu_2} 2\Omega M_{12} \dot{\mathcal{G}}_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_6} \eta_i K_{ij}^{16} \mathcal{G}_{6j} = 0 \quad (15)$$

$$< i = 1, 2, \dots, \mu_1 >$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[M_{ij}^{22} \ddot{\mathcal{G}}_{2j} + \left\{ \alpha^2 \beta K_{ij}^{22} - \Omega^2 M_{ij}^{22} \right\} \mathcal{G}_{2j} \right] + 2\Omega \sum_{j=1}^{\mu_6} K_{ij}^{21} \dot{\mathcal{G}}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_6} \alpha^2 \beta K_{ij}^{C26} \mathcal{G}_{6j} = 0 \quad (16)$$

$$< i = 1, 2, \dots, \mu_2 >$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_6} \left[M_{ij}^{66} \ddot{\mathcal{G}}_{6j} + \left\{ \alpha^2 K_{ij}^{66} + \alpha^4 \beta M_{ij}^{66} \right\} \mathcal{G}_{6j} \right] + \sum_{j=1}^{\mu_6} \alpha^2 \eta_i K_{ij}^{61} \mathcal{G}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} \alpha^4 \beta K_{ij}^{C62} \mathcal{G}_{2j} = 0 \quad (17)$$

$$< i = 1, 2, \dots, \mu_6 >$$

여기서 질량 및 강성 행렬요소들은 다음과 같이 정의된다.

$$M_{ij}^{ab} = \int_0^1 \varphi_{ai} \varphi_{aj} d\xi$$

$$K_{ij}^{ab} = \int_0^1 \varphi'_{ai} \varphi'_{aj} d\xi$$

$$K_{ij}^{G2} = \int_0^1 \delta(1-\xi) \varphi'_{2i} \varphi'_{2j} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \varphi'_{2i} \varphi'_{2j} d\xi$$

$$K_{ij}^{Cab} = \int_0^1 \varphi'_{ai} \varphi_{aj} d\xi \quad (18)$$

또한, 사용된 무차원 매개변수들은 다음과 같다.

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{SL^2}{I_3}}, \beta \equiv \frac{h^2 A}{12D}, \delta \equiv \frac{r}{L}$$

$$T \equiv \sqrt{\frac{\rho^* L^4}{D}}, \rho^* \equiv b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(y) dy \quad (19)$$

$$\eta_1 \equiv \frac{LB}{D}, \eta_2 \equiv \frac{L^2 B}{D}$$

여기서 인장-굽힘 연성된 강성과 관련된 매개변수 η_1 과 η_2 가 나타나고 FGM 특성으로 높이에 따른 질량변화가 ρ^* 로 표현 된다.

φ_{aj} 는 ϕ_{aj} 와 동일한 모드함수이고 ξ 의 함수이다.

$\ddot{\mathcal{G}}_{aj}$ 는 $\mathcal{G}_{aj}$ 의 τ 에 관한 2차 미분 값이다. 식 (15)~(17)은 행렬 방정식 형태로 다음과 같이 표기될 수 있다.

$$M \ddot{\mathcal{G}} + C \dot{\mathcal{G}} + K \mathcal{G} = 0 \quad (20)$$

여기서 M , C , K 는 대칭 정방행렬로 그 요소들을 순서대로 나타내면 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} \bar{M}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{M}^{33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \bar{M}^{12*} & 0 \\ \bar{M}^{21*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$K = \begin{bmatrix} \bar{K}^{11} & 0 & \bar{K}^{16} \\ 0 & \bar{K}^{22} & \bar{K}^{26} \\ \bar{K}^{61} & \bar{K}^{62} & \bar{K}^{66} \end{bmatrix} \quad (23)$$

식 (21)~(23)의 행렬 요소들은 다음과 같이 표기된다.

$$\bar{M}^{12*} = -2\Omega M^{12}$$

$$\bar{M}^{21*} = 2\Omega M^{21}$$

$$\bar{K}^{11} = \eta_2 K^{11} - \Omega^2 M^{11}$$

$$\bar{K}^{16} = \eta_1 K^{16}$$

$$\bar{K}^{22} = \alpha^2 \beta K^{22} - \Omega^2 M^{22} + \Omega^2 K^{G2} \quad (24)$$

$$\bar{K}^{26} = \alpha^2 \beta K^{C26}$$

$$\bar{K}^{61} = \alpha^2 \eta_1 K^{61}$$

$$\bar{K}^{62} = \alpha^4 \beta K^{C62}$$

$$\bar{K}^{66} = \alpha^2 K^{66} + \alpha^4 \beta M^{66}$$

식 (22)에서 행렬 C 는 비대칭 형태를 가지므로 고유치 해석에 있어 복소모드 해석법을 이용해야 한다. 이 과정을 위하여 식 (20)은 다음과 같은 형태로 변환한다.

$$M^* \dot{\mathcal{G}} + K^* \mathcal{G} = 0 \quad (25)$$

여기서 변환된 행렬 요소들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^* &= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ K^* &= \begin{bmatrix} C & K \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \bar{g} &= \begin{Bmatrix} \dot{g} \\ g \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

구성된 기동 행렬 $\bar{g}$ 를 시간에 대한 조화함수로 가정하면

$$\bar{g} = e^{\lambda t} \Theta \quad (27)$$

여기서 λ 는 복소 고유치, Θ 는 모드형상을 나타내는 모드벡터이다. 식 (25)를 이용하여 무차원 진동방정식 식 (15)~(17)은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\lambda M^* \Theta + K^* \Theta = 0 \quad (28)$$

식 (28)에서 구해진 고유치, λ 는 복소수 값을 갖는다. 허수부는 고유진동수를, 실수부는 감쇠계수를 나타낸다.

3. 수치 해석 결과

3.1 제안한 방법의 검증

이 장에서는 앞서 유도된 무차원 진동방정식을 수치 해석한 결과를 실었다. 인장, 굽힘 방향 변위의 가상모드들로는 각각 정지된 외팔보의 인장, 굽힘 가상모드들을 사용하였고 θ_3 방향 자세각의 가상모드는 굽힘방향 변위의 가상모드들을 공간 좌표 x 로 미분한 함수들을 사용하였다.

Tables 1, 2는 이 연구에서 구해진 수치 해석 결과들의 정확성과 신뢰성을 검증하기 위해 회전이 없는 FGM 외팔보를 가진 경우에 대해 기존의 연구들과 비교하였다. 참고문헌⁽⁹⁾과는 0.2 % 이내에서 일치하고 참고문헌⁽¹⁰⁾과는 0.05 %이내에서 일치하고 있으므로 유도된 운동방정식의 신뢰성을 입증하였다.

Tables 3, 4는 FGM 외팔보가 회전하는 경우에 상용프로그램인 ANSYS⁽¹³⁾로 모델링한 외팔보와 비

Table 1 Comparison of the first natural frequencies with L/h for the power-law exponent $n=0.3$

L/h	n	1st natural frequencies[rad/s]		
		Present	Ref.[9]	Error(%)
10	0.3	67.914	67.076	0.142
30		7.596	7.507	0.192
100		0.682	0.676	0.167

Table 2 Comparison of the first natural frequencies with the power-law exponent for $L/h=5$

L/h	n	1st natural frequencies[rad/s]		
		Present	Ref.[10]	Error(%)
5	0	385.769	358.898	0.033
	0.2	359.455	359.419	0.001
	1	297.860	297.760	0.033
	5	257.435	257.447	0.005
	Full metal	200.443	200.509	0.033

Table 3 Comparison of the first natural frequencies with angular speed with ANSYS($n=1$)

L/h	ω_3 [rad/s]	1st natural frequencies[rad/s]		
		Present	Ref.[10]	Error(%)
5	0	297.761	298.539	0.261
	20	297.841	298.652	0.272
	50	298.259	299.249	0.331
10	0	75.993	76.001	0.011
	20	76.446	76.491	0.059
	50	78.684	78.955	0.343

Table 4 Comparison of the second natural frequencies with angular speed with ANSYS($n=1$)

L/h	ω_3 [rad/s]	1st natural frequencies[rad/s]		
		Present	Ref.[10]	Error(%)
5	0	1623.660	1623.889	0.014
	20	1624.217	1624.455	0.015
	50	1627.140	1627.533	0.024
10	0	457.583	457.278	0.067
	20	459.844	459.558	0.062
	50	471.530	471.390	0.030

교한 결과를 실었다. ANSYS의 모델링은 얇은 층을 가진 쉘 요소를 사용하였다. 보다 많은 층을 사용하여 모델링 할수록 수치해석 결과와 일치하는 경향을 나타낸다. 검증을 위한 FE 외팔보 모델은 부피분율 지수가 $n=1$ 인 외팔보이다. 이는 선형적인 재료물성 변화를 의미한다. 모델링에 사용된 물성은 $E_m=70$ GPa, $\rho_m=2702$ kg/m³, $E_c=380$ GPa, $\rho_c=3960$ kg/m³, $\nu_m=\nu_c=0.3$ 이다. 그리고 이 논문에서 표현한 무차원 고유진동수와 회전 각속도, $\bar{\lambda}$, $\bar{\Omega}$ 의 정의는 다음과 같다.

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\bar{\omega}_i}{\omega_m}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\omega_3}{\omega_m} \quad (29)$$

여기서, $\bar{\omega}_i$ 는 차원화 된 고유진동수이고 ω_m 은 전체 금속 재료물성을 갖는 외팔보의 고유진동수를 나타낸다. 해석 비교 결과 가장 낮은 2개의 고유진동수와 0.3% 내외에서 일치하는 것으로 회전 운동시에도 수치해석 결과에 신뢰성을 입증하였다.

3.2 탄성계수 비에 따른 고유진동수 변화

재료 선택의 다양성을 적용하기 위해서는 재료 물성을 변수로 선택해야 한다. 특히, 고유진동수에 지배적인 영향을 주는 인자는 탄성 계수가 될 수 있다.

그래서 금속의 탄성 계수, E_m 과 세라믹의 탄성 계수, E_c 의 비율을 정의하였다.

$$\frac{E_c}{E_m} = E_{ratio} \quad (30)$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_m} = \rho_{ratio}$$

Figs. 3~6에서는 해석의 단순화를 위하여 ρ_{ratio} 는 1로 가정한다. 추후, 이것을 추가하는 것에는 전혀 어려움이 없다. Fig. 3은 일정한 n 일 때, E_{ratio} 의 증가로부터 고유진동수의 증가를 보여준다. Fig. 4에서는 일정한 E_{ratio} 일 때, n 에 따른 고유진동수 변화를 보여주고 있다. Figs. 3, 4를 함께 나타낸 것이 Fig. 5이다. E_{ratio} 가 커질수록 상대적으로 세라믹의 강성이 커짐을 의미한다. 이 두 변화율을 관찰해 보면 고유진동수가 부피분율 지수보다 E_{ratio} 변화에 더

Fig. 3 Variation of the dimensionless first natural frequencies with Young's modulus ratio

Fig. 4 Variation of the dimensionless first natural frequencies with Power-law exponent

Fig. 5 Variation of the dimensionless first natural frequencies with respect to E_{ratio} and n ($\bar{\Omega}=0$)

큰 영향을 받는 것을 알 수 있다. 그리고 Fig. 6은 각속도를 추가한 결과이다. 강성증가로 인한 고유진

Fig. 6 Variation of the dimensionless first natural frequencies with respect to E_{ratio} and $n(\bar{\Omega}/3)$

Fig. 8 First natural frequencies versus slenderness ratio with the power-law exponent

Fig. 7 First natural frequencies versus the angular speed with the power-law exponent

Fig. 9 Dimensionless first natural frequencies versus the power-law exponent with angular speed

동수의 증가를 보이고 있다.

3.3 부피분율지수에 따른 고유진동수 변화

모델에 사용된 재료물성은 $E_m=70$ GPa, $\rho_m=2702$ kg/m³, $E_c=380$ GPa, $\rho_c=3960$ kg/m³, $\nu_m=\nu_c=0.3$ 이다. 사용목적에 따라 FGM의 부피분율을 조절 할 수 있는 인자는 n 이다. Fig. 7은 n 을 변화시키기에 따른 수치해석 뿐만 아니라 일정 각속도로 회전하는 FGM 외팔보의 진동특성을 포함하고 있다. 디스크 반경비 $\delta=0.1$, 세장비 $\alpha=70(L/h \approx 20)$ 을 사용했다. 회전 각속도가 증가함에 따라서 강성의 증가로 고유진동수가 증가하는 모습을 보인다.

Fig. 8은 $n=0, 1, 10$ 일 때, 세장비에 따른 1차 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 일반적으로 세장비가 작은 경우, 대략 $\alpha=20(L/h \approx 5.8) \sim \alpha=50(L/h \approx$

14.4)사이에서 Timoshenko 보 이론을 사용하는데, 여기서 세장비가 클 경우에는 n 값에 고유진동수의 변화가 작은 반면, 세장비가 작은 짧은 외팔보의 경우, 고유진동수가 n 값에 큰 변화를 나타내고 있다. FGM으로 제작된 터빈 블레이드와 같은 경우에는 Timoshenko 보 이론을 사용해 모델링을 해야 할 것으로 판단된다. Fig. 9는 n 에 따른 일정 회전 각속도에서 무차원화 된 1차 고유진동수를 나타낸다. n 이 0~0.5구간에서 n 이 증가하여도 고유진동수가 약간 커지는 이유는 질량이 작아지는 효과가 강성이 증가하는 효과보다 지배적인 영향을 끼치기 때문이다. 현재 수치해석에서 재료물성 중 ρ_c 가 ρ_m 보다 크다. 이로부터 n 이 커지면 금속의 부피분율이 증가하여 질량이 작아진다. 즉, 강성의 증가보다 지배적인 영향으로 고유진동수가 증가했다. 추가적으로,

Fig. 10 Dimensionless first natural frequencies versus ρ_{ratio} and E_{ratio} with $n=0.2$

Fig. 11 Dimensionless first natural frequencies versus ρ_{ratio} and E_{ratio} with $n=1$

n 이 0.2, 1에서 E_{ratio} 와 ρ_{ratio} 의 변화에 따른 무차원 고유진동수를 나타낸 것이 Figs. 10, 11이다. n 이 0.2에서 특히 질량에 의한 고유진동수의 변화가 크게 영향을 받는 것을 볼 수 있다.

4. 결 론

이 논문에서는 세라믹/금속/세라믹으로 구성된 sandwich형태의 회전하는 FGM 외팔보의 진동특성을 예측하기 위해 진동방정식을 유도하였다. 무회전 시, 참고문헌^(9,10)으로 검증하여 신뢰성을 확보하였고 상용프로그램 ANSYS를 사용하여 무회전 시의 진동해석뿐만 아니라 일정 각속도로 회전하는 FGM 외팔보의 고유진동수를 비교하여 정확성과 신뢰성을 검증할 수 있었다. 이 연구에서 제시된 모델링은 기

존의 상용프로그램과 비교 할 때 계산 시간과 비용 측면에서 상당히 효율적이라는 강점이 있다. 3장에서는 수치해석을 통해 n 을 조절하여 FGM 외팔보의 구성을 다양하게 변화 할 수 있었다. 또한, 다양한 재료를 선정 할 수 있는 E_{ratio} 를 사용한 수치해석과 함께 n 을 함께 고려한 진동해석을 실행고 부피분율 지수보다 E_{ratio} 에 고유진동수가 더 큰 변화를 나타내는 것을 확인했다. 이후, 일정 각속도로 회전하는 FGM 외팔보의 1차 고유진동수를 보였다. n 이 0~0.5사이에서는 n 이 증가함에도 불구하고 고유진동수가 증가하는 것을 확인했다. 이것은 질량 감소가 강성의 증가보다 지배적인 영향을 미치는 것으로 그 원인을 파악 할 수 있었다. 추가적으로 기하학적 변화로는 세장비, α 가 20~50인 짧은 보에서는 Timoshenko 보 이론을 적용한 해석이 요구됨을 확인했다.

후 기

이 연구는 2011년도 지식경제부의 재원으로 한국 에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다(No. 2011T100200116).

참 고 문 헌

- (1) Sata, N., Sanada, N., Hirano, T. and Niino, M., 1990, Fabrication of a Functionally Gradient Material by Using a Self-propagating Reaction Process, Proceedings of the First Int. Symp. On Combustion and Plasma Synthesis of High-Temperature Materials, VCH Publishers, INC., pp. 195~203.
- (2) Wakashima, K., Hirano, T. and Niino, M., 1990, Pace Applications of Advanced Structural Materials, SASP 303. 97.
- (3) Sankar, B. V., 2001, An Elasticity Solution for Functionally Graded Beams, Composites Sciences and Technology, Vol. 61, No. 5, pp. 689~696.
- (4) Chakraborty, A. and Gopalakrishnan, S. A., 2003, Spectrally Formulated Finite Element for Wave Propagation Analysis in Functionally Graded Beams, International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, No. 10, pp. 2421~2448.
- (5) Zhong, Z. and Yu, T., 2007, Analytical Solution

of a Cantilever Functionally Graded Beam, *Composites Sciences and Technology*, Vol. 67, No. 34, pp. 481~488.

(6) Aydogdu, M. and Taskin, V., 2007, Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with Simply Supported Edges, *Materials and Design*, Vol. 28, No. 5, pp. 1651~1656.

(7) Kapuria, S., Bhattacharyya, M. and Kumar, A. N., 2008, Bending and Free Vibration Response of Layered Functionally Graded Beams: a Theoretical Model and Its Experimental Validation, *Composite Structures*, Vol. 82, No. 3, pp. 390~402.

(8) Yang, J., Chen, Y., Xiang, Y. and Jia, X. L., 2008, Free and Forced Vibration of Cracked Inhomogeneous Beams under an Axial Force and a Moving Load, *Journal of Sound Vibration*, Vol. 312, No. 12, pp. 166~181.

(9) Sina, S. A., Navazi, H. M. and Haddadpour, H., 2009, Analytical Method for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams, *Materials and Design*, Vol. 30, No. 3, pp. 741~747.

(10) Simsek, M., 2010, Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Beams by Using Different Higher-order Beam Theories, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 240, pp. 697~705.

(11) Yoo, H. H., Ryan, R. R. and Scott, R. A., 1995, Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.

(12) Kane, T. and Levinson, D., 1985, *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill Book Co., New

York.

(13) ANSYS, *User's Manual, Structural Analysis Guide*, ANSYS Inc., 1998.

(14) Min, J. S. and Song, O., 2003, Statics and Free Vibration Characteristics of Rectangular Plates Made of Functionally Graded Materials, *Proceedings of the KSNVE Annual Autumn Conference*, pp. 439~445.

Hong Hee Yoo received his B.S. and M.S. degrees in the Department of Mechanical Design in Seoul National University in 1980 and 1982. He received his Ph.D. degree in the Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics in the University of Michigan at Ann Arbor in 1989. He is a professor in the Department of Mechanical Engineering at Hanyang University, Seoul, Korea. His research interests include multi-body dynamics, structural vibration, and statistical uncertainty analysis in mechanics.

Ki Bok Lee received his B.S. degrees in the Department of Mechanical Engineering in Kookmin University, Seoul, Korea in 2012. He is working as a M.S. candidate in the Department of Mechanical Engineering in Hanyang University, Seoul, Korea. His research interests include structural vibration and multi-body dynamics.