끝 단에 스프링-질량계가 연결된 엘리베이터 로프의 진동 Vibration of Elevator Rope with a Spring-mass System at the Tip

곽 문 규[†] · 한 상 보^{*}

Moon K. Kwak and Sangbo Han

(Received February 6, 2014 ; Revised March 18, 2014 ; Accepted March 18, 2014)

Key Words : Elevator Rope Vibration(엘리베이터 로프진동), Tip Mass(끝 단 질량), Spring Support(스프링지지)

ABSTRACT

This study is concerned with the free vibration analysis of an inextensible uniform rope with a spring-mass system at the tip. The rope is hanged vertically in a gravitational field. This problem is related to the free vibration of an elevator rope connected to an elevator cage. The equation of motion and the corresponding boundary conditions are derived by using the Hamilton's principle. The general solution of the governing equation of motion is expressed in terms of Bessel functions. The characteristic equation was derived by applying the boundary conditions. The characteristic values which are in fact non-dimensionalized natural frequencies were obtained numerically. The effects of mass and spring constant were investigated. The numerical results show how the tip mass and spring affect the natural frequencies of the rope.

1. 서 론

엘리베이터를 구성하는 주 구조물은 승객을 운반하는 케이지(cage), 케이지에 장착된 바퀴인 롤러 가이드 시스템(roller guide system), 가이드 레일(guide rail), 케이지에 연결된 로프, 로프를 움직이는 트랙션 모터(traction motor), 로프를 감는 쉬브(sheave) 등이다. 엘리베이터의 진동은 다양한 원인으로부터 발생하는데, 가이드 레일(guide rail)의 정렬 오류, 풀리(pulley)와 쉬브(sheave)의 편심, 전자 제어 시스템의 공진, 기어와 모터가 유발한 진동, 지진이나 바람에 의한 건물의 진동, 엘리베이터 로프의 진동 등을 원인으로 들 수 있다. 엘리베이터에 진동이 발생하면 승차감이 저하되어 승객에게 불안

감을 유발하게 되고 주변 거주인들에게는 불쾌감을 유발하게 된다. 특히 엘리베이터 로프의 진동이 파해지면 로프가 승강구내의 구조물에 엉키거나 다른 장비들을 파손할 수 있기 때문에 아주 위험하다.

최근에는 건물이 초고층화되면서 지진이나 바람에 의해 유발되는 건물의 진동과 엘리베이터 로프의 공진 가능성이 커지고 있다. 건물이 높아지면 엘리베이터 로프의 길이가 길어지게 되고 엘리베이터 로프의 기본진동수는 낮아지게 된다. 이 경우 지진이나 바람에 의해 빌딩의 저차 고유진동수 모드가 가진 되고 다시 건물의 진동이 로프에 전달되어 로프에 과도한 진동이 일어날 수 있다. 엘리베이터 로프의 진동은 주 로프(main rope)나 보상 로프(compensation rope)의 진동으로 구분할 수 있다. 엘리베이터 로프의 진동을 가장 단순하게 해석하기

[†] Corresponding Author ; Member, Dept. of Mechanical, Robotics and Energy Engineering, Dongguk University
E-mail: kwakm@dongguk.edu
Tel:+82-02-2260-3705, Fax:+82-02-2263-9379
^{*} Member, School of Mechanical Engineering, Kyungnam University

[‡] Recommended by Editor Don Chool Lee

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

위해서는 위 단은 고정되어 있고 아래 단에는 질량이 매달려 있는 스트링을 고려해야 한다. 그러나 케이지에는 스프링으로 구성되어 있는 풀러 가이드가 장착되어 있기 때문에 단순한 질량만으로는 엘리베이터 로프와 케이지의 연성 거동을 해석하기 어렵다. 따라서 아래 단에 스프링-질량 시스템이 부착된 로프를 고려하는 것이 바람직하다.

엘리베이터 로프는 구조물의 특성으로 인해 스트링, 케이블 또는 체인으로 칭해진다. 이와 같은 동적 구조물에 대한 연구를 살펴보면 다음과 같다. 아래 단이 자유로운 로프의 진동은 고전적인 동역학 문제로 이미 운동방정식과 그 해가 잘 알려져 있다⁽¹⁾. Huang⁽²⁾은 아래 부분의 거동이 제한되는 체인에 대한 연구를 수행하였다. Sujith and Hodges⁽³⁾는 아래 단에 질량이 달려있는 경우에 대해 운동방정식을 유도하고 질량의 변화에 의한 고유진동수의 변화를 계산하였다. Zhu and Xu⁽⁴⁾은 굽힘 강성까지 고려해 엘리베이터 로프의 진동을 해석하는 수치 해석 방법을 제안하였다. Andrew and Kaczmarczyk⁽⁵⁾는 로프의 거동에 대한 종합적인 연구 결과 및 동향에 대한 논문을 발표하였다. 엘리베이터 로프에 대한 연구는 주로 일본에서 활발하게 진행되었다. Kimura et al.⁽⁶⁻¹⁰⁾은 엘리베이터 로프의 진동에 대한 일련의 연구를 통해 길이가 시간에 따라 변하는 로프에 대한 운동 방정식을 유도하고 다양한 조건에서의 로프의 거동에 대한 연구 결과를 발표하였다. 이에 반해 국내에서는 엘리베이터 케이지의 진동 모델링 및 능동 진동 제어에 대한 연구⁽¹¹⁻¹³⁾, 엘리베이터 로프의 거동에 대한 연구⁽¹⁴⁾가 최근에 시작되었다. 그러나 엘리베이터 로프와 케이지의 연성 진동에 대한 연구 결과는 아직 발표되지 않았다.

따라서 이 연구에서는 Sujith and Hodges⁽³⁾의 연구 결과를 확장해 로프의 아래 단에 스프링-질량 시스템이 부착된 모델을 고려하였다. 해밀턴 원리를 적용해 이 동적 모델의 운동방정식과 경계 조건을 유도하고 고유진동수와 고유진동 모드를 계산해 케이지의 질량과 스프링 강성이 엘리베이터 로프의 진동에 미치는 영향을 조사하였다.

2. 문제 정식화

이 연구를 위해 Fig. 1에 보이는 것과 같은 모델

을 고려하였다. 로프의 길이는 L 이고 늘어나지 않는다고 가정했다. 또한 로프의 단위길이당 질량은 $\bar{m}$ 으로 일정하다고 가정했다. 그림에 보이는 바와 같이 로프의 위 단은 고정되어 있고 아래 단에는 질량 M 과 스프링이 연결되어 있다. 로프는 수직 방향으로 매달려 있기 때문에 당연히 중력의 영향을 받는다. 여기서 $w(x, t)$ 는 횡방향 변위이다.

이와 같은 시스템의 운동에너지와 위치에너지는 다음과 같이 유도된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \bar{m} \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} M \dot{w}^2(L, t) \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L [M + \bar{m}(L-x)] g \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} K w^2(L, t) \quad (2)$$

운동 방정식과 경계조건의 유도를 위해 다음과 같은 해밀턴 원리가 사용되었다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (3)$$

해밀턴 원리를 적용하면 다음과 같은 운동방정식이 유도된다.

$$\bar{m} \ddot{w} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [M + \bar{m}(L-x)] g \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = 0, \quad 0 < x < L \quad (4)$$

그리고 위 단과 아래 단에서의 경계조건은 다음과 같이 유도된다.

$$w(0, t) = 0 \quad (5a)$$

Fig. 1 Elevator rope model

$$Mg \frac{\partial w(L,t)}{\partial x} + M\ddot{w}(L,t) + Kw(L,t) = 0 \quad (5b)$$

먼저 다음과 같은 무차원 변수 및 상수들을 도입해 운동방정식과 경계조건식을 간단하게 정리해보자.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \mu = \frac{M}{mL}, \quad \beta = \sqrt{\frac{KL}{Mg}} \quad (6)$$

여기서 μ 는 케이지 질량과 엘리베이터 로프의 질량비, β 는 케이지 질량과 풀러가이드 스프링으로 이루어진 일자유도계의 고유진동수와 케이지 질량이 단진자인 경우의 고유진동수 비를 나타낸다. 이와 같은 무차원 변수 및 상수를 이용하면 운동방정식이 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\ddot{w} - \frac{g}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\mu + 1 - \xi) \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] = 0, \quad 0 < \xi < 1 \quad (7)$$

그리고 경계조건식 (5b)는 다음과 같이 표현된다.

$$\left[\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{L}{g} \ddot{w} + \beta^2 w \right]_{\xi=1} = 0 \quad (8)$$

$w(\xi, t) = W(\xi)e^{i\omega t}$ 를 식 (7), (5a), (8)에 대입하고 무차원화된 고유진동수, $\lambda = \omega\sqrt{L/g}$ 를 이용하면 식 (7)은 다음과 같이 유도된다.

$$\lambda^2 W - \frac{dW}{d\xi} + (\mu + 1 - \xi) \frac{d^2 W}{d\xi^2} = 0 \quad (9)$$

그리고 경계조건식은 다음과 같이 유도된다.

$$W(0) = 0, \quad \left[\frac{dW}{d\xi} + (\beta^2 - \omega^2) W \right]_{\xi=1} = 0 \quad (10a, b)$$

식 (9)의 해를 구하기 위해 다음과 같은 매개변수를 도입하자.

$$\mu + 1 - \xi = \frac{1}{4}\eta^2 \quad (11)$$

그러면 식 (9)는 다음과 같은 Bessel 방정식으로 귀결된다.

$$\eta^2 \frac{d^2 W}{d\eta^2} + \eta \frac{dW}{d\eta} + \lambda^2 \eta^2 W = 0 \quad (12)$$

이 Bessel 방정식의 해는 다음과 같다.

$$W(\eta) = AJ_0(\lambda\eta) + BY_0(\lambda\eta) \quad (13)$$

여기서 J_0 와 Y_0 는 각각 제 1종과 제 2종의 Bessel 함수이다. 식 (11)을 사용해 원래의 무차원 변수로 되돌리면 식 (13)은 다음과 같이 표현된다.

$$W(\xi) = AJ_0(2\lambda\sqrt{\mu+1-\xi}) + BY_0(2\lambda\sqrt{\mu+1-\xi}) \quad (14)$$

경계조건식 (10)을 적용하면 다음과 같은 두 개의 식이 유도된다.

$$AJ_0(2\lambda\sqrt{\mu+1}) + BY_0(2\lambda\sqrt{\mu+1}) = 0 \quad (15)$$

$$A \left[\lambda J_1(2\lambda\sqrt{\mu}) + \sqrt{\mu}(\beta^2 - \lambda^2) J_0(2\lambda\sqrt{\mu}) \right] + B \left[\lambda Y_1(2\lambda\sqrt{\mu}) + \sqrt{\mu}(\beta^2 - \lambda^2) Y_0(2\lambda\sqrt{\mu}) \right] = 0 \quad (16)$$

식 (15)와 식 (16)으로부터 다음과 같은 특성방정식이 유도된다.

$$J_0(2\lambda\sqrt{\mu+1}) \left[\lambda Y_1(2\lambda\sqrt{\mu}) + \sqrt{\mu}(\beta^2 - \lambda^2) Y_0(2\lambda\sqrt{\mu}) \right] - Y_0(2\lambda\sqrt{\mu+1}) \left[\lambda J_1(2\lambda\sqrt{\mu}) + \sqrt{\mu}(\beta^2 - \lambda^2) J_0(2\lambda\sqrt{\mu}) \right] = 0 \quad (17)$$

이 특성방정식으로부터 무한개의 무차원고유진동수 $\lambda_i (i=1, 2, \dots)$ 를 얻을 수 있다. 그러나 이 값들을 구하기 위해서는 수치해석적인 방법을 사용해야 한다. 이 값이 구해졌을 경우에 고유 모드는 다음 식으로 표현된다.

$$W_i(\xi) = J_0(2\lambda_i\sqrt{\mu+1-\xi}) + \sigma_i Y_0(2\lambda_i\sqrt{\mu+1-\xi}), \quad i=1, 2, \dots \quad (18)$$

여기서

$$\sigma_i = -J_0(2\lambda_i\sqrt{\mu+1}) / Y_0(2\lambda_i\sqrt{\mu+1}) \quad (19)$$

3. 수치 계산

식 (17)로 주어진 특성방정식의 해는 두 개의 상수, 즉, 케이지 질량과 엘리베이터 로프의 질량비,

μ 와 케이지의 고유진동수와 로프의 단진자 거동시의 고유진동수의 비, β 에 의해 결정된다. Fig. 2는 이들 두 개의 상수에 대한 무차원 고유진동수의 변화를 3차원 그래프로 표현한 것이다. 케이지의 질량이 증가하면서 고유진동수가 대부분 증가하는데 한 가지 예외는 $\beta=0$ 일 경우의 1차 고유진동수이다. $\beta=0$ 일 경우에는 질량이 증가하면서 고유진동수가 오히려 약간 감소하는데 그 결과는 Sujith and Hodges⁽³⁾의 연구 결과와 일치한다. $\beta=0$ 이라는 것은 스프링이 없는 경우인데 이 경우에는 질량의 거동을 저지하지 못하기 때문에 질량이 증가하면서 로프의 진동이 단진자 운동으로 바뀌기 때문이다⁽³⁾. 질량의 증가로 인해 고유진동수가 증가하지만 β 가 큰 값을 가지는 경우에는 그 증가율이 더 커짐을 알 수 있다. 또한 그림에서 알 수 있듯이 특정 질량비에 대해서 고유진동수가 급격히 변화하는 임계 β 값이 존재함을 알 수 있다. 이 수치 결과는 롤러 가이드 시스템의 스프링 강성을 결정하는데 유용하게 사용될 것으로 예상된다.

Figs. 3, 4는 $\mu=0.2$ 와 $\mu=1$ 인 경우에 대해 β 값이 고유진동 모드에 미치는 영향을 보여준다. 그림에서 알 수 있듯이 β 값이 커지면서 케이지의 거동이 구속되게 되고 따라서 고유진동 모드가 변하게 된다. 그리고 중력의 영향으로 인해 아래로 약간 처진 형태의 고유진동 모드를 보여준다. 그리고 μ 가 커지면 로프의 장력이 커지면서 중력의 영향이 감소한다.

실제 엘리베이터의 경우를 고려해 케이지의 질량은 약 4000 kg, 케이지에 연결된 스프링의 강성은 10^6 N/m, 로프의 단위길이당 질량은 1.1 kg/m, 그리고 총 6개의 로프가 케이지에 연결된 경우를 고려해보자. 로프의 길이에 따른 첫 번째 고유진동수의 변화를 보여주는 것이 Fig. 5이다. 이 그림으로부터 로프의 길이가 약 50 m 이상이 되면 첫 번째 고유진동수가 크게 변하지 않음을 예상할 수 있다. 따라서 로프의 길이가 길어지면 고유진동수가 점차 낮아져 건물과의 공진 가능성이 커질 수 있다. 예상했던 바와 같이 길이가 짧으면 고유진동수는 높게 나타난다. 이것은 엘리베이터가 상부에 도달할 경우 높은 진동수의 외부 기진력, 즉 빠른 속도로 회전하는 모터가 로프를 가진 시킬 수도 있음을 의미한다.

(a) First non-dimensionalized natural frequency

(b) Second non-dimensionalized natural frequency

(c) Third non-dimensionalized natural frequency

(d) Fourth non-dimensionalized natural frequency

Fig. 2 Natural frequencies versus μ and β

(a) First natural mode shapes

(b) Second natural mode shapes

(c) Third natural mode shapes

(d) Fourth natural mode shapes

Fig. 3 Natural mode shapes versus β ($\mu=0.2$)

(a) First natural mode shapes

(b) Second natural mode shapes

(c) Third natural mode shapes

(d) Fourth natural mode shapes

Fig. 4 Natural mode shapes versus β ($\mu=1$)

Fig. 5 1st natural frequency versus rope length

4. 결 론

이 연구에서는 엘리베이터 로프의 동적 거동을 조사하기 위해 위 단이 고정이고 아래 단에는 스프링-질량계가 부착된 모델을 고려하였다. 이 모델에 대해 운동에너지와 위치에너지를 유도하고 해밀턴원리를 적용해 운동방정식과 경계조건을 유도하였다. 이 운동방정식과 경계조건으로부터 특정방정식을 유도하고 고유모드에 대한 식을 유도하였다. 특성방정식의 해의 값은 엘리베이터 케이지와 로프의 질량비와 스프링-질량계의 고유진동수와 단진자 고유진동수비에 의해 결정됨을 확인하였다. 이 연구를 통해 다음과 같은 결론을 도출하였다.

엘리베이터 케이지의 질량이 커지면 로프의 고유진동수가 증가한다. 스프링 강성이 클 경우에는 증가폭이 더 커진다.

엘리베이터의 질량비가 일정할 경우 임계 스프링 강성이 존재한다. 이 임계값 부근에서 고유진동수는 큰 폭으로 변화한다. 그러나 임계값에서 먼 영역에서는 스프링 강성에 의한 변화는 거의 일정하다.

엘리베이터의 질량비와 가이드롤러의 스프링 강성 모두 고유진동 모드에 영향을 미친다. 스프링의 강성이 클 경우 케이지의 횡방향 운동이 구속되어 케이지 연결부의 로프 진동이 감소되며, 로프의 길이가 짧아 질량비가 클 경우 케이지 질량으로 인해 발생하는 장력이 커져 고유진동모드에 중력의 영향이 감소한다.

이 연구 결과는 엘리베이터 로프 및 케이지 설

계자료로 유용하게 사용될 것으로 예상된다. 차후 길이가 변하는 시스템에 대한 연구가 진행될 예정이다.

후 기

이 연구는 연구재단에서 지원한 과제(No. 2010-0009611)로 수행되었습니다.

References

- (1) Watson, G. N., 1958, A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: Cambridge University Press.
- (2) Huang, T. and Dareing, D. W., 1969, Frequencies of a Hanging Chain, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 45, No. 4, pp. 1046~1049.
- (3) Sujith, R. I. and Hodges, D. H., 1995, Exact Solution for the Free Vibration of a Hanging Cord with a Tip Mass, Journal of Sound and Vibration, Vol. 179, No. 2, pp. 359~361.
- (4) Zhu, W. D. and Xu, G. Y., 2003, Vibration of Elevator Cables with Small Bending Stiffness, Journal of Sound and Vibration, Vol. 263, pp. 679~699.
- (5) Andrew, P. and Kaczmarczyk, S., 2011, Rope Dynamics, Elevator World, Vol. 263, pp. 45~56.
- (6) Kimura, H., Ito, H., Fujita, Y. and Nakagawa, T., 2006, Vibration Analysis of Elevator Rope (3rd Report, Forced Vibration of Rope Whose Both Ends are Moving), Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 72, No. 718, pp. 1745~1750.
- (7) Kimura, H., Ito, H. and Nakagawa, T., 2008, Vibration Analysis of Elevator Rope (Forced Vibration of Rope with Time-Varying Length), Journal of System Design and Dynamics, Vol. 2, No. 1, pp. 87~96.
- (8) Kimura, H., Ito, H. and Nakagawa, T., 2008, Vibration Analysis of Elevator Rope (2nd Report, Forced Vibration of Rope with Damping), Journal of System Design and Dynamics, Vol. 2, No. 2, pp. 540~549.
- (9) Kimura, H., Iijima, T., Matsuo, S. and Fujita, Y., 2009, Vibration Analysis of Elevator Rope (Comparison between Experimental Results and Calculated Results), Journal of System Design and Dynamics, Vol. 3, No. 3, pp. 420~428.

(10) Kimura, H., Min, Z., Ishii, T., Yamamoto, A. and Shiba, H., 2011, Vibration Analysis of Elevator Rope(Simplified Calculation Method for Detecting Rope Deflection of Moving Cage during Earthquake), Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 77, No. 773, pp. 43~50.

(11) Baek, K.-H., Kim, K. Y. and Kwak, M. K., 2011, Dynamic Modeling and Controller Design for Active Control of High-speed Elevator Front-back Vibrations, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 21, No. 1, pp. 74~80.

(12) Kwak, M. K., Kim, K. Y. and Baek, K.-H., 2011, Dynamic Modeling and Active Controller Design for Elevator Lateral Vibrations, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 21, No. 2, pp. 154~161.

(13) Kim, K. Y., Kwak, M. K. and Baek, K.-H., 2011, Active Control Experiments on High-speed Elevator Vibrations, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 21, No. 4, pp. 325~332.

(14) Yang, D.-H. and Kwak, M. K., 2013, A Study on Lateral Vibration of Elevator Rope, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 626~627.

Moon K. Kwak received B.S. and M.S. degree in Naval Architecture from Seoul National University in 1981 and 1983. He then received his Ph.D. degree from the Dept. of Engineering Science and Mechanics of Virginia Tech in 1989. He is currently a professor at the Department of Mechanical, Robotics and Energy Engineering of Dongguk University in Seoul, Korea. His research interests are dynamics and control of flexible multibody system, and active vibration control of smart structure.

Sangbo Han received his B.S. and M.S. degree in Naval Architecture from Seoul National University. He received his Ph.D. degree from the Dept. of Engineering Mechanics of Iowa State University in 1988. He is currently a professor of School of Mechanical Engineering of Kyungnam University in Masan, Korea. His research interests are noise and vibration control.