육면체 요소를 도입한 유한요소-전달강성계수법에 의한 3차원 고체 구조물의 정적 해석 Static Analysis of Three Dimensional Solid Structure by Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method Introducing Hexahedral Element

최명수 · 문덕홍

Myung-Soo Choi and Deok-Hong Moon

(접수일 : 2011년 10월 15일, 수정일 : 2011년 12월 23일, 채택확정 : 2011년 12월 23일)

Key Words : Hexahedral Element(육면체 요소), Three Dimensional Solid Structure(3차원 고체 구조물), Static Analysis(정적 해석), Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method(유한요소-전달강성계수법), Finite Element Method(유한요소법)

Abstract : The authors suggest the algorithm for the static analysis of a three dimensional solid structure by using the finite element-transfer stiffness coefficient method (FE-TSCM) and the hexahedral element of the finite element method (FEM). MATLAB codes were made by both FE-TSCM and FEM for the static analysis of three dimensional solid structure. They were applied to the static analyses of a very thick plate structure and a three dimensional solid structure. In this paper, as we compare the results of FE-TSCM with those of FEM, we confirm that FE-TSCM introducing the hexahedral element for the static analysis of a three dimensional solid structure is very effective from the viewpoint of the computational accuracy, speed, and storage.

1. 서 론

대부분의 기계나 구조물의 설계 시에 정적 해석은 반드시 필요한 기본적인 해석의 하나이다. 복잡한 구조물도 기본적인 요소들의 조립을 통해 편리하게 해석할 수 있는 유한요소법(finite element method)¹⁾은 오늘날 가장 빈번히 이용되는 정적해석 방법 중의 하나이다. 그러나 유한요소법은 구조물의 자유도가 많은 경우 수치 계산 시에 요구되는 계산 시간이나 기억용량이 급격히 커지는 취약점이 있다²⁾.

유한요소법의 취약점을 극복하기 위한 대안으로 저자들은 유한요소-전달강성계수법(finite element-transfer stiffness coefficient method)²⁾⁻⁴⁾을 개발하여 제안한 바 있다. 이 방법은 유한요소법 연구자들이 개발한 유한요소를 도입하여 모델링에 이용하고, 강성계수의 전달에 기본 개념을 두고 있는 전달강성

계수법을 이용하여 정적 해석을 효과적으로 수행하는 방법이다. 그러나 기존의 유한요소-전달강성계수법은 적용 가능한 대상이 가늘고 긴 직선 보나 얇은 평판과 같은 1차원 및 2차원 구조물에 국한되는 제한성이 있었다. 즉, 단면적에 비해 길이가 짧은 보 구조물, 두꺼운 평판 구조물과 같은 3차원 고체 구조물의 정적 해석은 기존의 유한요소-전달강성계수법으로는 해석이 곤란하였다. 따라서 사용자의 편리성 및 계산의 정확성을 위해 유한요소-전달강성계수법에 3차원 고체(solid) 요소⁵⁾를 도입할 필요성이 있었다.

이 논문에서는 3차원 고체 요소 중에서 대표적인 6면체 요소(hexahedral element)⁶⁾를 도입한 유한요소-전달강성계수법을 이용하여 3차원 고체 구조물의 정적 해석을 수행하기 위한 알고리즘을 설명한다. 그리고 기존의 유한요소-전달강성계수법으로는 해석이 곤란했던 3차원 고체 구조물을 대상으로 정적 해석을 수행하고 그 결과를 유한요소법의 결과와 비교한다.

최명수(교신저자) : 전남대학교 해양경찰학과
E-mail : engine@chonnam.ac.kr, Tel : 061-659-7183
문덕홍 : 부경대학교 기계시스템공학과

2. 정적 해석 알고리즘

2.1 해석 모델

Fig. 1과 같이 탄성 지지된 3차원 고체 구조물은 Fig. 2와 같은 블록(block)의 연속이므로 다수의 블록들로 분할되고, 블록의 분할면을 절면(nodal plane)이라고 부른다. 구조물을 n 개의 블록으로 분할할 경우에 첫 번째 절면부터 마지막 $n+1$ 번째 절면이 존재하고, 각 절면을 순차적으로 절면 1, 절면 2, ..., 절면 $n+1$ 이라고 한다. 그리고 이 블록은 8개의 절점을 갖는 6면체 요소로 구성된다. 6면체 요소의 각 절점은 X축, Y축, Z축 방향의 3자유도를 가지며, 각 절점의 방향별 병진 변위를 각각 u , v , w 라고 한다.

절점은 X, Y, Z 방향의 기초지지 스프링으로 지지될 수 있고, 구조물의 경계조건은 절면 1과 절면 $n+1$ 의 절점에 부착된 기초지지 스프링으로 처리한다.

2.2 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식

선형 8절점 6면체 요소⁶⁾에 대한 강성행렬($\mathbf{K}^{(e)}$)은 크기가 24×24 이며 다음 식으로 구할 수 있다.

Fig. 1 Analytical model

Fig. 2 Block and hexahedral element

$$\mathbf{K}^{(e)} = \iiint \mathbf{H}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{H} dV \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{D}$ 는 6×6 크기의 구성행렬(constitutive matrix)이고, $\mathbf{H}$ 는 6×24 크기의 변형률-절점변위행렬이다. 이 행렬들의 자세한 내용은 부록에 제시한다.

Fig. 2에 나타난 블록은 8절점 6면체 요소의 조합이므로 기존의 유한요소법의 조립 과정을 통해 블록의 강성행렬을 구할 수 있다. i 번째 블록의 강성행렬($\mathbf{K}_i^{(b)}$)은 부분 강성행렬($\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{C}_i$)로 나누어 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_i^L \\ \tilde{\mathbf{F}}_i^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_i^L \\ \tilde{\mathbf{X}}_i^R \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{F}}_i^L$ 와 $\tilde{\mathbf{F}}_i^R$ 는 i 번째 블록 좌우측의 힘벡터, $\tilde{\mathbf{X}}_i^L$ 와 $\tilde{\mathbf{X}}_i^R$ 는 i 번째 블록 좌우측의 변위벡터이다.

절면 i 의 우측에서 힘벡터($\mathbf{F}_i$)와 변위벡터($\mathbf{X}_i$) 사이의 관계를 절면강성계수행렬($\mathbf{S}_i$)과 힘보정벡터($\mathbf{E}_i$)를 이용하여 다음 식과 같이 정의한다.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{E}_i \quad (3)$$

여기서 절면 i 에 m 개의 절점이 존재할 경우, $\mathbf{S}_i$ 는 $3m \times 3m$ 의 정방행렬, $\mathbf{E}_i$ 는 $3m \times 1$ 의 열벡터이다.

절면 $i+1$ 의 좌측에서 힘벡터($\bar{\mathbf{F}}_{i+1}$)와 변위벡터($\bar{\mathbf{X}}_{i+1}$) 사이의 관계를 절면강성계수행렬($\bar{\mathbf{S}}_{i+1}$)과 힘보정벡터($\bar{\mathbf{E}}_{i+1}$)를 이용하여 정의한다.

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+1} = \bar{\mathbf{S}}_{i+1} \bar{\mathbf{X}}_{i+1} + \bar{\mathbf{E}}_{i+1} \quad (4)$$

여기서 동일 기호 위에 $-$ 를 붙인 것은 절면의 좌측, 붙이지 않은 것은 절면의 우측을 뜻하고, 하첨자는 해당 절면 번호 또는 블록 번호를 뜻한다.

i 번째 블록 좌측의 힘벡터($\tilde{\mathbf{F}}_i^L$)와 i 번째 절면 우측의 힘벡터($\mathbf{F}_i$)는 크기가 같고 방향이 반대이므로, 식 (2)는 다음 식과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \bar{\mathbf{F}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_i & -\mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \bar{\mathbf{X}}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

식 (3)과 식 (5) 그리고 변위벡터의 연속조건($\bar{\mathbf{X}}_{i+1} = \mathbf{X}_{i+1}$)으로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{E}_i \quad (6)$$

여기서

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{S}_i + \mathbf{A}_i \quad (7)$$

이다. 식 (4), (5), (6)으로부터 절면강성계수행렬 및 힘보정벡터의 필드(field) 전달식인 식 (8)을 유도한다.

$$\bar{\mathbf{S}}_{i+1} = \mathbf{C}_i + \mathbf{B}_i^T \mathbf{V}_i, \quad \bar{\mathbf{E}}_{i+1} = -\mathbf{B}_i^T \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{E}_i \quad (8)$$

절면 $i+1$ 에 m 개의 절점이 존재하고, 임의의 절점 j 에 X , Y , Z 축 방향의 스프링상수가 각각 $(k_{xj}, k_{yj}, k_{zj})_{i+1}$ 인 기초지지 스프링이 존재하거나 또는 3축 방향의 외력의 크기 $(q_{xj}, q_{yj}, q_{zj})_{i+1}$ 인 외력이 작용하면, 절면 $i+1$ 에서 힘의 평형식은

$$\mathbf{F}_{i+1} = \bar{\mathbf{F}}_{i+1} + \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{Q}_{i+1} \quad (9)$$

여기서

$$\mathbf{P}_{i+1} = \text{diag}(k_{x1}, k_{y1}, k_{z1}, k_{x2}, \dots, k_{zm})_{i+1}, \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}_{i+1} = \text{diag}(q_{x1}, q_{y1}, q_{z1}, q_{x2}, \dots, q_{zm})_{i+1}$$

절면에서 변위의 연속조건($\bar{\mathbf{X}}_{i+1} = \mathbf{X}_{i+1}$), 식 (3)의 i 대신에 $i+1$ 을 대입한 식 그리고 식 (4)와 (9)로부터 절면강성계수행렬 및 힘보정벡터의 포인트(point) 전달식인 식 (11)을 유도한다.

$$\mathbf{S}_{i+1} = \bar{\mathbf{S}}_{i+1} + \mathbf{P}_{i+1}, \quad \mathbf{E}_{i+1} = \bar{\mathbf{E}}_{i+1} - \mathbf{Q}_{i+1} \quad (11)$$

2.3 변위 계산

좌단의 경계조건을 절면 1의 기초지지 스프링으로 모델링하였으므로 절면 1 좌측의 힘벡터 $\bar{\mathbf{F}}_1$ 는 해석적으로 영벡터가 된다. 식 (4)와 (9)의 i 대신에 0을 대입한 식들로부터 절면 1 우측의 $\mathbf{S}_1$ 및 $\mathbf{E}_1$ 을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{E}_1 = -\mathbf{Q}_1 \quad (12)$$

식 (12)를 시작으로, 식 (8)과 (11)의 필드 및 포인트 전달식을 순차적으로 적용하면, 끝단인 절면 $n+1$ 우측의 $\mathbf{S}_{n+1}$ 및 $\mathbf{E}_{n+1}$ 을 계산할 수 있다.

끝단에서도 경계조건을 절면 $n+1$ 의 기초지지 스프링으로 모델링하였으므로 절면 $n+1$ 의 우측에서 $\mathbf{F}_{n+1}$ 은 해석적으로 영벡터가 된다. 따라서 식 (3)의 i 에 $n+1$ 을 대입한 식으로부터 우단인 절면 $n+1$ 의 변위벡터를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{X}_{n+1} = -\mathbf{S}_{n+1}^{-1} \mathbf{E}_{n+1} \quad (13)$$

식 (13)으로부터 절면 $n+1$ 의 변위를 계산한 후, 나머지 절면의 변위는 식 (6)을 이용하여 우단에서 좌단으로 전달하면서 절면의 변위를 구한다.

3. 수치 계산 결과 및 고찰

3.1 두꺼운 사각평판의 정적 해석

계산 모델 1은 평판의 길이와 폭이 각각 0.3 m, 두께가 0.03 m인 두꺼운 정사각형 평판이다. Fig. 3와 같이 평판의 모서리에 10000 N의 하중이 Z 방향으로 작용할 때, 평판을 $10 \times 10 \times 1$ 부터 $50 \times 50 \times 5$ 까지 다양하게 분할하여 각 절점의 변위를 계산하였다. 평판 재료의 종탄성계수는 72 GPa, 프아송비는 0.32이다.

매트랩(MATLAB)⁷⁾ 프로그램을 이용하여, 평판을 $N_x \times N_y \times N_z$ ($N_x = N_y = 10, 20, 30, 40, 50, N_z = 1, 2, 3, 4, 5$)와 같이 25가지 종류로 분할하여 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 정적 해석을 수행하였다. 유한요소법은 분할 수가 $20 \times 20 \times 4$ 이상, $30 \times 30 \times 2$ 이상, $40 \times 40 \times 1$ 이상에서는 메모리 과다 사용으로 인해 계산이 곤란하였다. 이에 반해 유한요소-전달강성계수법은 25가지 모든 분할 수에 대해서 계산이 정상적으로 수행되었다.

Fig. 3 Model 1 with $10 \times 10 \times 1$ mesh

각종 분할 수에서 하중의 작용점의 변위(u, v, w)를 양 방법으로 계산한 결과가 Table 1과 Table 2이다. 동일한 분할 수에서 유한요소-전달강성계수법의 변위 계산 결과는 유한요소법의 결과와 잘 일치하였다. 그리고 변위 값은 요소의 분할수를 가장 상세하게 모델링한 $50 \times 50 \times 5$ 분할수 모델의 변위 값에 수렴해 감을 알 수 있었다.

Table 1. Nodal displacements of computation model 1 by FE-TSCM [unit: m]

Mesh	Displacements		
	u	v	w
10×10×1	1.3733e-04	-8.7105e-05	1.8553e-03
10×10×2	1.4954e-04	-9.3159e-05	1.9958e-03
10×10×3	1.5364e-04	-9.5974e-05	2.0340e-03
10×10×4	1.5529e-04	-9.7168e-05	2.0484e-03
10×10×5	1.5611e-04	-9.7769e-05	2.0554e-03
30×30×1	1.6617e-04	-9.6250e-05	2.2325e-03
30×30×2	1.9094e-04	-1.1064e-04	2.4727e-03
30×30×3	2.0228e-04	-1.1965e-04	2.5441e-03
30×30×4	2.0870e-04	-1.2522e-04	2.5736e-03
30×30×5	2.1275e-04	-1.2886e-04	2.5887e-03
50×50×1	1.7002e-04	-9.7963e-05	2.2875e-03
50×50×2	1.9842e-04	-1.1543e-04	2.5536e-03
50×50×3	2.1359e-04	-1.2814e-04	2.6419e-03
50×50×4	2.2377e-04	-1.3740e-04	2.6828e-03
50×50×5	2.3120e-04	-1.4440e-04	2.7058e-03

Table 2. Nodal displacements of computation model 1 by FEM [unit: m]

Mesh	Displacements		
	u	v	w
10×10×1	1.3733e-04	-8.7105e-05	1.8553e-03
10×10×2	1.4954e-04	-9.3159e-05	1.9959e-03
10×10×3	1.5364e-04	-9.5973e-05	2.0340e-03
10×10×4	1.5529e-04	-9.7168e-05	2.0484e-03
10×10×5	1.5611e-04	-9.7770e-05	2.0554e-03
20×20×1	1.6003e-04	-9.3977e-05	2.1518e-03
20×20×2	1.8074e-04	-1.0523e-04	2.3644e-03
20×20×3	1.8903e-04	-1.1144e-04	2.4243e-03
30×30×1	1.6617e-04	-9.6250e-05	2.2325e-03

Fig. 4 Computational time of model 1

Fig. 4는 양 방법으로 분할 수(10×10×1부터 10×10×5까지)별로 소요되었던 계산 시간을 보여준다. 계산 시간 측면에서도 요소의 분할 수가 증가할수록 유한요소-전달강성계수법이 유한요소법보다 훨씬 빠르다는 것을 알 수 있었다.

3.2 3차원 솔리드 구조물의 정적 해석

계산 모델 2는 세변의 길이가 각각 0.5m×1.0m×2.0m이고, X-Y 평면(z=0)의 모든 절점이 고정인 3차원 고체 구조물이다. Fig. 5와 같이 절면 3에 -X축 방향으로 압력 5 MPa이 작용할 때, 구조물을 1×2×4부터 8×16×32까지 다양하게 분할하여 각 절점의 변위를 계산하였다. 평균 재료의 종탄성계수는 72 GPa, 프아송비는 0.32이다.

매트랩 프로그램을 이용하여, 구조물을 1×2×4, 2×4×8, 3×6×12, ..., 8×16×32와 같이 8가지 종류로 분할하여 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 정적 해석을 수행하였다. 유한요소법은 분할 수 6×12×24 이상에서는 메모리 과다 사용으로 인해 계산이 곤란하였다. 이에 반해 유한요소-전달강성계수법은 8가지 모든 분할 수에서 계산이 정상적으로 수행되었다.

Fig. 5와 같이, 분할 수 2×4×8에서 구조물의 Z방향 최상부(z=2.0 m) 평면의 절점 변위를 양 방법으로 계산한 결과가 Table 3과 Table 4이다. 양 방법의 계산 결과가 대체로 잘 일치하고 있다.

Fig. 5 Model 2 with 2×4×8 mesh

Table 3. Nodal displacements of computation model 2 by FE-TSCM [unit: m]

Node	Displacements		
	u	v	w
41	-1.1729e-03	-1.4632e-06	-1.8625e-04
42	-1.1740e-03	-9.5660e-07	-1.8650e-04
43	-1.1745e-03	5.9124e-18	-1.8647e-04
44	-1.1740e-03	9.5660e-07	-1.8650e-04
45	-1.1729e-03	1.4632e-06	-1.8625e-04
86	-1.1733e-03	-5.5517e-07	2.1207e-06
87	-1.1745e-03	-2.7749e-07	2.1202e-06
88	-1.1751e-03	7.7347e-18	2.1200e-06
89	-1.1745e-03	2.7749e-07	2.1202e-06
90	-1.1733e-03	5.5517e-07	2.1207e-06
131	-1.1746e-03	3.5292e-07	1.9049e-04
132	-1.1757e-03	4.0163e-07	1.9074e-04
133	-1.1763e-03	9.7144e-18	1.9071e-04
134	-1.1757e-03	-4.0163e-07	1.9074e-04
135	-1.1746e-03	-3.5292e-07	1.9049e-04

Table 4. Nodal displacements of computation model 2 by FEM [unit: m]

Node	Displacements		
	u	v	w
41	-1.1729e-03	-1.4605e-06	-1.8625e-04
42	-1.1740e-03	-9.5385e-07	-1.8650e-04
43	-1.1745e-03	2.7510e-09	-1.8647e-04
44	-1.1740e-03	9.5936e-07	-1.8650e-04
45	-1.1729e-03	1.4660e-06	-1.8625e-04
86	-1.1733e-03	-5.5292e-07	2.1214e-06
87	-1.1745e-03	-2.7524e-07	2.1206e-06
88	-1.1751e-03	2.2500e-09	2.1201e-06
89	-1.1745e-03	2.7974e-07	2.1200e-06
90	-1.1733e-03	5.5742e-07	2.1202e-06
131	-1.1746e-03	3.5467e-07	1.9049e-04
132	-1.1757e-03	4.0338e-07	1.9074e-04
133	-1.1763e-03	1.7490e-09	1.9071e-04
134	-1.1757e-03	-3.9988e-07	1.9074e-04
135	-1.1746e-03	-3.5117e-07	1.9049e-04

Fig. 6는 유한요소-전달강성계수법으로 구한 계산 모델(분할 수 $2 \times 4 \times 8$)의 변형된 형상이다. 그림에서는 변위를 확실히 보여주기 위해 변위 값을 100배 증폭하였다.

Fig. 5의 절점 41에 해당하는 정점(vertex), 즉, 좌표 (0 m, 0 m, 2 m)의 절점 변위를 각종 분할 수에 따라 양 방법으로 계산한 결과가 Table 5와 Table 6이다. 동일한 분할 수에서 유한요소-전달강성계수법의 변위 계산 결과는 유한요소법의 결과와 잘 일치하였다. 그리고 여기에서도 요소의 분할 수가 증가될수록 변위 값이 수렴해감을 확인할 수 있었다.

Fig. 6 Deformation of model 2

Table 5. Displacements of vertex of computation model 2 by FE-TSCM [unit: m]

Mesh	Displacements		
	u	v	w
$1 \times 2 \times 4$	-8.8236e-04	-1.7295e-06	-1.3935e-04
$2 \times 4 \times 8$	-1.1729e-03	-1.4632e-06	-1.8625e-04
$3 \times 6 \times 12$	-1.2677e-03	-1.2091e-06	-2.0046e-04
$4 \times 8 \times 16$	-1.3075e-03	-1.0989e-06	-2.0627e-04
$5 \times 10 \times 20$	-1.3279e-03	-1.0449e-06	-2.0920e-04
$6 \times 12 \times 24$	-1.3397e-03	-1.0155e-06	-2.1088e-04
$7 \times 14 \times 28$	-1.3472e-03	-9.9802e-07	-2.1193e-04
$8 \times 16 \times 32$	-1.3523e-03	-9.8700e-07	-2.1264e-04

Table 6. Displacements of vertex of computation model 2 by FEM [unit: m]

Mesh	Displacements		
	u	v	w
$1 \times 2 \times 4$	-8.8236e-04	-1.7295e-06	-1.3935e-04
$2 \times 4 \times 8$	-1.1729e-03	-1.4605e-06	-1.8625e-04
$3 \times 6 \times 12$	-1.2677e-03	-1.2158e-06	-2.0046e-04
$4 \times 8 \times 16$	-1.3075e-03	-1.1008e-06	-2.0627e-04
$5 \times 10 \times 20$	-1.3279e-03	-1.0438e-06	-2.0920e-04

Fig. 7 Computational time of model 2

Fig. 7은 양 방법으로 분할 수(10×10×1부터 10×10×5까지)별로 소요되었던 계산 시간을 보여준다. 계산 시간 측면에서도 요소의 분할 수가 증가할수록 유한요소-전달강성계수법이 유한요소법보다 훨씬 빠르다는 것을 알 수 있었다.

4. 결 론

3차원 육면체요소를 도입한 유한요소-전달강성계수법으로 3차원 고체 구조물의 정적 해석을 수행하기 위한 알고리즘을 정식화하였다. MATLAB으로 3차원 고체 구조물용 정적 해석 프로그램을 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 각각 작성한 후, 두꺼운 평판형 구조물과 3차원 고체 구조물의 정적 해석에 적용하여 수치 계산을 실행하였다.

양 방법에 의한 계산 정도 및 계산 속도를 비교한 결과, 유한요소-전달강성계수법이 3차원 육면체 요소를 채용한 3차원 고체 구조물의 정적 해석에서 신뢰성이 있음을 확인하였다. 그리고 계산 시간 및 기억 용량의 측면에서도 기존의 유한요소법보다 효과적으로 정적해석을 수행한다는 것을 알 수 있었다.

참고 문헌

1. 이재영, 2011, “유한요소법”, 문운당, 서울.
2. 최명수, 2007, “강성계수의 전달에 의한 평판 구조물의 구조해석”, 한국동력기계공학회지, 제11권, 제1호, pp. 92-97.
3. Myung-Soo Choi, 2003, “Free Vibration Analysis of Plate Structures Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method”, KSME International Journal, Vol. 17, No. 6, pp. 805-815.
4. 최명수, 문덕홍, 김성진, 2002, “유한요소-전달강성

계수법을 이용한 골조 구조물의 과도응답해석”, 한국소음진동공학회논문집, 제12권, 제9호, pp. 674-684.

5. 김기두, 2008, “선형유한요소해석 입문”, 구미서관, 서울, pp. 527-569.
6. Young W. Kwon and Hyochoong Bang, 2000, “The Finite Element Method Using MATLAB (2nd ed.)”, CRC Press, New York, pp. 351-360.
7. 임종수, 1998, “MATLAB 완벽 가이드”, 가상과현실, 서울.

부 록

식 (1)의 행렬 D 는 6×6 크기의 구성행렬이고, H 는 6×24 크기의 변형률-절점변위행렬이다. 이 행렬들의 자세한 내용은 다음과 같다.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

여기서 $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 이고, ν 는 포와송 비, E 는 탄성계수이다.

$$H = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4 \ H_5 \ H_6 \ H_7 \ H_8],$$

$$H_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}^T,$$

여기서 N_i 는 절점 i 에서 1의 값을 갖고, 나머지 7 절점에서 0의 값을 갖는 라그랑지 형상함수¹⁾이다.