분포분할법을 이용한 휴리스틱 공정능력지수의 비교 분석

장 영 순[†]

명지대학교 경영학과

Heuristic Process Capability Indices Using Distribution-decomposition Methods

Chang, Youngsoon[†]

Department of Business Administration, Myongji University

Abstract

Purpose: This study develops heuristic process capability indices (PCIs) using distribution-decomposition methods and evaluates the performances. The heuristic methods decompose the variation of a quality characteristic into upper and lower deviations and adjust the value of the PCIs using decomposed deviations in accordance with the skewness. The weighted variance(WV), new WV(NWV), scaled WV(SWV), and weighted standard deviation(WSD) methods are considered.

Methods: The performances of the heuristic PCIs are investigated under the varied situations such as various skewed distributions, sample sizes, and specifications.

Results: WV PCI is the best under the normal populations, WSD and SWV PCIs are the best under the low skewed populations, NWV PCI is the best under the moderate and high skewed populations.

Conclusion: Comprehensive analysis shows that the NWV method is most adequate for a practical use.

Key Words : Process Capability Index, Skewed Distribution, Weighted Variance, New Weighted Variance, Scaled Weighted Variance, Weighted Standard Deviation

1. 서 론

공정능력분석(process capability analysis)은 관리상태에 있는 공정으로부터 얻어지는 품질특성치의 변동 정도를 규격과 비교·분석하는 것으로 통계적 공정관리(SPC; Statistical Process Control) 활동의 중요한 영역으로 인식되어 왔다. 공정의 능력은 사전에 정해진 공정의 규격과 공정으로부터 얻어지는 품질특성치의 산포를 비교하여 하나

• Received 15 March 2013, revised 17 April 2013, accepted 29 April 2013

[†] Corresponding Author(yschang@mju.ac.kr)

© 2013, The Korean Society for Quality Management

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-Commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

의 수치로 표현한 공정능력지수(PCI; Process Capability Index)를 사용하여 평가하는 것이 일반적이다(Baik and Jo 1999, Cho et al. 2004, Kotz and Johnson 2002, Pearn and Kotz 2006, Wu et al. 2009). 공정능력지수 중 전통적으로 가장 널리 사용되는 것으로 C_p 와 C_{pk} 가 있으며, 각각 다음의 식 (1)과 식 (2)로 정의된다.

$$C_p = (USL - LSL) / 6\sigma, \quad (1)$$

$$C_{pk} = \min\{C_{pku}, C_{pkl}\} = \min\left\{\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\}, \quad (2)$$

여기서 USL 과 LSL 은 각각 규격의 상한과 하한을 의미하고 μ 는 공정평균, σ 는 공정표준편차를 의미한다. C_p 와 C_{pk} 는 공정으로부터 얻은 품질특성치들이 정규분포를 따르는 경우 규격을 벗어나는 제품의 비율을 반영할 수 있도록 설계되었다. 예를 들어 규격의 상한과 하한이 존재하고 $\mu = (USL + LSL)/2$ 로 공정평균과 규격의 중심이 일치하는 경우, 공정의 능력이 $C_p = 1$ 혹은 $C_{pk} = 1$ 로 평가되었다면 그 공정으로부터 얻어지는 품질특성치의 99.73%는 규격 내에 존재하고 불량률은 0.27%가 된다.

실제 공정에서 얻어지는 품질특성치는 정규분포를 따르는 않는 경우가 있으며 특히, 화학공정, 반도체공정, 절삭공정 등에서 얻은 품질특성치들은 비대칭 분포를 따르는 경우가 다수 존재한다(Bittanti et al. 1998, Gunter 1989, Abbasi and Niaki 2010). 품질특성치들이 비대칭 분포를 따르는 경우 전통적인 공정능력지수는 분포의 왜도(skewness)를 반영하지 못하여 공정의 능력을 정확히 평가하지 못하게 된다(Chen 2000, Lim and Pyun 2000, English and Taylor 1993, Pyzdek 1995, Somerville and Montgomery 1996-97). 즉, 공정의 불량률이 0.27%를 초과하는 경우에도 공정능력이 $C_p = 1$ 인 경우로 평가되는 경우가 발생할 수 있다. 이러한 경우 C_p 값을 보고 공정의 불량률과 연계된 공정능력을 판단하는 엔지니어들은 공정의 능력을 과대평가할 가능성이 높게 된다. 이를 해결하기 위해 품질특성치가 정규분포를 따르지 않는 경우 공정의 불량률을 반영할 수 있는 공정능력지수에 관한 연구들이 진행되어 왔다. 비정규 모집단에서의 공정능력지수에 관한 연구는 정규변환(normalizing transformation)을 이용하여 비대칭분포를 정규분포로 변환한 후 전통적인 공정능력지수를 이용하는 방법, 경험분포(empirical distribution) 혹은 다양한 상황을 묘사할 수 있는 3 또는 4-모수 분포를 활용하여 분포의 0.135백분위수(percentile)와 99.865백분위수를 추정한 후 분포의 산포를 구하는 방법, 공정능력지수가 분포의 형태에 강건(robust)하도록 공정능력지수의 모수를 변화시키는 방법, 공정의 불량률을 추정한 후 추정된 불량률을 공정능력지수로 역산하는 방법, 분포의 산포를 분할하여 분포의 위쪽 부분과 아래쪽 부분에 서로 다른 산포를 활용하는 휴리스틱(heuristic) 방법 등으로 나누어 볼 수 있다(Chang and Bai 2007, Pearn and Kotz 2006).

이 중 정규변환 및 경험분포 등을 이용하는 방법은 공정능력을 추정하는 데 있어 다른 방법에 비해 상대적으로 복잡하고 많은 양의 데이터를 필요로 하므로 통계적 방법에 익숙하지 않은 공정관리자들이 사용하기에는 현실적인 어려움이 따르며, 분포에 강건한 모수를 사용하는 방법은 성능이 만족스럽지 않은 것으로 알려져 있다. 또한, 공정의 불량률을 직접 추정하여 공정능력을 계산하는 방법을 사용하기 위해서는 공정의 능력이 우수한 경우에 매우 많은 양의 데이터를 수집해야 하거나 품질특성치의 분포를 가정 혹은 추정해서 사용해야 하는 현실적인 제약이 존재한다. 이에 비해 분포분할법을 이용하는 휴리스틱 방법은 공정능력지수의 추정에 분포의 가정이 필요없으며 비교적 적은 양의 데이터를 이용하는 간단한 방법으로 공정의 능력을 손쉽게 추정하여 현실적으로 사용이 용이하다는 장점이 있다. 또한, 다른 방법들에 비해서도 그 성능이 떨어지지 않는 것으로 알려져 있다(Chang and Bai 2007, Pearn and Kotz 2006, Wu et al. 1999).

몇몇의 분포분할 방법을 이용한 공정능력지수가 개발되고 기존의 방법과 비교하여 성능이 우수한 것이 입증되었

으나, 분포분할 방법들 간의 비교를 통해 성능을 평가하고 특성을 분석한 연구는 수행되지 못하였다. 따라서, 다양한 분포분할 방법을 활용한 공정능력지수들을 개발하고 이들의 성능을 비교함으로써 공정관리자들이 현실적으로 사용할 수 있는 공정능력지수를 파악하는 것은 중요한 연구라고 할 수 있다.

이 연구에서는 현재까지 개발된 휴리스틱 공정능력지수들을 살펴보고, 새로운 휴리스틱 방법들을 제안한 후, 정규 분포를 비롯하여 대수정규분포, 와이블분포 및 감마분포 등 다양한 비대칭 분포 하에서 이들의 성능을 비교·분석한다. 이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 비대칭 모집단으로부터 얻어진 품질특성치의 관리를 위한 분포분할법과 이를 활용한 공정능력지수에 대해 살펴보고 몇 가지 방법들을 제안한 후, 제 3장에서는 정규, 대수정규, 와이블 및 감마분포 하에서 공정능력지수의 성능을 비교하고 분석한다. 마지막으로 제 4장에서는 연구결과로부터 얻을 수 있는 시사점에 관해 논의하고 향후 연구방향을 제시한다.

2. 분포분할법을 이용한 휴리스틱 공정능력지수

통계적 공정관리에서 사용되는 분포분할법은 품질특성치가 비대칭 분포를 따르는 경우 공정평균을 중심으로 분포의 위쪽(오른쪽)과 아래쪽(왼쪽) 산포의 정도가 다르다는 점에 착안하여 개발된 것으로, 공정의 산포를 평균을 중심으로 둘로 나누어 분포의 위쪽과 아래쪽을 각각 다른 산포를 이용하여 관리하는 방법이다. Figure 1은 분포분할법의 개념을 설명한 것이다. 분포의 산포를 나타내는 σ 를 평균 위쪽의 산포를 나타내는 σ_U 와 아래쪽의 산포를 나타내는 σ_L 의 두 부분으로 분리한 후 분리된 각각의 산포를 표준편차로 하는 두 개의 정규분포 $N(\mu, (2\sigma_U)^2)$ 과 $N(\mu, (2\sigma_L)^2)$ 을 사용하여 평균 위쪽의 분포와 아래쪽의 분포를 근사화한다. 분포분할 방법을 관리도(control chart)에 적용하는 경우에는 정규분포를 활용하여 품질특성치의 확률분포를 근사화한다는 관점에서 정규분포 가정 하에서 개발된 기존의 방법론을 그대로 활용할 수 있으며 공정의 치우침 정도에 따라 관리한계선(control limit)이 비대칭적으로 변화하게 되어 분포의 왜도를 반영할 수 있게 된다. 또한, 품질특성치의 분포가 정규분포를 따르는 경우에는 정규분포 하에서 개발된 기존의 방법과 동일하게 된다.

Figure 1. Concept of the distribution-decomposition method

Choonineh and Ballard(1987)에 의해 처음 제안된 분포분할법은 Bai and Choi(1995)에 의해 WV(Weighted

Variance) 방법으로 개선되었으며, 이후 Wu et al.(1999)의 NWV(New WV) 방법, Castagliola(2000)의 SWV(Scaled WV) 방법, Chang and Bai(2001)의 WSD(Weighted Standard Deviation) 방법 등이 제안되었다. 이러한 분포분할 방법은 단변량 $\bar{X}$, CUSUM 및 EWMA 관리도와 다변량 T^2 및 MCUSUM, MEWMA 관리도, 단변량 및 다변량 합성 관리도(synthetic control chart), 공정능력지수 등에 적용되어 비교적 간단한 방법으로 관리도 및 공정능력지수의 운영이 가능할 뿐 아니라 전통적인 통계적관리방법에 비해 성능이 우수함이 입증되었다(Bai and Choi 1995, Castagliola 2000, Chang and Bai 2001, Khoo et al. 2009). 이 절에서는 WV, WSD 방법을 적용한 공정능력지수를 소개하고, NWV를 적용한 공정능력지수를 개선하여 제안하며, SWV 방법을 적용한 공정능력지수를 새롭게 제안한다.

2.1 WV 방법

WV 방법은 산포를 분리하는 데 있어서 분산(variance)에 평균보다 작은 품질특성치의 비율과 평균보다 큰 품질 특성치의 비율을 가중평균하는 방법으로, $\Theta = \Pr\{X \leq \mu\}$ 라 할 때 $\sigma_U^2 = \Theta\sigma^2$, $\sigma_L^2 = (1-\Theta)\sigma^2$ 을 사용하는 것이다. n 개의 관측치 중 평균보다 작거나 같은 관측치의 개수를 n_L , 평균보다 큰 관측치의 개수를 n_U 라 하고 $\theta = n_L/n$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$, $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)$ 라 하면 공정능력지수 C_p^{WV} 와 C_{pk}^{WV} 는 다음의 식 (3) 및 (4)와 같이 얻어진다.

$$C_p^{WV} = \min \left\{ \frac{USL - LSL}{6\sqrt{2\theta}s}, \frac{USL - LSL}{6\sqrt{2(1-\theta)}s} \right\}, \quad (3)$$

$$C_{pk}^{WV} = \min \{ C_{pku}^{WV}, C_{pkl}^{WV} \}, \quad (4)$$

$$C_{pku}^{WV} = \frac{USL - \bar{x}}{3\sqrt{2\theta}s}, \quad C_{pkl}^{WV} = \frac{\bar{x} - LSL}{3\sqrt{2(1-\theta)}s}$$

WV 방법 및 이를 활용한 공정능력지수에 관한 상세한 설명은 Pearn and Kotz(2006)에 정리되어 있다.

2.2 NWV 방법

NWV 방법은 평균 위쪽의 산포를 평균보다 큰 관측치들로만 추정하고 평균 아래쪽의 산포를 평균보다 작거나 같은 관측치들로만 추정하는 방법으로 σ_U^2 과 σ_L^2 의 추정치로 각각 $s_U^2 = \sum_{x_i \in X_U} (x_i - \bar{x})^2 / (2n_U - 1)$ 과 $s_L^2 = \sum_{x_i \in X_L} (x_i - \bar{x})^2 / (2n_L - 1)$ 을 사용하는 것이다. 여기서 X_U 와 X_L 은 각각 표본평균보다 큰 관측치의 집합과 표본평균보다 작거나 같은 관측치의 집합을 의미한다. Wu et al.(1999)은 SWV를 이용하여 공정능력지수 C_p 와 C_{pk} 를 다음의 식 (5) 및 (6)과 같이 계산할 것을 제안하였다.

$$C_p^{NWV}(Wu) = \frac{USL - LSL}{3\sqrt{2}(s_U + s_L)}, \quad (5)$$

$$C_{pk}^{NWV} = \min \{ C_{pku}^{NWV}, C_{pkl}^{NWV} \}, \quad (6)$$

$$C_{pku}^{NWV} = \frac{USL - \bar{x}}{3\sqrt{2}s_U}, \quad C_{pkl}^{NWV} = \frac{\bar{x} - LSL}{3\sqrt{2}s_L}$$

그러나 식 (5)와 (6)은 규격의 중심이 μ 와 일치하는 경우 C_p 와 C_{pk} 가 같게 된다는 전통적인 공정능력지수의 성질을 만족시키지 못한다. 즉, $\mu = (USL + LSL)/2$ 인 경우 식 (6)은

$$C_{pku}^{NWV} = \min \left\{ \frac{USL - LSL}{6\sqrt{2}s_U}, \frac{USL - LSL}{6\sqrt{2}s_L} \right\}$$

이 되어 식 (5)와 일치하지 않는다. 따라서 이러한 점을 고려할 수 있는 새로운 공정능력지수를 개발하여 사용하는 것이 필요하다. 이 연구에서는 식 (5)의 $C_p^{NWV}(\text{Wu})$ 대신 식 (7)의 C_p^{NWV} 를 새로운 공정능력지수로 사용할 것을 제안한다.

$$C_p^{NWV} = \min \left\{ \frac{USL - LSL}{6\sqrt{2}s_U}, \frac{USL - LSL}{6\sqrt{2}s_L} \right\} \quad (7)$$

2.3 SWV 방법

Castagliola(2000)는 Figure 1에서 μ 를 평균으로 하고 $2\sigma_U = 2\theta\sigma^2$, $2\sigma_L^2 = 2(1-\theta)\sigma^2$ 를 각각 분산으로 하는 두 개의 정규분포의 위쪽과 아래쪽을 활용하여 $f(x)$ 를 근사화하는 WV 방법의 분포 근사화 정도를 개선한 SWV 방법을 제안하였다. SWV 방법에 의하면 부분군의 크기가 N 이고 거짓경보비율(false alarm rate)이 α 인 $\bar{X}$ 관리도의 위쪽 및 아래쪽 관리한계선은 각각

$$UCL = \mu + \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{4(1-\theta)} \right) \sigma,$$

$$LCL = \mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{4\theta} \right) \sigma$$

가 된다. 여기서 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 는 표준정규분포(standard normal distribution)의 분포함수(distribution function)의 역함수를 의미한다. SWV 방법은 $\bar{X}$ 관리도에만 적용되었으며 공정능력지수에 활용된 연구는 찾아볼 수 없다. 공정능력지수 C_{pku} 와 C_{pkl} 의 분모는 $\mu=0$ 으로 가정하는 경우 $N=1$ 이고 $\alpha=0.0027$ 인 3σ $\bar{X}$ 관리도의 관리한계선과 일치하므로, 분포 위쪽과 아래쪽의 변동을 각각 $\Phi^{-1}(1-0.0027/4(1-\theta)) \sqrt{\theta/(1-\theta)}$ 와 $\Phi^{-1}(1-0.0027/4\theta) \sqrt{(1-\theta)/\theta}$ 를 사용하여 추정하는 SWV 공정능력지수 C_{pk}^{SWV} 를 설계할 수 있다. 식 (1)의 C_p 는 규격의 폭과 품질특성치의 변동폭과의 비율로 정의되며 이때 사용되는 변동폭은 6σ 가 된다. 분포분할법을 이용하는 경우에는 공정평균이 규격의 중심과 일치하는 경우 C_p 와 C_{pk} 가 일치해야 하는 성질을 만족시키기 위해 6σ 대신 $6 \cdot 2\sigma_U$ 와 $6 \cdot 2\sigma_L$ 의 최소값을 사용하는 것이 바람직하다. 따라서 SWV 방법을 활용한 공정능력지수 C_p^{SWV} 와 C_{pk}^{SWV} 를 각각 다음의 식 (8) 및 (9)와 같이 정의하여 사용할 것을 제안한다.

$$C_p^{SWV} = \min \left\{ \frac{USL - LSL}{2\Phi^{-1} \left(1 - \frac{0.0027}{4(1-\theta)} \right) \sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}} s}, \frac{USL - LSL}{2\Phi^{-1} \left(1 - \frac{0.0027}{4\theta} \right) \sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}} s} \right\}, \quad (8)$$

$$C_{pk}^{SWV} = \min \{ C_{pku}^{SWV}, C_{pkl}^{SWV} \}, \quad (9)$$

$$C_{pku}^{SWV} = \frac{USL - \bar{x}}{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.0027}{4(1-\theta)}\right) \sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}} s}, \quad C_{pkl}^{SWV} = \frac{\bar{x} - LSL}{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.0027}{4\theta}\right) \sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}} s}$$

2.4 WSD 방법

Chang and Bai(2001)는 Figure 1에서 평균을 중심으로 반으로 나누어진 각각의 분포를 평균에 대칭시켜 새로운 확률분포를 만든 후, 이를 근사화하는 정규분포를 구하게 되면 $\sigma_U = \theta\sigma$, $\sigma_L = (1-\theta)\sigma$ 가 된다는 것을 보였다. Chang et al.(2002)은 이를 활용하여 공정능력지수 C_p 와 C_{pk} 를 각각 다음의 식 (10) 및 (11)과 같이 추정할 것을 제안하였다.

$$C_p = \min\left\{\frac{USL - LSL}{6 \cdot 2\theta s}, \frac{USL - LSL}{6 \cdot 2(1-\theta)s}\right\}, \quad (10)$$

$$C_{pk}^{WV} = \min\{C_{pku}^{WSD}, C_{pkl}^{WSD}\}, \quad (11)$$

$$C_{pku}^{WV} = \frac{USL - \bar{x}}{3 \cdot 2\theta s}, \quad C_{pkl}^{WV} = \frac{\bar{x} - LSL}{3 \cdot 2(1-\theta)s}$$

품질특성치가 정규분포 등의 대칭분포를 따르는 경우 WV 및 WSD를 이용한 공정능력지수와 이 연구에서 제안된 NWV 및 SWV를 이용한 공정능력지수는 이론적으로 전통적인 C_p 및 C_{pk} 와 동일하게 된다. 또한, 품질특성치 규격의 중심과 평균이 일치하는 경우 C_{pk} 형태의 공정능력지수 C_{pk}^{WV} , C_{pk}^{NWV} , C_{pk}^{SWV} , C_{pk}^{WSD} 는 C_p 형태의 공정능력지수 C_p^{WV} , C_p^{NWV} , C_p^{SWV} , C_p^{WSD} 와 그 값이 동일하게 된다.

Figure 2. Histogram of data for the example

Figure 2는 3개의 모수를 갖는 대수정규분포 $LN(\mu, \sigma, \theta) = LN(2.67, 0.55, 18.23)$ 로부터 생성된 50개의 확률표본의 값을 히스토그램(histogram)으로 나타낸 것이다. 생성된 확률표본을 규격의 상한과 하한이 각각 $USL = 70$, $LSL = 10$ 인 공정으로부터 얻어진 품질특성치라고 하자. 이 품질특성치를 이용하여 분포분할법을 이용한 공정능력

지수를 구하기 위해 필요한 모수들을 추정하면, $\bar{x}=36.20$, $s=9.57$ 이 되고 $\bar{x}$ 보다 작거나 같은 품질특성치의 개수는 32개가 되어 $n_L=32$, $n_U=18$, $\theta=0.64$ 가 된다. 또한, 평균보다 큰 품질특성치로만 추정된 산포는 $s_U=\sqrt{2878.47/(2 \cdot 18-1)}=9.07$ 이 되고, 평균보다 작거나 같은 품질특성치로만 산포를 추정하면 $s_L=\sqrt{1613.52/(2 \cdot 32-1)}=5.06$ 이 된다. 추정된 모수를 이용하여 다음과 같이 공정능력지수의 값을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
- C_p &= (USL - LSL)/6s = (70 - 10)/(6 \cdot 9.57) = 1.04 \\
C_{pk} &= \min \left\{ \frac{USL - \bar{x}}{3s}, \frac{\bar{x} - LSL}{3s} \right\} = \min \left\{ \frac{70 - 36.20}{3 \cdot 9.57}, \frac{36.20 - 10}{3 \cdot 9.57} \right\} \\
&= \min \{1.18, 0.91\} = 0.91 \\
- C_p^{WV} &= \min \left\{ \frac{USL - LSL}{6\sqrt{2\theta}s}, \frac{USL - LSL}{6\sqrt{2(1-\theta)}s} \right\} \\
&= \min \left\{ \frac{70 - 10}{6\sqrt{2 \cdot 0.64} \cdot 9.57}, \frac{70 - 10}{6\sqrt{2 \cdot 0.36} \cdot 9.57} \right\} = \min \{0.92, 1.23\} = 0.92 \\
C_{pk}^{WV} &= \min \left\{ \frac{USL - \bar{x}}{3\sqrt{2\theta}s}, \frac{\bar{x} - LSL}{3\sqrt{2(1-\theta)}s} \right\} = \min \left\{ \frac{70 - 36.20}{3\sqrt{2 \cdot 0.64} \cdot 9.57}, \frac{36.20 - 10}{3\sqrt{2 \cdot 0.36} \cdot 9.57} \right\} \\
&= \min \{1.04, 1.08\} = 1.04 \\
- C_p^{NWV} &= \min \left\{ \frac{USL - LSL}{6\sqrt{2}s_U}, \frac{USL - LSL}{6\sqrt{2}s_L} \right\} = \min \left\{ \frac{70 - 10}{6\sqrt{2} \cdot 9.07}, \frac{70 - 10}{6\sqrt{2} \cdot 5.06} \right\} \\
&= \min \{0.78, 1.40\} = 0.78 \\
C_{pk}^{NWV} &= \min \left\{ \frac{USL - \bar{x}}{3\sqrt{2}s_U}, \frac{\bar{x} - LSL}{3\sqrt{2}s_L} \right\} = \min \left\{ \frac{70 - 36.20}{3\sqrt{2} \cdot 9.07}, \frac{36.20 - 10}{3\sqrt{2} \cdot 5.06} \right\} \\
&= \min \{0.88, 1.22\} = 0.88 \\
- C_p^{SWV} &= \min \left\{ \frac{USL - LSL}{2\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.0027}{4(1-\theta)}\right)\sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}}s}, \frac{USL - LSL}{2\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.0027}{4\theta}\right)\sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}}s} \right\} \\
&= \min \left\{ \frac{70 - 10}{2\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.0027}{4 \cdot 0.36}\right)\sqrt{\frac{0.64}{0.36}} \cdot 9.57}, \frac{70 - 10}{2\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.0027}{4 \cdot 0.64}\right)\sqrt{\frac{0.36}{0.64}} \cdot 9.57} \right\} \\
&= \min \{0.81, 1.36\} = 0.81 \\
C_{pk}^{SWV} &= \min \left\{ \frac{USL - \bar{x}}{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.0027}{4(1-\theta)}\right)\sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}}s}, \frac{\bar{x} - LSL}{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.0027}{4\theta}\right)\sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}}s} \right\} \\
&= \min \left\{ \frac{70 - 36.20}{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.0027}{4 \cdot 0.36}\right)\sqrt{\frac{0.64}{0.36}} \cdot 9.57}, \frac{36.20 - 10}{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.0027}{4 \cdot 0.64}\right)\sqrt{\frac{0.36}{0.64}} \cdot 9.57} \right\} \\
&= \min \{0.91, 1.19\} = 0.91 \\
- C_p^{WSD} &= \min \left\{ \frac{USL - LSL}{6 \cdot 2\theta s}, \frac{USL - LSL}{6 \cdot 2(1-\theta)s} \right\} \\
&= \min \left\{ \frac{70 - 10}{6 \cdot 2 \cdot 0.64 \cdot 9.57}, \frac{70 - 10}{6 \cdot 2 \cdot 0.36 \cdot 9.57} \right\} = \min \{0.82, 1.45\} = 0.82 \\
C_{pk}^{WSD} &= \min \left\{ \frac{USL - \bar{x}}{3\sqrt{2\theta}s}, \frac{\bar{x} - LSL}{3\sqrt{2(1-\theta)}s} \right\} \\
&= \min \left\{ \frac{70 - 36.20}{3 \cdot 2 \cdot 0.64 \cdot 9.57}, \frac{36.20 - 10}{3 \cdot 2 \cdot 0.36 \cdot 9.57} \right\} = \min \{0.92, 1.27\} = 0.92
\end{aligned}$$

3. 분포분할법을 이용한 공정능력지수의 성능 비교

이 절에서는 품질특성치가 정규분포를 포함하여 대표적인 비대칭 분포인 와이블분포, 대수정규분포, 감마분포를 따르는 경우 제 2절의 공정능력지수들과 정규분포 기반 하에서 개발된 전통적인 공정능력지수의 성능을 모의실험을 통해 비교·분석한다. 분석에 사용된 확률분포의 경우 척도모수(scale parameter)는 왜도에 영향을 미치지 않으므로 분석의 편의를 위해 와이블분포와 감마분포의 척도모수는 모두 1로 하였으며, 대수정규분포의 척도모수는 0으로 설정하였다. 공정능력지수의 값은 100,000회의 모의실험을 통해 계산하였으며 확률변수들은 IMSL Library(1990)를 이용하여 생성하였다.

Table 1과 Table 2는 각각의 분포에서 왜도(skewness)가 증가함에 따라 추정된 C_p 값의 변화를 나타낸 것으로 모든 경우에 $\mu=0$ 이고 $\sigma=1$ 이 되도록 생성된 확률변수를 표준화하였다. Table 1은 $USL=3$, $LSL=-3$ 인 경우, Table 2는 $USL=5$, $LSL=-5$ 인 경우를 가정하였으며 모두 표본크기는 50으로 하였다. 비교의 용이성을 위해 각각의 경우에 발생하는 불량률(100만 단위, ppm)인 %NC와 정규분포 하에서 %NC에 대응되는 C_p 값(matched C_p ; MC_p)을 계산하여 제시하였다. 정규분포 하에서 $2\Phi(-3C_p) = \%NC \times 10^{-6}$ 이 되므로 $MC_p = -\Phi^{-1}(\%NC \times 10^{-6}/2)/3$ 으로 계산할 수 있다. 공정능력지수가 MC_p 와 가까운 값이 될수록 불량률 관점에서 공정의 능력을 정확히 묘사하는 것으로 판단할 수 있으므로, 이러한 공정능력지수를 이용하여 공정에 대한 보다 정확한 판단을 내릴 수 있게 된다. 공정능력지수가 MC_p 보다 작은 경우에는 공정의 불량률이 실제 불량률보다 높다고 판단하게 되어 공정의 능력을 과소평가하는 문제가 발생하며, 반대로 공정능력지수가 MC_p 보다 큰 경우에는 공정의 불량률이 실제 불량률보다 낮다고 판단하게 되어 공정의 능력을 과대평가하는 문제가 발생한다. Table 3과 Table 4는 $\mu=1$ 이고 $\sigma=1$ 이 되도록 분포의 평균을 조정한 후 각각 Table 1 및 Table 2와 동일한 상황에서 추정된 C_{pk} 값의 변화를 나타낸 것이다. 비교의 편의를 위해 Table 1 및 Table 2와 동일하게 %NC와 이에 대응하는 C_{pk} 값인 MC_{pk} 을 제시하였다. 규격의 중심 $(USL+LSL)/2$ 를 d 라고 할 때, 정규분포 하에서 $C_{pk} = (1-2|\mu-d|/(USL-LSL))C_p$ 이므로 $MC_{pk} = (1-2|\mu-d|/(USL-LSL))MC_p$ 가 된다. MC_{pk} 도 MC_p 와 동일한 이유로 C_{pk} 값이 공정의 성능을 얼마나 잘 묘사하는가를 평가하는 지표로 사용될 수 있다.

Table 1 - Table 4로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

- i) Table 1과 Table 2에서 왜도가 증가함에 따라 %NC가 증가하여 MC_p 가 감소하나 전통적인 공정능력지수 C_p 는 이를 반영하지 못하고 오히려 그 값이 증가하여 공정의 능력을 과대평가하는 경향이 있다. 공정평균과 규격의 중심이 일치하지 않는 경우 규격의 폭이 상대적으로 작은 경우에는 Table 3에서와 같이 왜도가 증가하더라도 %NC가 항상 증가하는 것은 아니다. 그러나 이러한 경우를 포함하여 Table 3과 Table 4에서 비교기준이 되는 MC_{pk} 는 지속적으로 감소하는 현상이 발생하지만 전통적인 공정능력지수는 이를 정확히 반영하지 못한다.
- ii) 분포분할법을 이용한 공정능력지수는 왜도가 증가함에 따라 그 값이 감소하여 왜도의 증가에 따른 공정능력의 감소를 반영하게 된다. 단, WV 공정능력지수 C_p^{WV} 와 C_{pk}^{WV} 는 왜도에 따른 MC_{pk} 값이 지속적으로 감소하는 경우에도 그 값이 감소하다가 다시 증가하는 현상이 나타난다.
- iii) 분포에 상관없이 왜도가 작은 경우에는 $WV>SWV>WSD>NWV$ 방법의 순서로 공정능력지수의 값이 크고 왜도가 큰 경우에는 $WV>WSD>SWV>NWV$ 방법의 순으로 공정능력지수의 값이 큰 경향이 있다. 단, SWV 방법과 WSD 방법 간의 차이는 다른 방법들과의 차이에 비해 상대적으로 작게 나타난다.
- iv) 정규분포를 포함하여 왜도가 작고 표준편차에 비해 규격의 폭이 작은 경우를 제외하면 NWV를 이용한 공정능력

지수의 값이 MC_p 및 MC_{pk} 와 가장 유사하게 나타나고 있어 왜도가 비교적 크고 낮은 불량률을 나타내는 공정에서는 NWV 방법이 다른 방법에 비해 성능이 우수한 것을 알 수 있다.

Table 1. C_p when $USL=3$ and $LSL=-3$ ($\mu=0$)

Distri- bution	Skew- ness	%NC	MC_p	C_p	Existing PCIs		Proposed PCIs	
					C_p^{WV}	C_p^{WSD}	C_p^{NWV}	C_p^{SWV}
Normal	0.0	2,700	1.000	1.016	0.984	0.954	0.952	0.958
Weibull	0.5	4,226	0.954	1.016	0.976	0.939	0.919	0.943
	1.0	9,870	0.860	1.023	0.961	0.903	0.853	0.908
	1.5	14,915	0.811	1.038	0.950	0.871	0.801	0.871
	2.0	18,316	0.786	1.057	0.947	0.850	0.766	0.846
	2.5	20,280	0.774	1.080	0.952	0.839	0.744	0.830
	3.0	21,256	0.768	1.105	0.960	0.835	0.729	0.821
Lognormal	0.5	5,639	0.923	1.019	0.980	0.943	0.924	0.947
	1.0	10,461	0.853	1.028	0.972	0.920	0.876	0.922
	1.5	14,087	0.818	1.042	0.967	0.899	0.838	0.900
	2.0	16,358	0.800	1.060	0.969	0.887	0.814	0.888
	2.5	17,653	0.791	1.081	0.976	0.882	0.799	0.879
	3.0	18,325	0.786	1.102	0.985	0.882	0.790	0.877
Gamma	0.5	5,431	0.927	1.018	0.979	0.942	0.923	0.945
	1.0	10,336	0.855	1.026	0.967	0.912	0.865	0.915
	1.5	14,788	0.813	1.038	0.954	0.878	0.810	0.880
	2.0	18,316	0.786	1.057	0.947	0.850	0.766	0.845
	2.5	20,856	0.770	1.079	0.945	0.828	0.730	0.817
	3.0	22,528	0.760	1.107	0.949	0.814	0.701	0.793

Table 2. C_p when $USL=5$ and $LSL=-5$ ($\mu=0$)

Distri- bution	Skew- ness	%NC	MC_p	C_p	Existing PCIs		Proposed PCIs	
					C_p^{WV}	C_p^{WSD}	C_p^{NWV}	C_p^{SWV}
Normal	0.0	1	1.667	1.693	1.641	1.591	1.587	1.596
Weibull	0.5	11	1.463	1.693	1.627	1.566	1.532	1.570
	1.0	280	1.211	1.706	1.601	1.505	1.421	1.512
	1.5	1,187	1.081	1.731	1.585	1.454	1.338	1.452
	2.0	2,479	1.009	1.762	1.579	1.417	1.278	1.409
	2.5	3,739	0.966	1.800	1.586	1.398	1.239	1.379
	3.0	4,767	0.941	1.844	1.602	1.394	1.216	1.371
Lognormal	0.5	88	1.307	1.698	1.633	1.572	1.541	1.577
	1.0	660	1.135	1.714	1.619	1.532	1.460	1.537
	1.5	1,663	1.048	1.738	1.614	1.500	1.398	1.500
	2.0	2,706	1.000	1.766	1.615	1.478	1.355	1.478
	2.5	3,583	0.971	1.800	1.625	1.469	1.330	1.466
	3.0	4,254	0.953	1.836	1.642	1.470	1.318	1.463
Gamma	0.5	65	1.331	1.697	1.632	1.570	1.538	1.576
	1.0	474	1.165	1.710	1.610	1.519	1.441	1.524
	1.5	1,331	1.070	1.732	1.591	1.464	1.351	1.466
	2.0	2,479	1.009	1.762	1.579	1.417	1.278	1.409
	2.5	3,713	0.967	1.801	1.577	1.382	1.218	1.362
	3.0	4,891	0.938	1.848	1.584	1.359	1.171	1.324

Table 3. C_{pk} when $USL = 3$ and $LSL = -3$ ($\mu = 1$)

Distri- bution	Skew- ness	%NC	MC_{pk}	C_{pk}	Existing PCIs			Proposed PCIs
					C_{pk}^{WV}	C_{pk}^{WSD}	C_{pk}^{NWV}	C_{pk}^{SWV}
Normal	0.0	22,782	0.667	0.677	0.679	0.682	0.680	0.679
Weibull	0.5	34,412	0.636	0.679	0.659	0.641	0.620	0.642
	1.0	43,864	0.573	0.686	0.645	0.608	0.572	0.610
	1.5	48,464	0.541	0.697	0.638	0.585	0.538	0.585
	2.0	49,787	0.524	0.712	0.638	0.572	0.516	0.570
	2.5	49,324	0.516	0.730	0.643	0.567	0.502	0.560
	3.0	48,020	0.512	0.748	0.650	0.566	0.494	0.556
Lognormal	0.5	34,232	0.615	0.681	0.663	0.646	0.626	0.646
	1.0	40,943	0.569	0.689	0.653	0.621	0.588	0.622
	1.5	43,887	0.546	0.700	0.651	0.606	0.564	0.606
	2.0	44,644	0.534	0.713	0.653	0.598	0.548	0.598
	2.5	44,294	0.527	0.729	0.659	0.597	0.540	0.594
	3.0	43,439	0.524	0.745	0.667	0.597	0.536	0.594
Gamma	0.5	34,400	0.618	0.681	0.662	0.645	0.625	0.645
	1.0	42,380	0.570	0.688	0.650	0.615	0.581	0.616
	1.5	47,273	0.542	0.698	0.642	0.591	0.545	0.591
	2.0	49,787	0.524	0.712	0.638	0.572	0.516	0.570
	2.5	50,563	0.513	0.730	0.639	0.560	0.494	0.552
	3.0	50,135	0.507	0.749	0.642	0.551	0.474	0.537

Table 4. C_{pk} when $USL = 5$ and $LSL = -5$ ($\mu = 1$)

Distri- bution	Skew- ness	%NC	MC_{pk}	C_{pk}	Existing PCIs			Proposed PCIs
					C_{pk}^{WV}	C_{pk}^{WSD}	C_{pk}^{NWV}	C_{pk}^{SWV}
Normal	0.0	32	1.333	1.354	1.358	1.363	1.358	1.359
Weibull	0.5	295	1.170	1.356	1.317	1.281	1.238	1.283
	1.0	1,820	0.969	1.369	1.288	1.214	1.142	1.216
	1.5	4,318	0.865	1.390	1.273	1.167	1.073	1.168
	2.0	6,738	0.807	1.417	1.270	1.139	1.027	1.134
	2.5	8,604	0.773	1.448	1.276	1.125	0.997	1.112
	3.0	9,884	0.753	1.486	1.291	1.123	0.908	1.103
Lognormal	0.5	752	1.046	1.361	1.324	1.291	1.252	1.292
	1.0	2,616	0.908	1.375	1.305	1.240	1.175	1.241
	1.5	4,721	0.839	1.394	1.296	1.206	1.122	1.208
	2.0	6,440	0.800	1.420	1.299	1.190	1.090	1.187
	2.5	7,672	0.777	1.450	1.310	1.186	1.073	1.182
	3.0	8,504	0.762	1.477	1.321	1.183	1.060	1.177
Gamma	0.5	660	1.065	1.360	1.322	1.288	1.249	1.289
	1.0	2,292	0.932	1.370	1.295	1.225	1.157	1.230
	1.5	4,485	0.856	1.391	1.278	1.177	1.085	1.177
	2.0	6,738	0.807	1.415	1.268	1.137	1.025	1.133
	2.5	8,751	0.774	1.447	1.266	1.110	0.978	1.095
	3.0	10,404	0.750	1.488	1.275	1.094	0.942	1.065

(a) $(C_p - MC_p) / MC_p$

(b) $(C_p - MC_p)^2 / MC_p$

Figure 3. Relative errors of PCIs under various $USL - LSL$

Figure 3은 규격의 폭($USL - LSL$)의 변화에 따라 공정능력지수가 MC_p 와 어떠한 차이가 발생하는가를 분석한 것이다. 이 때, 모집단은 왜도가 1.0인 와이블분포를 따른다고 가정하였으며 표본크기는 50으로 하였다. Figure 3(a)는 추정된 C_p 와 MC_p 간의 상대적인 차이를 나타낸 것으로 규격폭의 증가에 따라 비감소하는 형태를 보이고 있어 규격폭이 상대적으로 작은 경우에는 공정능력을 과소평가하게 되고 규격폭이 상대적으로 큰 경우에는 공정능력을 과대평가하는 경향이 있음을 보여준다. 규격폭이 4-6 사이($4\sigma < USL - LSL < 6\sigma$)인 경우 MC_p 에 대한 분포분할 방법들의 상대적인 오차가 15% 이내가 되며, 규격폭이 12인 경우에는 WV 방법의 오차가 약 40%, SWV 및 WSD 방법의 오차가 30%, NWV 방법의 오차가 약 24%이며 전통적인 방법의 오차는 50%에 이른다. Figure 3(b)는 MC_p 에 대한 추정된 공정능력지수의 상대적인 제곱오차를 나타낸 것이다. 규격의 폭이 4 정도에서는 WV 방법이, 5 정도

에서는 SWV 및 WSD 방법이, 6 정도에서는 NWV 방법이 오차가 0에 가깝게 되나 각 방법 간에는 큰 차이가 나타나지 않는 것을 알 수 있으며, 규격의 폭이 커질수록 WV 방법의 성능이 가장 빠르게 나빠지고 다음으로 SWV와 WSD 방법의 성능이 나빠지는 것을 알 수 있다. NWV 방법은 규격의 폭이 6 이상인 경우 MC_p 와 상대적으로 가장 적은 차이를 보이고 있어 현실적인 상황에서의 성능이 가장 우수한 것으로 판단된다.

Figure 4. Relative errors of PCIs under various sample sizes

Figure 4는 표본크기(n)의 변화에 따라 공정능력지수 C_p 의 추정치가 MC_p 와 어떠한 차이가 발생하는가를 분석한 것으로, 모집단은 왜도가 1.0인 와이블분포를 따른다고 가정하였으며 $USL = 4.0$, $LSL = -4.0$ 을 사용하였다. 대부분의 공정능력지수에서 표본크기가 100 이내인 경우에 상대적인 MSE가 급격히 감소하는 것을 알 수 있으며 이후 완만한 감소를 나타내는 것을 알 수 있다.

Figure 5. Relative errors of PCIs under various differences of process mean and midpoint of specifications

Figure 5는 규격의 중심과 공정평균의 차이에 따라 공정능력지수 C_{pk} 의 추정치가 MC_{pk} 와 어떠한 차이가 발생하는가를 분석한 것으로, 모집단은 왜도가 1.0인 와이블분포를 따른다고 가정하였으며 표본크기는 50으로 하였다. 전통적인 공정능력지수를 제외하고는 규격의 중심과 공정평균의 차이가 커질수록 공정능력지수의 오차가 감소하는 것을 알 수 있다. 오차의 감소 속도는 전통적인 방법, WV 방법, SWV 방법, WSD 방법, NWV 방법 순으로 빠르게 나타났다.

Figure 6. Relative errors of PCIs when the underlying distribution is normal

Figure 6은 정규모집단에서 표본크기의 변화에 따른 공정능력지수와 MC_p 의 상대적인 차이를 나타낸 것으로, $USL=3$, $LSL=-3$ 을 가정하였다. 표본크기가 증가함에 따라 오차가 급격히 감소하다가 점차 감소 속도가 완만해지는 것을 알 수 있다. 정규모집단에서 전통적인 방법은 공정능력을 과대평가하는 경향이 있으나 분포분할 방법을 이용하면 공정능력을 과소평가하는 경향이 있다. 정규모집단 하에서는 분포분할 방법 중 WV 방법의 성능이 가장 우수하며 다른 방법들의 성능은 유사한 수준으로 나타난다.

4. 결 론

이 논문에서는 평균을 중심으로 분포를 분할하여 위쪽과 아래쪽 산포를 각각 추정한 후 추정된 산포를 기반으로 공정의 능력을 평가하는 분포분할 휴리스틱 공정능력지수들에 관해 분석하였다. 분포를 분할하여 산포를 추정하는 방법으로 WV(Weighted Variance) 방법, NWV(New WV) 방법, SWV(Scaled WV) 방법, WSD(Weighted Standard Deviation) 방법에 대해 살펴보고 각각의 방법으로 개발된 공정능력지수들과 새롭게 제안한 공정능력지수들을 다양한 상황에서 비교·분석하였다.

공정능력지수들의 성능을 분석한 결과 WV 방법은 정규분포를 제외하고는 성능이 가장 낮게 나타났으며, WSD 방법은 규격의 폭과 왜도가 작은 경우에 성능이 가장 우수하였다. 제안된 SWV 방법은 WSD 방법과 그 성능이 유사하였으나 공정의 왜도가 큰 경우에는 WSD 방법보다 다소 우수한 성능을 나타냈다. 제안된 NWV 방법은 왜도가 작은 경우에는 타 공정능력지수에 비해 그 성능이 크게 떨어지지 않고 왜도가 증가하는 경우 성능이 가장 우수하였으

며, 규격의 폭이 6σ 이상인 공정에서 성능이 가장 높은 것으로 나타났다. 이러한 점들을 고려할 때, 공정초기 등 품질특성치의 분포가 정규분포인지 혹은 비대칭 분포인지를 정확히 파악하지 못하는 경우 정규분포에서도 그 성능이 크게 떨어지지 않고 비대칭분포에서는 그 성능이 가장 우수하며 비교적 간단한 계산으로 얻을 수 있는 NWV 공정능력지수를 사용하는 것이 현실적으로 가장 바람직 한 것으로 판단된다.

분포분할법을 이용한 휴리스틱 방법은 이 논문에서 대상으로 삼은 C_p 와 C_{pk} 이외에 손실함수를 고려한 C_{pm} , C_{pmk} , C_{pm}^* 뿐만 아니라 다변량 공정능력지수에도 적용 가능하므로 향후에는 이러한 분야에 관한 연구가 추가적으로 필요하다. 분포의 중위수(median)와 사분위범위(inter-quartile range) 혹은 범위(range) 등을 기반으로 한 분포분할 방법을 개발하여 비정규 모집단에 적용 가능한 공정능력지수의 개발에 관한 연구도 추가로 진행되어야 할 것이다.

REFERENCES

- Abbasi, B., and Niaki, S. T. A. 2010. "Estimating Process Capability Indices of Multivariate Nonnormal Processes." *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 50(5):823-830.
- Bai, D. S., and Choi, I. S. 1995. " $\bar{X}$ and R Charts for Skewed Populations." *Journal of Quality Technology* 25(2):120-131.
- Baik, J., and Jo, J. 1999. "Criticism and Guideline for the Use of Process Capability Index." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 27(2):81-100.
- Bittanti S., Lovera, M., and Moiraghi, L. 1998. "Application of Non-normal Process Capability Indices to Semiconductor Quality Control." *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing* 11(2):296-303.
- Castagliola, P. 2000. " $\bar{X}$ Control Chart for Skewed Populations Using a Scaled Weighted Variance Method." *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 7(3):237-252.
- Chang, Y. S., and Bai, D. S. 2001. "Control Charts for Positively-skewed Populations with Weighted Standard Deviations." *Quality and Reliability Engineering International* 17(5):397-406.
- Chang, Y. S., and Bai, D. S. 2007. *Process Capability Indices, Skewed* in *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*. Ruggeri, F., Kenett, R. S., and Faltin, F. W. Ed. England: John Wiley & Sons Ltd.
- Chang, Y. S., Choi, I. S., and Bai, D. S. 2002. "Process Capability Indices for Skewed Populations." *Quality and Reliability Engineering International* 18(5):383-393.
- Chen, J-P. 2000. "Re-evaluating the Process Capability Indices for Non-normal Distribution." *International Journal of Production Research* 38(6):1311-1324.
- Cho, J-J, Park, B-S, and Park, H-i. 2004. "Better Confidence Limits for Process Capability Index C_{pmk} under the assumption of Normal Process." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 32(4):229-241.
- Chooibneh, F., and Ballard, J. L. 1987. "Control-limits of QC Charts for Skewed Distributions Using Weighted-variance." *IEEE Transactions on Reliability* 36(4):473-477.
- English, J. R., and Taylor, G. D. 1993. "Process Capability Analysis - A Robustness Study." *International Journal of Production Research* 31(7):1621-1635.
- Gunter, W. H. 1989. "The Use and Abuse of C_{pk} , Part 2." *Quality Progress* 22(3):769-777.
- Im, T. J., and Pyun, S. S. "A Process Capability Index C_{pd} Consistent with the Proportion of Nonconforming Items." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 28(2):103-122.
- IMSL Library. 1990. *Reference Manual*. USA: Visual Numerics.
- Khoo, M. B. C., Abdu, M. A., Atta, M. A., and Wu, Z. 2009. "A Multivariate Synthetic Control Chart for Monitoring the Process Mean Vector of Skewed Populations Using Weighted Standard Deviations." *Communications in*

- Statistics - Simulation and Computation 38(7):1493-1518.
- Kotz, S., and Johnson, N. L. 2002. "Process Capability Indices - A Review, 1992-2000." *Journal of Quality Technology* 34(1):2-19.
- Pearn, W. L., and Kotz, S. 2006. *Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Pyzdek, T. 1995. "Why Normal Distributors Aren't - All That Normal." *Quality Engineering* 7(4):769-777.
- Somerville, S. E., and Montgomery, D. C. 1996-97. "Process Capability Indices and Non-normal Distributions." *Quality Engineering* 9(2):305-316.
- Wu, C-W, Pearn, W. L., and Kotz, S. 2009. "An Overview of Theory and Practice on Process Capability Indices for Quality Assurance." *International Journal of Production Economics* 117: 338-359.
- Wu, H-H, Swain, J. J., Farrington, P. A., and Messimer, S. L. 1999. "A Weighted Variance Capability Index for General Non-normal Processes." *Quality and Reliability Engineering International* 15(5):397-402.