변환된 GARCH 모형을 활용한 VaR 추정

박주연^a, 여인권^{1,a}

^a숙명여자대학교 통계학과

요약

이 논문에서는 GARCH 모형에서 가정한 오차항의 분포에 근접하도록 자료를 변환하고 변환된 자료를 이용하여 모수와 예측구간을 구한 후 다시 역변환을 통해 원래의 척도에서의 VaR을 계산하는 방법에 대해 알아본다. KOSPI와 KOSDAQ 수익률을 이동시키며 VaR을 계산하고 이들 VaR의 포함확률을 계산하여 명목수준에 얼마나 근접하는지를 알아봄으로써 변환-역변환 방법과 변환을 적용하지 않는 방법의 결과를 비교해 본다.

주요용어: Modulus변환, Yeo-Johnson 변환, 왜도, 첨도, 포함확률.

1. 서론

투자수익은 투자로부터 얻어지는 부의 증가를 의미하며, 주식 투자의 경우 배당소득과 시세차익의 합으로 표시되고 이 합은 투자성과의 측도가 된다. 일반적인 투자수익 분석에서는 상대적 투자성과를 비교할 수 있고 통계분석이 용이한 투자수익률로 분석이 이루어진다. 이 논문에서는 편의상 배당소득을 0으로 놓고 투자수익은 시세차익에 의해서만 발생하는 것을 가정한다. P_t 를 t 시점에서의 상품의 가격이라고 하면 t 시점에서의 통상적인 수익률은 단순수익률 $100(P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$ 로 표시되지만 통계적 분석은 로그수익률 $R_t = 100 \log(P_t/P_{t-1})$ 이 많이 사용된다.

금융시장의 개방과 제약이 줄어들면서 금융자산에 대한 투자가 확대되는 것과 동시에 예상치 못했던 여러 외부 상황이 주가에 영향을 주어 가격 변동이 심하게 일어나는 경우가 발생하고 있다. 이에 따라 투자자들은 주식, 채권 뿐만 아니라 각종 파생상품에 투자하여 높은 수익을 얻을 수 있는 가능성이 높아졌지만 큰 손실이 발생할 가능성도 동시에 높아졌다. 이러한 상황에서 안정적인 투자여부는 그 금융상품에 대한 위험을 얼마나 정확하게 측정하느냐에 달려있다. 위험의 정도를 측정하는 여러가지 기준이 있는데 국내에서는 1997년 IMF 금융위기 이후에 많은 금융기관들이 VaR(Value at Risk)을 위험 측정의 방법으로 사용하고 있다. VaR은 정상적인 시장여건 하에서 주어진 신뢰수준에서 일정기간 동안 발생할 수 있는 최대손실금액(또는 수익률)을 의미하며 이 값이 크면 클수록 위험률이 높다는 것을 의미한다.

VaR을 계산하는 방법은 금융자산의 가격변동의 분포에 대해 가정을 하지 않는 비모수적 방법과 특정분포를 가정하고 해당분포의 모수를 추정하는 모수적 방법으로 분류할 수 있다. 이전 자료에 평균과 분산이 영향을 많이 받는 금융시계열의 경우 비모수적 방법으로 VaR을 계산하는 것은 매우 어렵기 때문에 최근 분석에서는 대부분 모형을 근거로 한 모수적 방법을 사용하고 있다. 고전적인 모수적 방법에서는 수익률이 독립적이고 동일한 정규분포를 따른다고 가정하였으나 많은 실증분석을 통해 금융자산의 수익률은 이러한 가정을 따르지 않는다고 알려졌다. Mandelbrot (1963)은 시장이 상승하든 하락

연구는 숙명여자대학교 2008년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

¹ 교신저자: (140-742) 서울시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 부교수. E-mail: inkwon@sm.ac.kr

하든, 큰 변동 뒤에는 큰 변동이 따르는 경향이 있고 작은 변동 뒤에는 작은 변동이 따르는 경향이 있다고 언급하여 가격분포의 분산에는 계열상관이 있어 금융자산의 수익률이 정규분포를 따르지 않는다는 것을 보였다. Fama (1965)의 연구도 수익률이 정규분포를 따르지 않고 확률분포의 꼬리부분이 두터운 형태를 하고 있음을 보였다. McCulloch (1996)과 McDonald (1996)는 수익률 분포의 비정규성에 대하여 실증분석으로 뒷받침 하고 있다. Zangari (1996)는 미국 주식의 포트폴리오의 수익률 분포가 꼬리부분이 더 두텁다고 보고하고 있으며, Li (1999)는 외환시장에서 이루어지는 환거래가 정규분포를 따르지 않는다는 사실을 보고하였다. 이들 연구를 종합하면 수익률은 독립이지 않을 수 있으며, 앞 시점의 변동(volatility)에 따라 분산이 영향을 받을 수 있으며, 정규분포보다 꼬리부분이 두터우며 때로는 변동의 부호에 따라 비대칭적으로 반응하는 레버리지 효과(leverage effect)를 가진다고 할 수 있다.

이러한 문제는 ARMA모형과 같이 시계열에 대한 조건부 1차 적률의 시간종속성을 모형화하거나 Engle (1982)의 ARCH모형이나 Bollerslev (1986)의 GARCH모형과 같이 조건부 이분산성을 적용하여 부분적으로 해결할 수 있으나 금융시계열은 이러한 표준 모형으로는 잘 설명하기 어려운 특징을 가지고 있어 좋지 않은 분석결과를 낳기도 한다. 금융시계열이 가지고 있는 특징을 반영하기 위한 많은 연구가 이루어졌는데, 시계열에서의 오차항에 대한 분포로 t -분포나 분산이 다른 정규분포들의 혼합분포 등을 가정하여 침도가 큰 시계열을 모형화하는 연구들이 있었으며 혼합레버리지 효과에 대한 설명을 위해 EGARCH나 TGARCH와 같은 비대칭 변동성 모형에 대한 연구와 극단값 분포를 기초로 한 극단값 이론들이 Neftci (2000), Andre와 Beatriz (2003), Turan (2003), Gencay와 Selcuk (2004) 등에 의해 수행되었다. 이러한 모형들은 이론이 복잡할 뿐만 아니라 여전히 자료가 모형의 가정을 만족하지 않을 수 있기 때문에 모형의 타당성은 모형의 가정이 얼마나 자료의 특성과 일치하는지에 달려 있다. 이 논문에서는 보다 간단한 방법으로 VaR을 계산할 수 있는 방법을 소개한다. 기존 방법은 자료에 분석모형을 맞추어 모형을 추정하고 이를 근거로 VaR을 계산하지만 제안된 방법에서는 분석모형의 가정에 맞도록 자료를 변환하고 모형을 추정하여 VaR을 계산한다. 또한 KOSPI와 KOSDAQ 수익률을 이용하여 제안방법을 통해 계산된 VaR의 타당성을 확인하고자 한다.

2. VaR 계산

2.1. VaR

정상적인 시장조건 하에서, 정해진 보유기간과 신뢰수준에 따라 포트폴리오가 위험으로 인해서 발생할 수 있는 최대손실을 추정한 수치를 VaR이라고 한다. VaR은 다양한 자산으로 구성된 포트폴리오의 모든 위험을 각각이 아닌 단 하나의 숫자로 나타낼 수 있기 때문에 자산관리, 위험관리를 위해서 널리 쓰이고 있다. 보유기간은 보유하고 있는 포지션을 정상적으로 매도하거나 헷징하는데 소요되는 기간을 말하는데 일반적으로 1일, 10일, 3개월이나 1년이 사용된다. 신뢰수준은 VaR이 설정하고자 하는 최대손실을 넘지 않을 것이라는 확신의 정도로 일반적으로 95%, 99%가 쓰인다. 예를 들어, 99%의 신뢰수준에서의 VaR값은 그보다 더 큰 손실이 발생할 가능성이 1%정도 발생한다는 것을 뜻하고 통계적으로 이야기한다면 99%의 신뢰수준은 1-백분위수라고 표현될 수 있다. J.P Morgan의 RiskMetrics는 5-백분위수를 사용하는 반면 Mobil사의 1994년 연차 보고서에서는 0.3-백분위수를 적용하였다. 금융기관과 같이 적극적인 거래를 하는 곳은 비금융기관보다 보유기간을 단기적으로 정하는 경향이 있는데 1995년 4월 바젤위원회는 내부모형에서 99%의 신뢰수준과 10일(2주)의 보유기간으로 은행의 VaR을 계산하도록 제안하기도 했다.

시점 t 에서 l 시차 후의 위험을 알고 싶다고 할 때, $R_t(l)$ 을 그 기간 동안의 포지션의 자산 손익이라고 정의하고 $R_t(l)$ 의 분포함수를 $F_{t,l}(v)$ 라고 정의하자. 주식, 통화, 선물, 옵션 등에 대해 가격의 상승을 기대하고 매수하여 보유하고 있는 상태에서 $100(1 - \alpha)\%$ 신뢰수준과 기간 l 을 가지는 매수포지션(long

position)의 VaR은 다음과 같이 정의된다.

$$1 - \alpha = P[R_t(l) \leq \text{VaR}] = F_{t,l}(\text{VaR})$$

반대로 가격 하락을 기대하고 주식이나 선물 등을 매도한 상태에서 매도포지션(short position)은

$$1 - \alpha = P[R_t(l) \geq \text{VaR}] = 1 - P[R_t(l) \leq \text{VaR}] = 1 - F_{t,l}(\text{VaR})$$

으로 정의되는데 이것은 매수포지션의 식에서 $R_t(l)$ 대신 $-R_t(l)$ 을 넣은 식으로도 사용가능하다. 위와 같은 정의에서 VaR은 $F_{t,l}(v)$ 의 꼬리부분에 영향을 많이 받는다는 것을 알 수 있었는데 매수포지션일 때는 왼쪽 꼬리, 매도포지션일 때는 오른쪽 꼬리 부분에 대한 분포의 정확도가 매우 중요하다. 이 논문에서는 매수포지션에 대한 VaR에 초점을 맞춘다.

2.2. 변환된 GARCH 모형

서론에서 언급한 것과 같이 수익률은 정규분포보다 꼬리부분이 두텁거나 비대칭적인 형태를 가지면서 앞 시계열의 변동에 영향을 받는 특성을 가진다. 이러한 특성을 모형화 하기 위해서는 복잡한 구조의 모형이 필요하지만 이에 따른 VaR 계산은 상대적으로 어려워지는 문제가 있다. 이 논문에서는 복잡한 모형을 사용하는 대신 자료의 특성을 변환을 통해 바꾸고 바뀐 자료를 최소한의 모형으로 적합시켜 변환된 척도에서의 VaR을 계산한 후 다시 역변환을 통해 본래 척도에서의 VaR을 계산하는 방법에 대해 알아본다. 이 때 사용되는 최소한의 모형으로 ARMA(a, b)-GARCH(p, q)으로 정했다.

통계적으로 볼 때, 이 방법을 적용하기 위해 사용되는 변환은 자료의 왜도와 첨도를 정규분포 수준으로 만들어 주는 역할을 해야 한다. 수익률의 경우, 음수나 0이 나올 수 있기 때문에 일반적으로 자료 변환에 많이 사용되고 있는 Box-Cox (1964) 변환을 사용할 수 없다. 이 논문에서는 실수 전체에 대해 정의되는 John and Draper (1980)의 Modulus 변환과 Yeo-Johnson (2000) 변환을 중심으로 설명하고자 한다. Modulus변환과 Yeo-Johnson변환을 각각 ψ_1, ψ_2 라고 하면 두 변환은 다음과 같이 정의된다.

$$\psi_1(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x) \{(|x| + 1)^\lambda - 1\}}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ \text{sign}(x) \log(|x| + 1), & \lambda = 0, \end{cases}$$

$$\psi_2(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{(x + 1)^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0, x \geq 0, \\ \log(x + 1), & \lambda = 0, x \geq 0, \\ -\frac{(-x + 1)^{2-\lambda} - 1}{2 - \lambda}, & \lambda \neq 2, x < 0, \\ -\log(-x + 1), & \lambda = 2, x < 0, \end{cases}$$

여기서 ψ_1 은 대칭이지만 꼬리부분이 두터운 경우 첨도를 낮추어주는데 사용되고 ψ_2 는 비대칭인 경우 대칭성을 높이는데 사용된다. 두 변환 모두 $\lambda = 1$ 일 때 항등함수가 되며 이것은 변환이 필요하지 않다는 것을 의미한다.

변환된 수익률을 $X_t = \psi(R_t, \lambda)$ 라고 하고 F_t 를 t 시점까지의 시계열 정보라고 하면 ARMA(a, b)-GARCH(p, q) 모형은 다음과 같은 구조식을 가진다.

$$\Phi(B) \{\psi(R_t, \lambda) - \mu\} = \Theta(B)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad (2.1)$$

여기서 ε_t 는 분산이 1인 백색잡음이고 조건부 분산 h_t 는

$$h_t = \text{Var}[\varepsilon_t | F_{t-1}] = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}$$

로 정의되며 $\alpha_0 > 0, \alpha_j \geq 0, \beta_j \geq 0$ 이고 $\sum_{j=1}^{\max(p,q)} (\alpha_j + \beta_j) < 1$ 를 만족한다. $\Phi(B)$ 와 $\Theta(B)$ 는 각각 AR 작용소와 MA 작용소를 나타내는데 후진작용소 B 로 표시하면 다음과 같다.

$$\Phi(B) = 1 - (\phi_1 B + \phi_2 B^2 + \cdots + \phi_a B^a), \quad \Theta(B) = 1 - (\theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_b B^b)$$

추정할 모수를 $\xi = (\mu, \phi, \theta, \alpha, \beta, \lambda)$ 라고 하면, ϵ_t 가 정규분포를 따른다는 가정 하에서, 로그가능도 함수(log likelihood function)는 다음과 같다.

$$L(\xi|r) = \sum_{t=1}^n \left[-\frac{1}{2} \log(h_t) - \frac{1}{2h_t} [\Theta(B)^{-1} \Phi(B) \{\psi(r_t, \lambda) - \mu\}]^2 + \log(J(r_t, \lambda)) \right],$$

여기서 $J(x_t, \lambda)$ 는 변환된 확률변수들에 대한 야코비안으로 다음과 같이 계산된다.

$$J(r, \lambda) = \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, \lambda) = \begin{cases} (|r| + 1)^{\lambda-1}, & \text{Modulus 변환,} \\ (|r| + 1)^{\text{sign}(r)(\lambda-1)}, & \text{Yeo-Johnson 변환.} \end{cases}$$

위의 로그가능도 함수를 최대로 만드는 최대가능도 추정값 $\hat{\xi} = (\hat{\mu}, \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$ 을 수치해석학적인 방법을 통해 계산할 수 있다.

2.3. 변환된 GARCH모형에서의 VaR추정

GARCH모형을 근거로 VaR을 계산하기 위해서는 추정된 모형을 근거로 주어진 보유기간과 신뢰수준에서 해당되는 예측구간의 한계를 구해야 한다. 보유기간을 l 이라고 했을 때, 마지막 관측값이 얻어진 n 시점에서 VaR은 $n + l$ 시점에서의 $100(1 - \alpha)\%$ 에 해당하는 단측 예측구간의 경계로 표시할 수 있다. 예측은 평균제곱오차를 최소로 만드는 값이 일반적으로 사용되는데, 최소제곱평균예측의 추정값을 $X_n(l)$ 이라고 했을 때 $X_n(l)$ 은 조건부 기대값 $E[X_{n+l}|X_n, X_{n-1}, \dots]$ 로 표시되고 모형 (2.1)의 가정하에 서의 예측오차는 다음과 같은 성질을 만족한다.

$$\epsilon_n(l) = X_{n+l} - X_n(l) \sim N(0, h_{n+l})$$

이를 이용하여 예측구간의 하한경계는 다음의 관계식을 이용하여 구할 수 있다,

$$P \left\{ \frac{X_{n+l} - X_n(l)}{\sqrt{h_{n+l}}} \leq z_\alpha \right\} = \alpha,$$

여기서 z_α 는 표준정규분포에서의 q -위수를 나타내며 이 식을 이용하여 X_{n+l} 에 대한 $100(1 - \alpha)\%$ 단측 예측구간의 하한값은 다음과 같이 주어진다.

$$U_n(l) = X_n(l) + z_\alpha h_{n+l}$$

ARMA(a, b)-GARCH(p, q)모형 하에서의 최소평균제곱오차 예측값은

$$X_n(l) = \begin{cases} \mu + \sum_{j=1}^a \phi_j \{X_n(l-j) - \mu\} - \sum_{j=1}^b \theta_j \epsilon_{n+l-j}, & l \leq b, \\ \mu + \sum_{j=1}^a \phi_j \{X_n(l-j) - \mu\}, & l > b \end{cases}$$

가 되며 앞에서 구한 최대가능도 추정량 $\hat{\xi}$ 을 대입하면 $X_n(l)$ 의 추정량을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{X}_n(l) = \begin{cases} \hat{\mu} + \sum_{j=1}^a \hat{\phi}_j \{\hat{X}_n(l-j) - \hat{\mu}\} - \sum_{j=1}^b \hat{\theta}_j \hat{\epsilon}_{n+l-j}, & l \leq b, \\ \hat{\mu} + \sum_{j=1}^a \hat{\phi}_j \{\hat{X}_n(l-j) - \hat{\mu}\}, & l > b, \end{cases}$$

여기서, $j \geq 0$ 에 대해, $\hat{\varepsilon}_{n-j} = X_{n-j} - \hat{X}_{n-j}$ 는 $n-j$ 시점에서의 잔차이고 $\hat{X}_n(l-j)$ 는 $X_n, X_{n-1}, \dots$ 와 $\hat{\varepsilon}_n, \hat{\varepsilon}_{n-1}, \dots$ 로 표시될 때까지 위의 관계식을 재귀적으로 계산하여 구할 수 있다. 양수 l 에 대해, $E[\varepsilon_{n+l}^2 - 1 | F_n] = 0$ 이고 $\varepsilon_{n+l}^2 = h_{n+l}\varepsilon_{n+l}^2$ 인 사실을 이용하여 h_{n+l} 에 대한 예측값을 구할 수 있다. n 시점에서의 l 시차 후의 조건부 분산의 예측값을 $h_n(l)$ 이라고 하면

$$h_n(l) = \text{Var}[\varepsilon_{n+l} | F_n] = \alpha_0 + \sum_{j=0}^p \alpha_j \varepsilon_{n+l-j}^{2*} + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{n+l-j}^* \quad (2.2)$$

로 표시할 수 있다. 여기서 ε_{n+l-j}^{2*} 와 h_{n+l-j}^* 는 다음과 같이 재귀적으로 표시된다.

$$\varepsilon_{n+l-j}^{2*} = \begin{cases} \varepsilon_{n+l-j}^2, & l \leq j, \\ h_n(l-j), & l > j, \end{cases} \quad h_{n+l-j}^* = \begin{cases} h_{n+l-j}, & l \leq j, \\ h_n(l-j), & l > j, \end{cases}$$

GARCH(1, 1)인 경우, $h_n(1) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_n^2 + \beta_1 h_n$ 이고, $l > 1$ 에 대해, $h_n(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)h_n(l-1)$ 로 표시된다. 앞에서 구해진 추정량 $\hat{\xi}$ 을 (2.2)에 대입하면 $h_n(l)$ 의 추정값 $\hat{h}_n(l)$ 을 구할 수 있고 X_{n+l} 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 단측예측구간의 하한값은

$$\hat{U}_n(l) = \hat{X}_n(l) + z_\alpha \hat{h}_n(l)$$

으로 추정할 수 있으며 본래 척도에서의 VaR은 다음과 같이 정규성을 높이는데 사용되었던 변환의 추정된 $\hat{\lambda}$ 을 이용한 역변환하여 구할 수 있다.

$$\text{VaR} = \psi^{-1}(\hat{U}_n(l), \hat{\lambda})$$

이 때, modulus변환과 Yeo-Johnson변환의 역변환은 각각 다음과 같다.

$$\psi_1^{-1}(u, \lambda) = \begin{cases} \text{sign}(x) \{(\lambda|u| + 1)^{\frac{1}{\lambda}} - 1\}, & \lambda \neq 0, \\ \text{sign}(u) (\exp(|u|) - 1), & \lambda = 0, \end{cases}$$

$$\psi_2^{-1}(u, \lambda) = \begin{cases} (\lambda u + 1)^{\frac{1}{\lambda}} - 1, & u \geq 0, \lambda \neq 0, \\ \exp(u) - 1, & u \geq 0, \lambda = 0, \\ 1 - \{(\lambda - 2)u + 1\}^{\frac{1}{2-\lambda}}, & u < 0, \lambda \neq 2, \\ 1 - \exp(-u), & u < 0, \lambda = 2. \end{cases}$$

Modulus 변환에서 $\lambda < 0$ 이면 $\lambda^{-1} < \psi_1(x, \lambda) < -\lambda^{-1}$ 이고, Yeo-Johnson 변환의 경우 $\lambda < 0$ 일 때 $\psi_2(x, \lambda) < -\lambda^{-1}$ 이고 $\lambda > 2$ 일 때 $(2-\lambda)^{-1} < \psi_2(x, \lambda)$ 가 된다. 그러므로 $\hat{\lambda}$ 가 이들 구간안에 있으면 변환된 척도에서의 $\hat{U}_n(l)$ 에 대한 역변환을 적용할 수 없을 수도 있다. 이런 경우 포함확률에 영향을 주지 않는 범위내에서 대체값을 정하여 경계를 구해야 한다.

3. 실증분석

이 논문에서는 다음의 세 가지 방법을 이용하여 VaR을 계산한 후 실제 관측자료를 비교하여 포함확률을 계산하여 VaR의 타당성을 비교하였다.

- 방법 I : 변환을 적용하지 않고 VaR 계산
- 방법 II : Yeo-Johnson 변환을 적용하여 VaR 계산

그림 1: KOSPI와 KOSDAQ 지수의 수익률에 대한 변환모수의 추정값과 잔차의 왜도와 첨도

• 방법 III : Modulus 변환을 적용하여 VaR 계산

실증분석에는 기준지수가 1000으로 상향된 2004년 1월 26일부터의 KOSDAQ과 같은 시점에서의 KOSPI의 로그수익률이 사용되었다. 결과의 타당성을 확인하기 위해 시계열 크기를 $n = 100, 200, 300$ 으로 설정한 시계열 블록에 대해 모수 및 예측 하한값을 계산하고 실제 수익률과 비교하여 어느 정도 하한값보다 작은지를 알아보았다. 이동평균을 계산할 때처럼 시계열을 하나씩 이동시켜 이러한 작업을 1000번 반복하였다.

사전분석 결과, 수익률의 변동성은 앞 시점의 오차에 영향을 받는 ARCH 효과가 있는 것으로 나타났다며 수익률 모형은 시점과 시계열 크기에 따라 조금씩 다른 것으로 나타났다. 실증분석에서는 각 시점과 시계열크기에 대해 상수항-GARCH(1,1), AR(1)-GARCH(1,1), MA(1)-GARCH(1,1) 중에서 AIC 기준에서 가장 적절한 모형을 최소모형으로 선택하였다. 분석은 Matlab 2007을 이용하여 분석하였는데 변환을 적용했을 때 예측값은 다음과 같은 단계를 거쳐 얻어졌다. GARCH 모듈에서 제공되는 garchfit함수에서 계산된 로그가능도함수값에 야곱비안의 로그를 추가하여 fminbnd 함수으로 변환모수 $\hat{\lambda}$ 을 추정하였다. 추정된 $\hat{\lambda}$ 을 이용하여 변환시킨 자료를 garchfit함수 이용하여 모수를 추정한 후 garchpred 함수에서 $\hat{X}_n(l)$ 와 $\hat{h}_n(l)$ 유도한 후 역변환을 통해 예측 하한값을 추정하였다.

그림 1은 $n = 100$ 인 경우 KOSPI와 KOSDAQ 지수의 수익률에 대한 modulus변환과 Yeo-Johnson변환의 모수 추정값과 변환전과 두 변환을 적용했을 때의 잔차들의 왜도와 첨도를 표시한 것이다. KOSPI 수익률의 경우 변환전의 왜도는 대부분 음수를 가지고 있으며 첨도는 3보다 큰 것을 볼 수 있으며 modulus변환의 모수 추정값이 부분적으로 1보다 큰 값을 가지는 경우도 있으나 대부분 1보다 작고 Yeo-Johnson변환의 모수 추정값은 1보다 크기 때문에 수익률의 분포는 전반적으로 정규분포보다는 양쪽 꼬리부분이 두터우면서 왼쪽으로 꼬리가 긴 형태의 분포를 가지고 있는 것으로 나타났다. Yeo-Johnson 변환을 통해 얻은 잔차의 왜도는 0 근처에 분포하고 있으며 modulus 변환을 통해 얻은 첨도는 3 근처에 있지만 두 변환 모두 왜도와 첨도를 동시에 개선시키는데 한계가 있는 것으로 보인다. KOSDAQ 수익률도 시점에 따라 패턴은 다르지만 KOSPI 수익률과 비슷한 특성을 가지는 것으로 나타

표 1: 표준정규위수를 적용하여 추정된 VaR의 포함확률

n	α	보유 기간	KOSPI			KOSDAQ		
			I	II	III	I	II	III
100	0.05	1일	.076	.068	.081	.073	.062	.073
		3일	.074	.065	.076	.060	.050	.063
		5일	.074	.067	.075	.054	.048	.062
	0.03	1일	.054	.048	.052	.054	.039	.052
		3일	.057	.048	.056	.045	.031	.048
		5일	.056	.047	.060	.044	.033	.051
	0.01	1일	.030	.021	.023	.028	.021	.023
		3일	.029	.019	.023	.028	.023	.026
		5일	.034	.021	.030	.027	.022	.025
200	0.05	1일	.077	.071	.085	.073	.058	.072
		3일	.075	.073	.078	.074	.059	.076
		5일	.071	.067	.074	.065	.057	.073
	0.03	1일	.057	.054	.055	.058	.045	.050
		3일	.058	.049	.058	.055	.042	.053
		5일	.059	.052	.061	.048	.043	.054
	0.01	1일	.031	.022	.023	.035	.021	.031
		3일	.030	.022	.024	.033	.022	.030
		5일	.035	.025	.028	.032	.025	.033
300	0.05	1일	.082	.080	.084	.073	.060	.078
		3일	.082	.071	.082	.064	.056	.073
		5일	.072	.066	.075	.064	.053	.077
	0.03	1일	.063	.053	.058	.056	.045	.050
		3일	.058	.055	.057	.050	.037	.056
		5일	.060	.052	.058	.049	.042	.059
	0.01	1일	.030	.023	.022	.035	.021	.027
		3일	.034	.023	.023	.034	.026	.035
		5일	.033	.028	.025	.030	.024	.033

났다. 시계열 크기를 $n = 200$ 과 300 으로 했을 때, modulus의 $\hat{\lambda}$ 은 1보다 작고 Yeo-Johnson의 $\hat{\lambda}$ 은 1보다 컸다.

표 1은 보유기간을 1, 3, 5시점으로 하고 신뢰수준을 95%, 97%, 99%로 했을 때, 각 보유기간과 신뢰수준에 대해 1,000개의 VaR과 실제관측값을 비교 정리한 것이다. 포함확률에 대한 표준오차는 95%인 경우 0.0069, 97%인 경우 0.0054, 99%인 경우 0.0032가 된다. 이 표를 근거로 결과를 정리하면 다음과 같다.

- KOSPI의 경우 보유기간, 신뢰수준, 방법에 관계없이 포함확률이 명목확률보다 높으면 방법 I과 III이 상대적으로 더 높은 것으로 나타났다. 이것은 방법에 관계없이 추정된 VaR이 과소평가(VaR은 최대손실율이므로 손실율이 작다는 의미)되어 있을 가능성이 높다는 것을 의미한다.
- KOSDAQ의 경우 $n = 100$ 일 때 방법 II에 의한 95%, 97% 신뢰수준에서의 VaR의 포함확률이 명목수준에 근접하고 있으며 나머지 부분에서 방법 II의 VaR 포함확률이 명목수준보다 높으나 방법 I과 III보다는 낮은 것으로 나타났다. 이것은 KOSPI와 같이 추정된 VaR이 과소평가되어 있다는 것을 의미한다.

이렇게 과대포함 현상이 발생하는 이유는 앞에서 언급한 것과 같이 각 변환이 왜도와 첨도를 동시에 조절하지 못하고 변환된 상황에서도 여전히 왜도와 첨도의 문제가 남아 있기 때문이다. 이러한 문

표 2: 경험적 위수를 적용하여 추정된 VaR의 포함확률

n	α	보유 기간	KOSPI			KOSDAQ		
			I	II	III	I	II	III
100	0.05	1일	.038	.037	.063	.043	.049	.070
		3일	.037	.035	.066	.036	.040	.069
		5일	.042	.035	.066	.038	.043	.070
	0.03	1일	.028	.030	.051	.024	.025	.050
		3일	.027	.027	.049	.029	.029	.051
		5일	.026	.026	.049	.025	.026	.049
	0.01	1일	.010	.009	.028	.011	.010	.020
		3일	.010	.010	.024	.011	.011	.025
		5일	.011	.009	.025	.015	.012	.023
200	0.05	1일	.040	.034	.061	.037	.037	.067
		3일	.039	.037	.068	.036	.037	.070
		5일	.041	.039	.066	.034	.032	.067
	0.03	1일	.022	.023	.041	.020	.021	.049
		3일	.027	.026	.053	.022	.024	.050
		5일	.030	.030	.049	.022	.024	.047
	0.01	1일	.005	.006	.022	.009	.009	.023
		3일	.007	.007	.025	.013	.015	.029
		5일	.008	.007	.028	.010	.012	.029
300	0.05	1일	.031	.034	.066	.032	.032	.064
		3일	.036	.033	.062	.034	.031	.068
		5일	.035	.033	.063	.025	.029	.068
	0.03	1일	.013	.013	.039	.021	.019	.043
		3일	.016	.016	.046	.023	.024	.046
		5일	.017	.017	.044	.021	.021	.046
	0.01	1일	.006	.006	.016	.008	.007	.025
		3일	.008	.008	.018	.010	.008	.030
		5일	.009	.008	.019	.008	.009	.030

제를 $\psi_1(\psi_2(x, \lambda_2), \lambda_1)$ 와 같이 두 변환을 동시에 적용하여 왜도와 첨도의 문제를 해결하는 방안을 고려할 수 있으나 방법이 복잡해지고 모수추정에서 어려워지는 단점이 있다. 다른 방법으로는 변환된 시계열의 오차가 정규분포가 아닌 t -분포와 같은 첨도가 큰 분포를 따른다는 가정 하에서 추정하는 방법을 고려할 수 있다.

이 논문에서는 이러한 방법 대신 다음과 같은 방법으로 포함확률을 개선시켜 보았다. 앞의 분석에서 $\hat{\epsilon}_t = \hat{\epsilon}_t / \sqrt{\hat{h}_t}$, $t = 1, \dots, n$ 의 왜도나 첨도의 결과가 표준정규분포를 따른다고 볼 수 없기 때문에 예측하한값을 구할 때 z_α 를 경험적 위수, 즉 n 개의 $\hat{\epsilon}_t$ 에서 α -위수에 해당하는 값으로 대체하였다. 표 2는 $\hat{\epsilon}_t$ 의 α -위수로 대체했을 때 VaR의 포함확률 결과이고 이를 정리하면 다음과 같다.

- KOSPI의 경우, 신뢰수준이 99%에서 방법 I과 II는 모든 n 과 보유기간에서 명목수준에 근접하며 개선되는 결과를 보였으나 95% 신뢰수준에서는 약간 과소포함되는 경향이 있는 것으로 나타으며 n 이 커질 수록 그 경향이 뚜렷했다. 방법 III에서는 약간의 개선이 있었으나 여전히 과대포함하고 있었다.
- KOSDAQ의 경우, KOSPI와 마찬가지로 신뢰수준이 99%에서의 방법 I과 II의 포함확률이 명목수준에 근접하며 95% 신뢰수준에서 $n = 200$ 과 300일 때의 VaR은 과대평가되는 경향이 있고 $n = 100$ 일 때 방법 II의 VaR 추정값은 적절한 것으로 보인다. 방법 III의 VaR은 여전히 과소평가되는 경향이 있었다.

4. 결론

이 논문에서는 변환-역변환을 이용하여 VaR을 추정하는 방법에 대해 알아보고 KOSPI와 KOSDAQ 수익률을 분석을 통해 방법론의 타당성을 확인하고 하였다.

두 지수의 수익률에 대해 GARCH(1,1)을 적합시켜 얻은 잔차의 분포는 비대칭적이거나 정규분포에 비해 꼬리부분이 두터운 것으로 나타나 정규분포 가정 하에서 추정된 VaR은 적절하지 않는 것으로 판단된다. 실제 분석결과 추정된 VaR은 상당히 과소평가되는 경향이 있는 것으로 나타났다. KOSPI와 KOSDAQ 수익률에 대한 VaR 추정에서는 modulus변환보다는 Yeo-Johnson변환을 이용했을 때 더 좋은 결과를 얻어 VaR은 레버리지 효과에 더 영향을 받고 있는 것으로 보인다.

Modulus 변환을 이용하여 얻은 잔차에서는 왜도를 개선시킬 부분이 여전히 남아있고 Yeo-Johnson 변환을 이용하여 얻은 잔차는 첨도의 문제가 여전히 남아 있어 modulus와 Yeo-Johnson의 합성변환을 고려하여 왜도와 첨도를 동시에 해결하는 방안에 대한 연구가 필요한 것으로 사료된다. 이 논문에서는 표준정규위수를 대신 경험적 위수를 적용하여 분포의 형태에 영향을 덜 받는 방법을 적용해 보았으며 99% 신뢰수준에서 방법 I과 II에서 좋은 결과를 얻었으나 95% 신뢰수준에서는 $n = 100$ 인 KOSDAQ에 대해 방법 II만이 적절한 것으로 나타났다.

우리나라 주가지수의 수익률은 그림 1에서 보는 것과 같이 관측시점에 따라 그 특성이 차이가 있는 것으로 판단된다. 또한 논문에서 구체적으로 언급하지 않았으나 추정된 GARCH 모수 $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ 의 값이 1 근처에 있는 경우가 종종 있어 시계열의 특성에 변화가 발생하는 경향이 있는 것으로 보이기 때문에 변화점을 포함한 모형을 분석모형으로 사용할 경우 더욱 정확한 VaR을 추정할 것으로 생각된다.

참고 문헌

- Andre, L. C. and Beatriz, V. (2003). Value-at-risk and extreme returns in Asian stock markets, *International Journal of business*, **8**, 17–40.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–328.
- Box, G. E. P. and Cox, C. R. (1964). An analysis of transformations, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **26**, 211–252.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of the United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1008.
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices, *The Journal of Business*, **38**, 34–105.
- Gencay, R. and Selcuk, F. (2004). Extreme value theory and Value-at-Risk: Relative performance in emerging markets, *International Journal of Forecasting*, **20**, 287–303.
- John, J. A. and Draper, N. R. (1980). An alternative family of transformations, *Applied Statistics*, **29**, 190–197.
- Li, D. (1999). Value at Risk based on the Volatility Skewness and Kurtosis, *RiskMetrics Group*.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, **36**, 394–419.
- McCulloch, J. H. (1996). Financial applications of stable distributions, *Handbook of Statistics*, **14**, 393–425, North-Holland, Amsterdam.
- McDonald, J. B. (1996). Probability distribution for financial models, *Handbook of Statistics*, **14**, 427–461, North-Holland, Amsterdam.
- Neftci, S. N. (2000). Value at Risk calculation, extreme events, and tail estimation, *The Journal of Derivatives*, **7**, 23–37.
- Turan, G. B. (2003). The generalized extreme value distribution, *Economics Letters*, **79**, 423–427.

- Yeo, I. K. and Johnson, R. A. (2000). A new family of power transformations to improve normality or symmetry, *Biometrika*, **87**, 954–959.
- Zangari, P. (1996). An Improved Methodology for Measuring VaR, *RiskMetrics Monitor*, 2nd quarter, 7–25.

2009년 8월 접수; 2009년 9월 채택

VaR Estimation via Transformed GARCH Models

Juyeon Park^a, In-Kwon Yeo^{1,a}

^aDepartment of Statistics, Sookmyung Women's University

Abstract

In this paper, we investigate the approach to estimate VaR under the transformed GARCH model. The time series are transformed to approximate to the underlying distribution of error terms and then the parameters and the one-sided prediction interval are estimated with the transformed data. The back-transformation is applied to compute the VaR in the original data scale. The analyses on the asset returns of KOSPI and KOSDAQ are presented to verify the accuracy of the coverage probabilities of the proposed VaR.

Keywords: Modulus transform, Yeo-Johnson transformation, skewness, kurtosis, coverage probability.

This research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2008.

¹ Corresponding author: Associate Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea. E-mail: inkwon@sm.ac.kr