가변용량 네트워크 시스템에서의 링크 중요도에 관한 척도

이승민^{1,a}

^a한림대학교 금융정보통계학과

요약

가변용량 네트워크에서의 각 링크는 서로 독립이며 용량한계가 설정되어 있다. 각 링크는 작동하거나 작동불능의 두 상태로 구별되며 작동불능 상태의 링크는 유량을 통과시킬 수 없다. 주어진 네트워크는 미리 설정된 기정용량 이상의 최대 전송용량이 가능할 때 작동된다고 한다. 본 논문에서는 가변용량 네트워크에서 기정용량이 주어졌을 때의 각 링크의 용량에 관한 구조적 중요도와 신뢰성 중요도를 정의하고, 네트워크 성능지수에 관련한 링크 중요도 척도를 제시한다. 또한 다양한 구조의 네트워크에서의 수치예제를 통하여 제시된 척도를 비교분석한다.

주요용어: 네트워크 신뢰성, 성능지수, 용량에 관한 링크의 중요도.

1. 서론

네트워크는 노드 집합 V 와 링크 집합 E 의 확률 그래프 $G(V, E)$ 로 표현된다. 각 링크는 한계 전송용량이 설정되어 있으며, 작동하거나 작동불능의 두 상태로 구별된다. 작동불능 상태의 링크는 유량을 통과시킬 수 없다. 이러한 링크로 구성된 가변용량 네트워크는 시작 노드로부터 최종 노드까지 미리 설정된 기정용량 이상을 전송할 수 있어야 한다. 이러한 경우 네트워크의 성능은 링크간의 연결성뿐만 아니라 네트워크가 전송할 수 있는 최대 전송용량이 함께 고려되어야 한다. 네트워크 성능의 척도로서 네트워크의 신뢰성은 네트워크가 미리 설정된 기정용량 이상을 전송할 수 있는 확률이다. 네트워크가 기정용량 이상의 최대전송용량을 가질 때 이 네트워크는 작동한다고 하며, 따라서 네트워크 신뢰성은 네트워크가 작동할 확률로 표시될 수 있다. 네트워크 성능의 또 다른 척도로서는 네트워크 전송용량의 기대치가 사용되기도 한다. 가변용량 네트워크에서의 네트워크 신뢰성을 효율적으로 계산하기 위한 많은 알고리즘들이 제시되었다. Lee와 Park (2001), Lee와 Lee (2006) 등의 결과 및 그에 포함된 참고문헌에서 네트워크 신뢰성의 효율적 계산을 위한 알고리즘의 예들을 찾아볼 수 있다. Aggarwal (1988)은 네트워크 성능의 척도로서 성능지수(performance index)를 제시하였으며, 이는 기본적으로 네트워크 최대전송용량의 기대치의 변환이다. 대부분의 결과들은 네트워크내 링크간의 연결성을 나타내는 최소경로집합(minimal path set)이 알려져 있다고 할 때 이를 이용하여 기정용량 이상을 전송할 수 있는 최소의 서브네트를 효율적으로 구성하는데 중점을 두고 있다.

가변용량 네트워크에서의 링크 중요도는 그 링크가 네트워크의 성능에 미치는 영향을 측정할 수 있는 척도이다. 종래의 신뢰성 이론에서의 부품 중요도에 관하여 Birnbaum (1969)은 작동과 작동불능의 두 상태만을 갖는 부품들로 이루어진 이항 시스템에서의 부품 중요도에 관한 결과를 얻었다. 이후 여러 저자들에 의해서 다중상태 시스템에서의 일반화가 시도되었으며, Kim과 Baxter (1987), Baxter와 Lee (1989), Lee와 Sim (2007) 등은 부품과 시스템이 연속적인 값을 취할 수 있는 연속상태 시스템에

이 논문은 2009년도 한림대학교 교비연구비(HRF-2009-027)에 의하여 연구되었음.

¹ (200-702) 강원도 춘천시 옥천동 1번지, 한림대학교 금융정보통계학과, 교수. E-mail: smlee1@hallym.ac.kr

서의 일반화에 관한 결과를 발표하였다. 한계용량이 있는 링크로 구성된 가변용량 네트워크에서의 관련 결과로서 Jung 등 (2001)의 링크의 신뢰성 중요도는 링크 신뢰성의 변화가 네트워크 신뢰성의 변화에 미치는 비율로서 정의될 수 있으며, 이는 네트워크의 성능을 증진시키려 할 때 어느 링크의 신뢰성을 우선적으로 증진시키는 것이 효율적인가를 결정하는데 사용될 수 있다. Hong과 Lie (1993)는 링크와 네트워크가 두 상태만을 가지며 방향성이 없는 링크로 구성된 가변용량 네트워크에서 두 링크 사이의 결합 신뢰성 중요도에 관한 결과를 발표하였다. Armstrong (1997)은 그동안 제시되었던 몇 가지 링크 중요도간의 관계를 논의하고 각 링크의 작동불능 상태가 두 가지 서로 다른 상태로 구별될 수 있는 네트워크에서의 일반화를 시도하였다.

본 논문에서는 가변용량 네트워크에서의 용량에 관한 링크 중요도에 관하여 고찰하고자 한다. 2장에서는 네트워크 성능의 척도로서의 네트워크 신뢰성과 네트워크 성능지수의 의미를 명확히 하고, 기정용량이 주어졌을 때의 각 링크의, 용량에 관한, 구조적 중요도와 신뢰성 중요도를 정의하였다. 또한 링크의 용량에 관한 성능지수 중요도에 관하여 고찰하였다. 이는 네트워크의 기대 전송용량을 증진시키려 할 때 어느 링크의 용량을 우선적으로 증진시키는 것이 효율적인가를 결정하는데 사용될 수 있다. 3장에서는 수치예제를 통하여 본 논문에서 제시된 중요도를 평가하고, Jung 등 (2001)의 결과와 비교분석하였다.

용어표기

c_i	링크 i 의 전송용량
$\mathbf{c}$	링크 전송용량 벡터 : $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$
p_i	링크 i 의 신뢰성
$\mathbf{p}$	링크 신뢰성 벡터 : $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$
$\mathbf{X}$	확률 상태벡터 : $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$
$\mathbf{x}$	상태벡터 $\mathbf{X}$ 가 취할수 있는 이항 상태벡터 값
k	요구되는 네트워크 전송용량 수준
$m(\mathbf{x} : \mathbf{c})$	$\mathbf{x}$ 와 $\mathbf{c}$ 가 주어졌을 때의 네트워크의 최대전송용량
$R_k(\mathbf{p} : \mathbf{c})$	수준 k 에서의 네트워크 신뢰성
$M(\mathbf{p} : \mathbf{c})$	네트워크의 성능지수
$SI_k^c(i)$	수준 k 에서의 링크 i 의 구조적 중요도
$RI_k^c(i)$	수준 k 에서의 링크 i 의 신뢰성 중요도
$MI^c(i)$	네트워크의 성능지수 중요도

2. 링크의 중요도

가정

1. 각 노드는 항상 작동하며 용량한계는 없다.
2. 각 링크는 서로 독립이며, 작동과 작동불능의 두 상태로 구별된다.
3. 작동불능 상태의 링크는 유량을 통과시킬 수 없다.

가변용량 네트워크에서의 각 링크는 서로 다른 전송용량 한계를 갖고 있으며, 네트워크는 시작노드로부터 최종노드까지 미리 설정된 일정용량 이상을 전송할 수 있어야 한다. 상태벡터 $\mathbf{x}$ 와 용량벡터 $\mathbf{c}$ 가 주어졌을 때의 네트워크의 최대 전송용량을 $m(\mathbf{x} : \mathbf{c})$ 로 표시한다. 네트워크의 전송용량 $m(\mathbf{x} : \mathbf{c})$ 는 $\mathbf{x}$ 와 $\mathbf{c}$ 의 함수이며 각각에 대하여 비감소함수이다. 네트워크의 전송용량 $m(\mathbf{x} : \mathbf{c})$ 를 효율적으로 계산하기 위한 알고리즘에 관하여 많은 시도들이 이루어졌으며, 예를 들어 Rai와 Soh (1991), Kyandoghere (1998) 등과 그에 포함된 참고문헌에서 찾아볼 수 있다. Lee 등 (2004)은 이미 발표된 결과들에서 논의되었던 문제점을 개선하고 또한 반복해서 나타나는 서브네트워크에서의 중복되는 계산과정을 줄일 수 있는 효율적인 방법을 제시하였다.

네트워크가 설정된 용량수준 k 이상을 전송할 수 있을 때, 즉 $m(\mathbf{x} : \mathbf{c}) \geq k$ 가 되는 $\mathbf{x}$ 가 존재할 때 그 네트워크는 수준 k 에서 작동된다고 한다. 수준 k 에서의 네트워크 신뢰성 $R_k(\mathbf{p} : \mathbf{c})$ 는 네트워크가 수준 k 에서 작동할 수 있는 확률이며 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$R_k(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = P\{m(\mathbf{X} : \mathbf{c}) \geq k\},$$

여기서 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ 이며 p_i 는 링크 i 가 작동할 확률이다. 따라서 네트워크의 신뢰성 $R_k(\mathbf{p} : \mathbf{c})$ 은 네트워크가 미리 설정된 요구용량 k 이상을 시작노드로부터 최종노드까지 전송할 수 있는 확률이며 $\mathbf{p}$ 와 $\mathbf{c}$ 의 함수이다. 네트워크의 성능지수 $M(\mathbf{p} : \mathbf{c})$ 은 네트워크가 시작노드로부터 최종노드까지 전송할 수 있는 전송용량의 기대치이며 다음과 같이 정의한다.

$$M(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = E[m(\mathbf{X} : \mathbf{c})].$$

본 장에서는 용량수준 k 가 주어졌을 때 각 링크의, 용량에 관한, 구조적 중요도와 신뢰성 중요도를 정의하고, 또한 각 링크의 용량에 관한 성능지수 중요도에 관하여 고찰하고자 한다.

정의 1. 수준 k 가 주어졌을 때, 링크 i 의 용량에 관한 구조적 중요도는 다음과 같이 정의한다.

$$SI_k^c(i) = \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot N(\{\mathbf{x} | m(\mathbf{x} : \mathbf{c}) \geq k > m(\mathbf{x} : ((c_i - 1)_i, \mathbf{c}))\}),$$

여기서 $N(A)$ 는 집합 A 에 있는 벡터의 개수를 의미한다. 각 링크의 용량은 정수 값을 갖는 것으로 가정하며 용량벡터 $((c_i - 1)_i, \mathbf{c})$ 는 다른 링크의 용량은 변함이 없으나 링크 i 의 용량은 c_i 에서 단위용량만큼 감소한 상태를 나타낸다. 따라서 $SI_k^c(i)$ 는 모든 가능한 2^n 개의 상태벡터 중에서 링크 i 의 용량이 c_i 를 유지하면 네트워크가 수준 k 에서 작동하지만 용량이 감소하면 네트워크가 작동불능이 되는 상태벡터의 비율이다.

그림 1의 네트워크 (a), (b)에서 용량벡터는 공히 $\mathbf{c} = (1, 2)$ 로 주어졌다고 하자. 네트워크 용량수준이 $k = 1$ 로 주어졌을 때, 네트워크 (a)에서 이를 달성하기 위해서는 링크 1, 2 모두 작동하여야 한다. 링크 1의 용량이 감소하면 $m((1, 1) : (1, 2)) (= 1) > m((1, 1) : (0, 2)) (= 0)$ 이므로 $SI_1^c(1) = 1/4$ 이다. 링크 2의 경우 용량의 감소가 네트워크의 최대 전송용량에 영향을 미치지 않으므로 $SI_1^c(2) = 0$ 임을 알 수 있다. 네트워크 (a)의 경우 최대 전송용량이 1이므로 용량수준 $k \geq 2$ 에서는 $SI_k^c(1) = SI_k^c(2) = 0$ 이 됨을 알 수 있다. 네트워크 (b)의 경우 최대 전송용량은 3이다. 각 링크의 구조적 중요도는 $k = 1$ 이면 $SI_1^c(1) = 1/4$, $SI_1^c(2) = 0$ 이며, 이와 유사한 방법으로 수준 $k = 2$ 에서 $SI_2^c(1) = 0$, $SI_2^c(2) = 1/4$, 또한 수준 $k = 3$ 에서 $SI_3^c(1) = SI_3^c(2) = 1/4$, 수준 $k \geq 4$ 에서는 $SI_k^c(1) = SI_k^c(2) = 0$ 를 얻을 수 있다.

정의 2. 수준 k 가 주어졌을 때, 링크 i 의 용량에 관한 신뢰성 중요도는 다음과 같이 정의한다.

$$RI_k^c(i) = P\{m(\mathbf{X} : \mathbf{c}) \geq k > m(\mathbf{X} : ((c_i - 1)_i, \mathbf{c}))\}.$$

그림 1: 직렬과 병렬구조의 네트워크

그림 2: 네트워크의 구조도

따라서 $RI_k^c(i)$ 는 링크 i 의 용량이 c_i 를 유지하면 수준 k 에서 네트워크가 작동하지만 용량이 감소하면 네트워크가 작동불능이 될 확률이다. 그림 1의 네트워크 (a), (b)에서 용량벡터는 공히 $\mathbf{c} = (1, 2)$ 로 주어졌을 때, 네트워크 (a)의 경우 각 링크의 용량에 관한 신뢰성 중요도는 $k = 1$ 에서 $RI_1^c(1) = p_1 p_2$, $RI_1^c(2) = 0$ 이며, 수준 $k \geq 2$ 에서는 $RI_k^c(1) = RI_k^c(2) = 0$ 이 됨을 알 수 있다. 네트워크 (a)에서는 링크 1의 용량의 감소가 네트워크의 신뢰성에 영향을 미침을 알 수 있다. 네트워크 (b)의 경우 각 링크의 신뢰성 중요도는 $k = 1$ 이면 $RI_1^c(1) = p_1(1 - p_2)$, $RI_1^c(2) = 0$ 이며, 이와 유사한 방법으로 수준 $k = 2$ 에서 $RI_2^c(1) = 0$, $RI_2^c(2) = (1 - p_1)p_2$, 또한 수준 $k = 3$ 에서 $RI_3^c(1) = RI_3^c(2) = p_1 p_2$, 수준 $k \geq 4$ 에서는 $RI_k^c(1) = RI_k^c(2) = 0$ 을 얻을 수 있다. 따라서 네트워크 (b)에서는 네트워크의 최대 전송용량 1 이상을 유지하기 위해서는 링크 1의 용량을 유지하는 것이 중요하며, 최대 전송용량 2 이상을 유지하기 위해서는 오히려 링크 2의 용량을 유지하는 것이 보다 효과적임을 알 수 있다.

정의 3. 가변용량 네트워크에서의 링크 i 의 용량에 관한 성능지수 중요도는 다음과 같이 정의한다.

$$MI^c(i) = M(\mathbf{p} : \mathbf{c}) - M(\mathbf{p} : ((c_i - 1)_i, \mathbf{c})).$$

따라서 $MI_k^c(i)$ 는 링크 i 의 용량의 변화가 네트워크 성능지수에 미치는 영향의 정도를 나타낸다. 그림 1의 네트워크 (a), (b)에서 용량벡터가 공히 $\mathbf{c} = (1, 2)$ 로 주어졌을 때, 네트워크 (a)의 경우 $M(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = p_1 p_2$ 이며, 각 링크의 용량에 관한 성능지수 중요도는 $MI^c(1) = p_1 p_2$, $MI^c(2) = 0$ 를 얻을 수 있다. 즉 네트워크 (a)에서는 링크 2의 용량을 변화시킨다 해도 네트워크의 성능지수에 변화를 주지 못한다는 것을 알 수 있다. 네트워크 (b)의 경우 $M(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = p_1 + 2p_2$ 이며, 각 링크의 용량에 관한 성능지수 중요도는 $MI^c(1) = p_1$, $MI^c(2) = p_2$ 를 얻을 수 있다. 따라서 네트워크 (b)에서는 신뢰성이 큰 링크의 용량을 증가시키는 것이 성능지수의 증진에 보다 효과적임을 알 수 있다.

3. 수치예제

예제 1. 그림 2의 구조를 갖는 3개의 링크로 이루어진 가변용량 네트워크에서, 용량벡터는 $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$ 로 주어졌다고 하자. 이 경우, 각 용량수준 $k = 1, 2, 3$ 에서의 네트워크 신뢰성은 $R_1(\mathbf{p} : \mathbf{c}) =$

표 1: 용량에 관한 링크의 중요도

링크 i	신뢰성 중요도 $RI_k^c(i)$			성능지수 중요도 $MI^c(i)$
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	
1	0	0	$p_1 p_2 p_3$	$p_1 p_2 p_3$
2	0	$p_1 p_2 (1 - p_3)$	$p_1 p_2 p_3$	$p_1 p_2$
3	$P_1(1 - P_2)P_3$	0	$P_1 P_2 P_3$	$p_1 p_3$

표 2: Jung 등 (2001)의, 링크 신뢰성에 관한, 링크의 중요도

링크 i	신뢰성 중요도 RI_i^k			성능지수 중요도 FI_i
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	
1	$2p - p^2$	p	p^2	$3p$
2	$p - p^2$	p	p^2	$2p$
3	$p - p^2$	0	p^2	p

$p_1 p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3$, $R_2(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = p_1 p_2$ 와 $R_3(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = p_1 p_2 p_3$ 를 얻을 수 있다. 이와 유사한 방법으로 네트워크의 성능지수는 $M(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = 2p_1 p_2 + p_1 p_3$ 를 얻을 수 있다. 만약 $p_1 = p_2 = p_3 = p = 0.9$ 로 주어진다면, $R_1(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = 0.891$, $R_2(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = 0.81$, $R_3(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = 0.729$ 임을 알 수 있다. 또한, 네트워크의 성능지수는 $M(\mathbf{p} : \mathbf{c}) = 2.43$ 를 얻을 수 있다. 용량수준 $k = 1, 2, 3$ 에서의 각 링크의 용량에 관한 신뢰성 중요도와 성능지수 중요도는 표 1에 요약되어 있다.

그림 2의 네트워크에서 용량수준이 $k = 1$ 로 주어졌다고 하자. 상태벡터 $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ 에서 네트워크는 작동하고, 링크 1, 2의 용량이 감소하더라도 네트워크의 작동상태에 영향을 미치지 않으나 링크 3의 용량이 감소한다면 네트워크는 작동불능 상태가 된다. 따라서 링크 3의 용량의 감소가 네트워크의 신뢰성에 직접적인 영향을 미치므로 링크 3의 신뢰성 중요도가 가장 높게 나타난다. 마찬가지로 용량수준 $k = 2$ 에서는 링크 2의 중요도가 가장 높다. 용량수준 $k = 3$ 에서는 모든 링크에서 용량의 감소가 네트워크의 신뢰성에 영향을 미치며 그 정도가 같으므로 각 링크의 중요도는 같게 나타난다. 성능지수 중요도에서는 링크 1의 중요도가 가장 낮다. 이는 링크 1의 용량이 감소하더라도 네트워크의 기대 전송 용량의 감소에 미치는 영향이 가장 적음을 나타낸다.

표 2는 그림 2의 네트워크에 관한 Jung 등 (2001)의, 링크 신뢰성에 관한, 링크 중요도의 결과이다. 용량벡터는 공히 $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$ 이며, 각 링크의 신뢰성은 모두 같다고 가정되었다($p_1 = p_2 = p_3 = p$). 표 2에서는 링크 1의 신뢰성 중요도가 모든 용량수준에서 링크 2, 3보다 같거나 높다. 이는 링크 1의 신뢰성의 변화가 네트워크 신뢰성의 변화에 가장 큰 영향을 미친다는 것을 나타낸다. 링크 1은 네트워크 내에서 다른 링크와 직렬로 연결되어 있으므로 링크 1의 작동여부가 네트워크의 신뢰성에 영향을 미치게 된다. 반면, 표 1에서 보듯이 링크 1에서의 용량의 변화는 네트워크 신뢰성의 변화에 주는 영향이 가장 적다. 성능지수 중요도에서도 역시 링크 1의, 링크 신뢰성에 관한, 중요도는 가장 높으나 용량에 관한 중요도는 가장 낮게 나타난다. 링크 1은 가장 큰 용량을 갖고 있으며 다른 링크와 직렬로 연결되어 있으므로 링크 1의 용량이 감소하더라도 네트워크의 기대 전송용량에 큰 영향을 미치지 않음을 알 수 있다.

참고 문헌

- Aggarwal, K. K. (1988). A fast algorithm for the performance index of a telecommunication network, *IEEE Transactions on Reliability*, **37**, 65–69.
- Armstrong, M. J. (1997). Reliability-importance and dual failure-mode components, *IEEE Transactions on Reliability*, **46**, 212–221.

- Baxter, L. A. and Lee, S. M. (1989). Further properties of reliability importance for continuum structure functions, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **3**, 237–246.
- Birnbaum, Z. W. (1969). On the importance of different components in a multicomponent system, *Multivariate Analysis II* (ed. P. R. Krishnaiah), Academic Press, 581–592.
- Hong, J. S. and Lie, C. H. (1993). Joint reliability-importance of two edges in an undirected network, *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 17–23.
- Jung, G. M., Park, D. H. and Lee, S. M. (2001). Importance analysis for capacitated network system, *International Journal of Reliability and Applications*, **2**, 73–80.
- Kim, C. and Baxter, L. A. (1987). Reliability importance for continuum structure functions, *Journal of Applied Probability*, **24**, 779–785.
- Kyandoghere, K. (1998). A note on: Reliability evaluation of a flow network, *IEEE Transactions on Reliability*, **47**, 44–48.
- Lee, C. H. and Lee, S. M. (2006). An improved method for evaluating network-reliability with variable link-capacities, *The Korean Communications in Statistics*, **13**, 577–585.
- Lee, S. M., Lee, C. H. and Park, D. H. (2004). Sequential capacity determination of subnetworks in network performance analysis, *IEEE Transactions on Reliability*, **54**, 481–486.
- Lee, S. M. and Park, D. H. (2001). An efficient method for evaluation of network-reliability with variable link-capacities, *IEEE Transactions on Reliability*, **50**, 374–379.
- Lee, S. M. and Sim, S. Y. (2007). Component importance for continuum structure functions with underlying binary structures, *The Korean Communications in Statistics*, **14**, 577–582.
- Rai, S. and Soh, S. (1991). A computer approach for reliability evaluation of telecommunication networks with heterogeneous link-capacities, *IEEE Transactions on Reliability*, **40**, 441–451.

Link Importance Measures for Flow Network Systems

Seung Min Lee^{1,a}

^aDepartment of Finance and Information Statistics, Hallym University

Abstract

A network with variable link capacities is considered to be in a functioning state if it can transmit a maximum flow which is greater than or equal to a specified amount of flow. The links are independent and either function or fail with known probability. No flow can be transmitted through a failed link. In this paper, we consider the measures of importance of a link in such networks. We define the structural importance and reliability importance, with respect to capacity, of a link when the required amount of flow is given. We also present the performance importance with respect to capacity. Numerical examples are presented as well for illustrative purpose.

Keywords: Network reliability, performance index, link importance with respect to capacity.

This research was supported by Hallym University Research Fund, 2009(HRF-2009-027) .

¹ Professor, Department of Finance and Information Statistics, Hallym University, Chunchon 200-702, Korea.
E-mail: smlee1@hallym.ac.kr