꼬리가 두꺼운 분포의 고분위수에 대한 준모수적 붓스트랩 신뢰구간

김지현^{1,a}

^a숭실대학교 정보통계보험수리학과

요약

꼬리가 두꺼운 분포의 고분위수에 대한 신뢰구간을 구할 때 적절한 붓스트랩 방법은 무엇인가에 대해 알아보았다. 비모수적 방법과 모수적 방법, 그리고 준모수적 방법의 성능을 모의실험을 통해 비교하였다.

주요용어: 꼬리가 두꺼운 분포, 분계점 초과 방법, 붓스트랩 신뢰구간, 일반화 파레토 분포.

1. 서론

풍속이나 강수량과 같은 기상관측자료와 일별 주식 수익률이나 환율과 같은 금융자료에서 볼 수 있는 공통된 특성은 특별히 큰 값들이 드물지 않게 관측되어 자료들의 분포가 두꺼운 꼬리를 갖는다는 것이다 (긴 꼬리 분포(long-tailed distribution)와 두꺼운 꼬리 분포(heavy-tailed distribution)에 대한 통일된 정의가 아직 정립되지 않았는데, 여기서는 두 종류의 분포를 구분하지 않고, 유한차수의 적분이 존재하지 않는 분포, 즉 $E(|X|^k) = \infty$ 인 k 가 존재하는 분포로 정의한다.). 위험 관리를 위해 이런 자료의 분포의 오른쪽 끝부분 분위수인 고분위수(high quantiles)를 추정하는 것이 중요한데, 두꺼운 꼬리 분포의 고분위수 추정에 대한 연구는 상대적으로 많이 이루어졌으나 추정량의 분산이나 신뢰구간에 대한 연구는 드물다. 왜냐하면 두꺼운 꼬리 분포인 경우 최대가능도추정량(maximum likelihood estimator)의 정규근사가 적용되지 않을 뿐더러, 단순한 비모수적 붓스트랩(naive nonparametric bootstrap) 방법도 적용할 수 없다는 어려움이 있기 때문이다. 본 연구에서 두꺼운 꼬리 분포의 고분위수에 대한 대안적 붓스트랩 신뢰구간을 제안하고 모의실험을 통해 다른 붓스트랩 방법과 성능을 비교하고자 한다.

Athreya (1987)는 모집단의 분산이 존재하지 않는 경우 주어진 표본에서 같은 개수의 표본을 복원으로 재추출하는 단순한 비모수적 붓스트랩은 제대로 작동하지 않는다는 것을 증명하였다. 이 경우의 대안으로, 주어진 표본의 개수보다 작은 수의 표본(subsample)을 재추출하는 붓스트랩 방법에 대한 연구가 이루어졌으나 (Hall과 Jing, 1998) 이 방법은 고분위수와 같이 분포의 꼬리 부분 특성에 대한 추정에는 적절하지 않은 것으로 보인다. 왜냐하면 주어진 표본에서 모집단 분포의 꼬리 부분에 대한 정보는 극히 제한적이며 단순한 표본 재추출을 통해 이를 극복할 수 없기 때문이다.

한편 꼬리가 두꺼운 분포의 고분위수를 추정하기 위한 방법으로 분계점 초과(peaks or exceedances over threshold, 이하 POT라 부르기로 함) 방법이 제안되었는데 (McNeil과 Saladin, 1997), 이 방법은 적절한 분계점을 초과하는 값들의 분포로 일반화 파레토 분포(Generalized Pareto Distribution; GPD)가 좋은 근사분포가 된다는 이론을 근거로 GPD를 적합시켜 그 모수를 추정하고, 추정된 GPD를 이용하여 고분위수와 같은 꼬리 부분의 특성을 추정하는 방법이다. 하지만 이 방법은 꼬리가 두꺼운 분포의 고분위수를 점추정하기 위한 방법으로 제안되었으며, 추정된 고분위수의 정확도(accuracy), 즉 고분위수

¹ (156-743) 서울시 동작구 상도로 369, 숭실대학교 정보통계보험수리학과, 교수. E-mail: jxk61@ssu.ac.kr

의 분산이나 신뢰구간을 추정하기 위한 방법으로 제안되지는 않았다. 본 연구에서는 고분위수의 정확도를 추정하기 위해 분계점을 초과하는 값들로 추정된 GPD를 붓스트랩 표본을 추출하는 데에 부분적으로 이용하는 준모수적(semi-parametric) 붓스트랩 방법을 제안하고, 비모수적 방법이나 모수적 방법에 비해 어떤 성능을 보이는지 모의실험을 통해 알아보려고 한다. 준모수적 붓스트랩 방법에 대한 구체적인 설명은 다음 절에서 하기로 한다.

본 연구에서 제안하는 준모수적 붓스트랩의 아이디어가 새로운 것은 아니다. McNeil과 Frey (2000)가 준모수적 붓스트랩 방법에 해당하는 추출 방법을 제안하였지만, 수 일 후의 수익률(multiple day returns)을 예측하기 위한 방법으로 제안하였을 뿐 분위수의 신뢰구간을 구하는 문제를 다루지는 않았다. Davidson과 Flachaire (2007)도 본 연구의 준모수적 붓스트랩 방법과 유사한 방법을 제안하였지만 추정하고자 하는 모수가 Theil 지수라고 부르는 부의 편중 현상을 나타내는 지수이었다.

한편, 꼬리가 두꺼운 분포의 고분위수에 대한 신뢰구간을 다룬 연구로 Kysely (2010)가 있다. 강수량 분포의 분위수의 신뢰구간을 구하는 방법으로 비모수적 붓스트랩과 모수적 붓스트랩 방법을 비교하였으나 준모수적 붓스트랩 신뢰구간은 비교 대상으로 고려하지 않았다.

2절에서 여러 가지 붓스트랩 표본 추출 방법에 대해 설명하고 성능을 비교하기 위한 판단 기준을 제시한다. 3절에서 모의실험 방법을 설명하고 그 결과를 표와 그래프를 통해 보고한다.

2. 붓스트랩 신뢰구간과 성능 기준

준모수적 붓스트랩을 비롯한 일반적인 붓스트랩 신뢰구간을 구하는 방법을 단계별로 서술하고, 각 단계에서 구체적인 실행방법을 달리함에 따라 다양한 변형이 있을 수 있음을 지적하고자 한다. 먼저 분포함수 F 를 갖는 모집단으로부터 크기 n 인 확률표본 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 을 얻었을 때 F 의 범함수(functional)로 표현할 수 있는 모수 $\tau = t(F)$ 에 대한 신뢰구간을 추정하고자 한다. 이 연구에서 $\tau = F^{-1}(p)$ 이다.

- (1) n 개의 관측값 $X_1, \dots, X_n$ 에서 m 개를 재표집(resampling)하여 붓스트랩 표본(bootstrap sample) $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_m^*)$ 을 구성한다.
- (2) 이 붓스트랩 표본으로부터 추정값 $\hat{\tau}^*$ 을 얻는다.
- (3) 위 두 단계를 B 번 반복하여 얻은 B 개의 추정값 $\hat{\tau}^{*(1)}, \dots, \hat{\tau}^{*(B)}$ 으로부터 τ 에 대한 신뢰구간을 구한다.

단계 (1)에서 특별한 이유가 없는 한 $m = n$ 으로 한다 (꼬리가 두꺼운 분포에서 표본평균과 같은 중심위치의 정확도를 추정하기 위해 n 보다 작은 m 개의 붓스트랩 표본을 추출하는 경우가 있으나 (Hall과 Jing, 1998) 고분위수와 같은 꼬리 부분의 특성을 추정하는 데에는 적절한 방법으로 보이지 않으므로 이 방법은 본 연구의 대상에서 제외한다.). 그리고 재표집하는 방법에 따라 단순 비모수적 방법(naive nonparametric bootstrap), 모수적 방법(parametric bootstrap), 준모수적 방법(semiparametric bootstrap)으로 구분할 수 있다. F_n 을 경험적분포함수(empirical cumulative distribution function)라고 할 때, 단순 비모수적 방법은 F_n 으로부터 확률표본을 추출하는 방법이고, 모수적 방법은 F_θ 로부터 확률표본을 추출하는 방법이다. 모수적 방법은 분포함수가 $F = F_\theta$ 이며 F_θ 의 형태를 모수 θ 를 제외하고 알고 있을 때 쓸 수 있는 방법으로서 θ 의 추정값 $\hat{\theta}$ 는 표본 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 로부터 얻는다.

준모수적 방법에 대해 설명하기 전에 POT 방법을 먼저 소개한다. POT 방법은 적절한 분계점을 초과하는 값들의 분포로 GPD(Generalized Pareto Distribution)가 좋은 근사분포가 된다는 사실을 이용한

다. GPD는 다음과 같은 분포함수를 갖는 분포로 정의한다.

$$G_{\xi\beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), & \xi = 0. \end{cases}$$

이 때 $\beta > 0$ 이고, 받침(support)은 $\xi \geq 0$ 일 때 $y \geq 0$ 이며, $\xi < 0$ 일 때 $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ 이다. 한편, 임의의 확률변수 X 의 분포함수 F 에 대해 분계점(threshold) u 를 초과하는 값의 조건부 분포(excess distribution)를

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2.1)$$

와 같이 정의하자. Pickands (1975)는 분계점 u 가 충분히 크면 모든 $y > 0$ 에 대해 $F_u(y)$ 는 $G_{\xi\beta}(y)$ 에 의해 근사될 수 있다는 것을 다음 식으로 표현하고 증명하였다.

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{y \geq 0} |F_u(y) - G_{\xi\beta(u)}(y)| = 0. \quad (2.2)$$

이 식에서 x_0 는 F 의 받침의 상한으로서 무한대일 수도 있으며, $\beta(u)$ 는 이 식을 만족시키는 β 값이 u 의 값에 따라 가변적이긴 하지만 존재한다는 의미이다. 식 (2.2)는 거의 모든 연속형 분포함수 F 에 대해 성립하는데 F 에 의해 결정되는 ξ 의 값에 따라 분포의 종류를 크게 세 가지로 분류할 수 있다. 먼저 $\xi > 0$ 에 대응하는 분포는 꼬리가 두꺼운 분포로서 Pareto, t , Burr, Cauchy 분포 등이 이에 속하며, $\xi < 0$ 에 대응하는 분포는 꼬리가 짧은 분포로서 베타분포, 균일분포 등이 이에 속한다. $\xi = 0$ 에 대응하는 분포로는 정규분포, 로그정규분포를 들 수 있다. $F_u(y)$ 와 $G_{\xi\beta}(y)$ 의 관계에 관한 자세한 사항은 McNeil과 Saladin (1997)을 참고하면 된다. 식 (2.2)에 함축된 중요한 사실은 우리의 관심이 오른쪽 꼬리 부분에 있을 때, 분포 F 의 종류에 상관없이 (꼬리가 두꺼운 분포이든 아니든 상관없이) GPD가 F 의 근사분포가 된다는 사실이다. 다만 분계점 u 가 어느 정도 커야 하는가가 중요하면서도 까다로운 문제인데, McNeil과 Frey (2000)는 u 를 초과하는 관측값의 수가 50 이상이기만 하면 GPD의 근사 정도가 의 값에 그다지 민감하지 않다는 것을 제한된 모의실험을 통해 보였다. 또한 Begueria (2005)도 강수량 자료를 바탕으로 분계점 값의 변화가 추정에 미치는 영향을 보고했는데, GPD의 모수 추정에는 큰 영향을 주지만 형상모수 ξ 와 척도모수 β 가 같이 변해 고분위수의 추정값에는 그다지 큰 변화가 없음을 발견하였다. 또한 Begueria (2005)는 적절한 분계점 값을 정하기 위한 방법을 제안하였으나 본 연구와 같은 반복적 모의실험에는 적용하기 어렵다. 왜냐하면 여러 그래프나 검정을 통해 적절한 분계점 값을 개별적 자료마다 주관적으로 정해야 하므로 이를 자동화하기 어렵기 때문이다. 본 연구에서 u 는 0.9 표본분위수(sample quantile)로 고정하였다. GPD의 모수 ξ, β 는 R (R Development Core Team, 2008)의 QRmLib package (McNeil, 2007)를 이용하여 추정하였다. 식 (2.1)로부터 $x > u$ 일 때

$$F(x) = (1 - F(u))F_u(x - u) + F(u)$$

이며, 따라서 F_n 을 n 개의 관측값에서 구한 경험적분포함수라고 할 때 분포함수 F 는 식 (2.2)에 의해 $x > u$ 일 때

$$\hat{F}(x) = (1 - F_n(u))G_{\hat{\xi}\hat{\beta}}(x - u) + F_n(u) \quad (2.3)$$

으로 추정할 수 있다.

준모수적 방법은 식 (2.3)의 $\hat{F}$ 을 붓스트랩 표본을 추출하는 데에 쓰는 방법으로서, F_n 으로부터 추출한 하나의 관측값 X_i^* 가 분계점 u 를 초과하지 않으면 그 값을 그대로 붓스트랩 표본으로 쓰고, u 를 초과하면 $G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}$ 로부터 난수 Y 를 하나 생성하여 $X_i^* = u + Y$ 를 붓스트랩 표본으로 쓰는 방법이다. 이 때 일반화 파레토 분포는 표본 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 에서 u 를 초과하는 값들로부터 추정된 분포인데, 결국 비모수적 분포인 F_n 과 모수적 분포인 $G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}$, 두 분포가 결합된 분포에서 붓스트랩 표본을 추출한 셈이므로 준모수적 방법이라 할 수 있다.

단계 (2)는 붓스트랩 표본으로부터 어떻게 분위수를 추정할 것인가에 관한 것인데, 붓스트랩 표본 추출방법의 종류에 상관없이 공통적으로 표본 분위수를 이용하였다. 모수적 붓스트랩 방법의 경우 참 분포(정확하게는 분포족)를 안다고 가정하고 있으므로 $\hat{\tau}^* = F_{\hat{\theta}^*}^{-1}(p)$ 도 분위수의 적당한 추정량으로 고려해 볼 수 있다. 이 때 $\hat{\theta}^*$ 는 붓스트랩 표본으로부터 구한 모수의 추정값이다. 또한 준모수적 붓스트랩 방법의 경우 붓스트랩 표본에 대해 POT 방법을 다시 적용해서 분위수를 추정하는 방법도 고려해 볼 수 있다. 이와 같이 붓스트랩 표본의 추출 방법에 따라 분위수 추정 방법을 다르게 할 수도 있겠지만 단계 (1)에서의 붓스트랩 표본 추출 방법에 대한 비교가 본 연구의 목적이므로 나머지 조건들은 동일하게 두는 것이 좋아 추정량을 표본 분위수 $F_n^{-1}(p)$ 로 통일하였다 (여기서 F_n 는 붓스트랩 표본으로부터 구한 경험적분포함수이다.).

단계 (3)의 제일 간단한 방법은 백분위수 신뢰구간(the percentile interval)이다. 이 방법은 $[\hat{\tau}^*(\alpha/2), \hat{\tau}^*(1 - \alpha/2)]$ 를 τ 의 $1 - \alpha$ 신뢰구간으로 정의하는 방법인데, 이 때 $\hat{\tau}^*(\alpha)$ 는 붓스트랩 분포, 즉 B 개의 추정량 $\hat{\tau}^{*(1)}, \dots, \hat{\tau}^{*(B)}$ 을 모집단으로 간주한 분포의 100α 백분위수이다. 본 모의실험에서 $B = 1000$ 으로 하였다.

Efron (1987)은 백분위수 신뢰구간의 편향을 수정하고 추정량 $\hat{\tau}$ 의 등분산성을 실현하기 위해 편향수정가속(Bias Corrected and accelerated) 붓스트랩 신뢰구간을 제안하고 BCa 신뢰구간이라 명명하였다. 본 연구에서는 비모수적 방법에 백분위수 신뢰구간과 함께 BCa 신뢰구간을 같이 적용하여 보았고 결과에 포함시켰다. 비모수적 방법 중에서 NB1은 백분위수 신뢰구간을 나타내고 NB2는 BCa 신뢰구간을 나타낸다. 준모수적 방법과 모수적 방법에도 BCa 신뢰구간을 적용하는 것이 가능하나 백분위수 신뢰구간과 비교했을 때 더 나은 성능을 보이지 않았으므로 그 결과를 보고하지 않기로 한다.

모의실험을 대략 다음과 같이 실시하였다.

1. 정해진 참 모집단 분포(true population distribution)로부터 크기 n 의 자료를 생성한다.
2. 이 자료에 대해 앞에서 설명한 비모수적 방법과 모수적 방법, 그리고 준모수적 방법을 적용하여 붓스트랩 신뢰구간을 각각 구한다. 이 때 모수적 방법을 적용하기 위해서는 적합 모집단 분포(fitted population distribution)가 필요한데, 세 개의 모수를 통해 다양한 형태의 분포를 표현할 수 있는 일반화극단값(Generalized Extreme Value; GEV) 분포를 적합 모집단 분포로 두었다 (GEV 분포의 정의는 다음 절 참조).
3. 단계 1과 2를 500번 반복하여 얻은 결과로부터 세 방법에 의한 신뢰구간의 성능을 비교한다.

비교하고자 하는 신뢰구간의 종류는 비모수적 붓스트랩 신뢰구간 2개(NB1과 NB2)와 준모수적 붓스트랩 신뢰구간(SB), 그리고 모수적 신뢰구간(PB)으로서 전부 4개이다.

단계 1의 참 모집단 분포로 GEV 분포, 일반화 로지스틱(Generalized Logistic; GLO) 분포, 두 종류의 혼합분포(mixture distribution) 등 총 4가지 경우를 고려하였다. GEV 분포의 경우 참 모집단의 분포와 적합 모집단의 분포가 일치하게 되므로 모수적 붓스트랩 신뢰구간의 성능이 우수할 것으로 예상된다. 다만 비모수적 방법이나 준모수적 방법이 상대적으로 어떤 성능을 보일지에 관심이 있다. 나머지 세 경우는 참 모집단의 분포와 적합 분포가 일치하지 않는 경우인데 각각의 경우 비모수적, 준모수적,

모수적 방법의 성능에 어떤 차이가 있을지가 관심 대상이다. 4가지 경우의 실험 조건에 대한 상세한 설명은 다음 절에서 하기로 하고, 여러 가능한 신뢰구간들의 성능을 비교하기 위한 기준에 대해 알아보자.

신뢰구간의 성능을 판단하는 기준으로 실제신뢰수준(actual confidence level, 실제포함확률(actual coverage probability)이라는 용어를 쓰기도 한다)과 신뢰구간의 길이, 그리고 신뢰구간의 대칭도를 고려하였다. $100(1 - \alpha)\%$ 신뢰구간에서 $1 - \alpha$ 를 명목신뢰수준(nominal confidence level)이라고 하는데, 신뢰구간이 실제로 모수의 참값을 포함하는 확률인 실제신뢰수준은 명목신뢰수준과 다를 수 있다. 일반적으로 실제신뢰수준이 명목신뢰수준보다 작은 과소추정(under-estimation)은 그 반대인 과대추정(over-estimation)보다 더 크게 문제가 된다. 본 모의실험에서는 실제신뢰수준을 500번의 반복 실험으로 추정하였다.

실제신뢰수준이 명목신뢰수준을 보장한다 하더라도 신뢰구간의 길이가 지나치게 길면 곤란하다. 다른 조건이 같다면 신뢰구간의 길이가 짧은 것을 선호하므로 신뢰구간의 길이를 또 다른 성능 기준으로 고려하였다. 마지막으로 고려한 성능 기준은 신뢰구간의 대칭도이다. 붓스트랩 신뢰구간을 $(\hat{\tau}_L^*, \hat{\tau}_U^*)$ 라고 하고 모수의 참값을 τ 라고 할 때, $(\hat{\tau}_U^* - \tau)/(\tau - \hat{\tau}_L^*)$ 는 신뢰구간이 참값을 중심으로 상한과 하한까지의 거리가 얼마나 대칭을 이루고 있는지를 나타낸다. 이 측도는 분모의 값이 0에 가깝게 되면 지나치게 큰 값을 갖게 되므로 $(\hat{\tau}_U^* - \tau)/(\tau - \hat{\tau}_L^*)$ 의 평균이 아닌 중앙값을 대칭도로 정의하고, 모의실험의 반복횟수만큼 얻어지는 500개의 $(\hat{\tau}_U^* - \tau)/(\tau - \hat{\tau}_L^*)$ 값의 표본 중앙값으로 추정하였다. 대칭도의 값이 1에서 멀어질수록 신뢰구간이 한쪽으로 쏠리는 현상이 심하다는 것을 의미하므로, 다른 조건이 같다면 대칭도가 1에 가까운 것이 좋다고 할 수 있다. 추정된 대칭도의 변동을 파악하기 위해 일사분위수와 삼사분위수를 중앙값과 같이 구했다. Kysely (2010)는 신뢰구간의 성능을 비교하는 기준으로 실제신뢰수준만 사용하였다.

3. 모의실험

참 모집단의 분포 종류에 따라 달라지는 총 4개의 조건에서 모의실험을 실시하였는데, 각 조건별로 실험 내용과 결과를 설명한다. 공통적으로 표본 크기 n 은 300, 붓스트랩 표본의 반복추출횟수 B 는 1000, 신뢰구간별 성능 추정을 위한 반복실험횟수는 500으로 고정하였다. 그리고 추정 모수인 분위수 $\tau = F^{-1}(p)$ 에서 p 는 0.99로 고정하였다.

추가로 표본 크기 n 의 값을 100과 500, p 의 값을 0.975와 0.995로 변화시켜가며 실험하였는데, 구체적인 결과는 별도의 파일(http://bayes.ssu.ac.kr/~jhkim/Publication/POTBootstrap_sim_results.txt)에 정리하였으며, 그 전체적인 경향만 본문에 요약하여 보고하였다.

3.1. 모의실험1

첫 번째 모의실험에서 일반화극단값(GEV; Generalized Extreme Value) 분포를 참 모집단과 적합 모집단의 공통 분포로 사용하였다. 일반화극단값 분포 $GEV(\xi, \mu, \sigma)$ 는 분포함수를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right), & \xi \neq 0, \\ \exp\left(-e^{-\frac{x - \mu}{\sigma}}\right), & \xi = 0. \end{cases}$$

위 식에서 $\xi > 0$ 이면 $\mu - (\sigma/\xi)$ 이 받침(support)의 하한이 되고 $\xi < 0$ 이면 상한이 된다. 세 개의 모수(형상모수 ξ , 위치모수 μ , 척도모수 σ)를 이용하여 매우 다양한 형태를 표현할 수 있는 일반화극단값 분포

그림 1: 형상모수 ξ 의 변화에 따른 $GEV(\xi, \mu = 30, \sigma = 10)$ 분포의 확률밀도 함수

는 ‘표준화시킨 최대값의 유일한 비퇴화 극한분포(the only possible nondegenerate limiting distributions for normalized maxima)’라는 성질을 갖고 있으나 (McNeil 등, 2005, 7.1절 참조), 본 연구에서는 단지 $\xi > 0$ 일 때 오른쪽 꼬리가 두꺼운 융통성 있는 분포라는 이유로 사용하였다. ξ 의 값이 커질수록 꼬리의 두꺼운 정도가 커지는데, $0 < \xi < 1$ 일 때 평균은 $\mu + \sigma(g_1 - 1)/\xi$ 이며, $\xi \geq 1$ 이면 평균이 무한대가 된다. 또한 $0 < \xi < 0.5$ 일 때 분산은 $\sigma^2(g_2 - g_1^2)/\xi^2$ 이며, $\xi \geq 0.5$ 이면 분산이 무한대가 된다. 이 때 $g_k = \Gamma(1 - k\xi)$ 이다. $\xi \neq 0$ 일 때, 분위수함수(quantile function)는 $q(F) = \mu - \sigma(1 - (-\ln F)^{-\xi})/\xi$ 이다.

Kysely (2010)는 실제 일일 최대 강수량 자료를 근거로 $GEV(\xi, 30, 10)$, $\xi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 를 모의 실험에서 사용하였다. 본 연구에서는 분산이 존재하지 않을 정도의 두꺼운 꼬리를 갖는 $\xi = 0.5$ 의 경우를 추가적으로 고려하였다. 그림 1에서 Gumbel 분포라고도 부르는 $\xi = 0$ 인 경우를 기준으로 ξ 가 0.1, 0.3, 0.5일 때를 같이 그려 비교해 보았다. 형상모수인 ξ 값이 커질수록 오른쪽 꼬리가 두꺼워지는 것을 알 수 있다.

모의실험1에서는 참 분포와 적합 분포 모두 같은 GEV 분포이므로 모수적 붓스트랩 신뢰구간이 가장 이상적인 방법이 된다. 이 실험의 목적은 비모수적 방법과 준모수적 방법이 모수적 방법에 얼마나 가까운 성능을 보이는가를 확인하고자 하는 데에 있다.

모의실험1의 결과를 표 1에 나타내었다. 이 중에서 성능의 첫 번째 기준인 실제신뢰수준에 대한 결과를 먼저 보고한다. 이상적 신뢰구간에서는 실제신뢰수준이 명목 신뢰수준보다 작지 않아야 하겠지만, 모의실험을 통해 우리가 알 수 있는 것은 실제신뢰수준의 추정값이므로 이상적 신뢰구간의 요구 조건을 만족하는가를 판단하기 위해서는 추정에 따른 오차를 고려해야 한다. 실제신뢰수준의 추정값을 $\hat{p}_a$ 라고 할 때 오차의 한계는 대략 표준오차의 두 배인 $2\sqrt{\hat{p}_a(1 - \hat{p}_a)/500}$ 이다. $\hat{p}_a$ 가 0.9일 때 오차의 한계는 약 0.03이고 0.95일 때 0.02이므로, 90% 신뢰구간일 때는 실제신뢰수준의 추정값이 0.87에서 0.93, 95% 신뢰구간일 때는 0.93에서 0.97 사이이면 크게 문제가 없는 것으로 판단할 수 있다. 신뢰구간별로 쉽게 비교할 수 있게 하기 위해 표 1의 90% 신뢰구간에 대한 결과를 그림 2로 나타내었다. 모수적 붓스트랩(PB) 신뢰구간의 경우 명목신뢰수준을 보장하지만 다소 보수적인 경향이 있으며 꼬리가 두꺼울수록 그 경향이 커짐을 알 수 있다. 준모수적 붓스트랩(SB) 신뢰구간의 경우 다소 과소추정하는 경향이 있으나 비모수적 붓스트랩(NB) 신뢰구간보다는 명목신뢰수준에 훨씬 가까운 것을 알 수 있다.

표 1: 모의 실험1

ξ	성능기준	90% 신뢰구간				95% 신뢰구간			
		NB1	NB2	SB	PB	NB1	NB2	SB	PB
0.1	실제신뢰수준	0.77	0.776	0.886	0.922	0.79	0.934	0.932	0.972
	신뢰구간길이	25.5	25.7	28.7	27.2	28.6	45.4	34.9	32.8
	(표준오차)	(0.57)	(0.62)	(0.39)	(0.24)	(0.62)	(1.24)	(0.5)	(0.3)
	대칭도	0.66	0.71	0.72	0.81	0.64	1.67	0.9	0.97
	(일사분위수)	(0.05)	(0.07)	(0.32)	(0.38)	(0.11)	(0.9)	(0.49)	(0.51)
	(삼사분위수)	(1.53)	(1.72)	(1.52)	(1.47)	(1.38)	(3.21)	(1.7)	(1.62)
0.2	실제신뢰수준	0.798	0.804	0.876	0.932	0.808	0.954	0.926	0.962
	신뢰구간길이	40.2	40.2	43.9	43.5	44.4	76.3	53.6	52.8
	(표준오차)	(0.97)	(0.99)	(0.64)	(0.44)	(1.06)	(2.21)	(0.8)	(0.54)
	대칭도	0.81	0.93	0.86	0.97	0.75	2.11	1.06	1.14
	(일사분위수)	(0.12)	(0.15)	(0.33)	(0.46)	(0.15)	(0.95)	(0.51)	(0.62)
	(삼사분위수)	(1.79)	(2.07)	(1.63)	(1.74)	(1.6)	(4.19)	(1.83)	(1.87)
0.3	실제신뢰수준	0.81	0.806	0.878	0.942	0.818	0.946	0.924	0.976
	신뢰구간길이	69.9	70.9	67.9	69.6	79.7	140	83.6	85.2
	(표준오차)	(2.05)	(2.12)	(1.17)	(0.77)	(2.55)	(5.74)	(1.49)	(0.96)
	대칭도	0.89	1.03	0.9	1.08	0.86	2.33	1.13	1.26
	(일사분위수)	(0.15)	(0.18)	(0.28)	(0.51)	(0.16)	(1.03)	(0.47)	(0.68)
	(삼사분위수)	(2.22)	(2.53)	(1.65)	(1.88)	(2.13)	(4.73)	(1.92)	(2.05)
0.4	실제신뢰수준	0.79	0.792	0.852	0.966	0.816	0.93	0.932	0.982
	신뢰구간길이	109	116	102	114	126	255	127	140
	(표준오차)	(3.27)	(4.85)	(1.94)	(1.44)	(4.34)	(19.46)	(2.54)	(1.81)
	대칭도	0.86	0.96	0.81	1.19	0.86	2.44	1.03	1.46
	(일사분위수)	(0.1)	(0.12)	(0.23)	(0.56)	(0.18)	(0.98)	(0.42)	(0.82)
	(삼사분위수)	(2.18)	(2.65)	(1.76)	(2.34)	(2.26)	(5.22)	(2.11)	(2.61)
0.5	실제신뢰수준	0.776	0.786	0.852	0.968	0.812	0.948	0.922	0.992
	신뢰구간길이	180	193	156	176	203	459	195	220
	(표준오차)	(6.46)	(7.75)	(3.07)	(2.24)	(7.36)	(25.83)	(4.01)	(2.86)
	대칭도	0.84	1.01	0.72	1.23	0.95	2.94	0.98	1.54
	(일사분위수)	(0.09)	(0.11)	(0.2)	(0.61)	(0.18)	(1.09)	(0.38)	(0.85)
	(삼사분위수)	(2.65)	(3.1)	(1.8)	(2.22)	(2.36)	(6.8)	(2.1)	(2.56)

그림 2: 모의 실험1: 명목신뢰수준이 0.9일 때 신뢰구간별 실제신뢰수준

그림 3: 모의실험1: 명목신뢰수준이 0.9일 때 신뢰구간별 길이

표 1의 90% 신뢰구간의 길이에 대한 결과를 그림 3에 나타내었다. 평균 길이를 점으로 표시하고 오차의 한계만큼 위 아래로 연장선을 그어서 신뢰구간별로 유의한 차이를 쉽게 판단할 수 있도록 하였다. 그림 3을 보면 모집단 분포의 꼬리가 두꺼울 때 ($\xi = 0.3, 0.5$ 일 때) SB의 길이가 NB1이나 NB2보다 더 짧으면서도 실제신뢰수준이 명목신뢰수준에 가깝게 더 커서 준모수적 방법이 비모수적 방법보다 확실히 더 우수함을 알 수 있다 ($\xi = 0.1$ 일 때 NB의 길이가 SB의 길이보다 짧지만 NB의 실제신뢰수준이 SB와 달리 명목신뢰수준보다 유의하게 작으므로 길이가 짧은 것은 당연하다. 이와 같이 길이를 비교할 때 실제신뢰수준이 명목신뢰수준을 보장하지 못하는 신뢰구간은 비교 대상에서 제외하거나 조심해야 한다.). 대칭도에서는 NB2의 변동이 조금 커 보이는 것 외에는 신뢰구간별로 큰 차이를 보이지 않았다 (그림 4에서 대칭도의 차이를 변동성과 함께 비교할 수 있도록 중앙값으로부터 일사분위수와 삼사분위수까지 각각 연결하였다.).

그림으로 나타내지는 않았지만 95% 신뢰구간의 경우에도 비슷한 결과를 관찰할 수 있는데, 다만 NB2의 경우 명목신뢰수준이 0.9일 때와는 달리 실제신뢰수준(엄밀히 말하면 실제신뢰수준의 추정값)이 명목신뢰수준에 가까워지긴 하지만, SB나 PB와 비교했을 때 신뢰구간의 길이가 지나치게 길고 대칭도의 변동이 심해 적절한 방법이 아니라는 점에서 앞의 결과와 다르지 않다.

표본 크기 n 의 값을 500으로 크게 해서 실험하였는데 지면 관계상 별도의 파일에 기록하였다. 표본의 크기가 커지면 전반적으로 성능이 나아지지만 특히 SB의 성능이 더 좋아져서 PB와 비슷하거나 더 나은 성능을 보였다. PB의 실제신뢰수준이 명목신뢰수준보다 높은 과대추정(보수적) 경향과 NB의 과소추정 경향은 여전했다. 반면에 표본 크기가 100으로서 더 작아지면 실제신뢰수준의 경우 전반적으로 명목신뢰수준보다 작아 과소추정하게 되는데 SB는 NB보다 과소추정의 정도가 덜 하고 PB보다는 심한 경향을 보였다.

더 높은 고분위수인 0.995 분위수 추정에도 실험하였는데, PB의 성능에는 별 변화가 없으나 NB와 SB의 성능은 조금 떨어진다. 하지만 SB가 NB보다 나은 성능을 보인다는 점은 같았다. 0.975 분위수 추정의 경우 NB와 SB의 성능이 전반적으로 더 나아져서 실제신뢰수준의 과소추정 문제가 완

그림 4: 모의실험1: 명목신뢰수준이 0.9일 때 신뢰구간별 대칭도

화되거나 없어졌다. 그렇지만 길이와 대칭도를 같이 고려하면 SB가 NB보다 조금 더 나은 성능을 보였다. PB의 경우 실제신뢰수준의 과대추정 경향은 0.99 분위수 추정 때와 마찬가지로 그대로였다.

3.2. 모의실험2

두 번째 모의실험에서는 참 분포와 적합 분포를 다르게 하여 실험하였다. Kysely (2010)에 따르면 일반화로지스틱(GLO) 분포가 일반화극단값(GEV) 분포와 함께 강수량 자료에 대한 분포로 자주 쓰인다고 한다. $GLO(\xi, \mu, \sigma)$ 분포의 분포함수는 다음과 같이 정의된다.

$$F(x) = \begin{cases} 1 / \left(1 + \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right), & \xi \neq 0, \\ \frac{1}{1 + e^{-\frac{x - \mu}{\sigma}}}, & \xi = 0. \end{cases}$$

이 때 $\xi > 0$ 이면 $\mu - (\sigma/\xi)$ 이 받침(support)의 하한이 된다. 두 번째 모의실험에서는 Kysely (2010)의 모의실험과 같이 참 분포를 $GLO(0.4, 42, 15)$ 로 하였다. 이 분포로부터 크기 300의 표본을 추출하고, 모수적 붓스트랩 신뢰구간을 구할 때 GEV 분포를 적합 분포로 하였다. 500번의 반복 실험 중에서 한번의 자료에 대한 그림을 그림 5에 나타냈는데, 표본에 따른 오차를 고려할 때 두 분포가 구분하기 어려울 정도로 유사함을 알 수 있다. 두 번째 모의실험을 통해 여전히 모수적 붓스트랩 신뢰구간이 더 나은 성능을 보이는지, 그리고 준모수적 신뢰구간은 상대적으로 어떤 성능을 보이는지를 살펴보고자 한다.

두 번째 모의실험의 결과를 표 2에 나타내고, 세 가지 성능기준을 비교하기 쉽게 90% 신뢰구간에 대한 결과를 그림 6으로 표현하였다. PB는 실제신뢰수준이 명목신뢰수준을 보장하면서도 NB나 SB보다 오히려 짧다. 참 분포와 적합 분포가 다름에도 불구하고 모수적 방법인 PB가 더 나은 성능을 보이는 이유는 그림 5와 같이 GLO 분포가 GEV 분포와 유사하기 때문인 것으로 판단된다. 그리고, 모의실험1과 같이 SB가 NB보다 모든 기준에서 더 나은 결과를 보였다.

그림 5: 모의실험2: 참 분포와 적합 분포의 .99 분위수는 각각 203.5와 210.6

표 2: 모의실험2

성능기준	90% 신뢰구간				95% 신뢰구간			
	NB1	NB2	SB	PB	NB1	NB2	SB	PB
실제신뢰수준	0.782	0.784	0.864	0.904	0.806	0.95	0.916	0.964
신뢰구간길이	131	136	123	108	149	308	152	132
(표준오차)	(4.36)	(4.71)	(2.26)	(1.26)	(5.11)	(21.08)	(2.92)	(1.58)
대칭도	0.77	0.85	0.9	0.7	0.81	2.67	1.09	0.9
(일사분위수)	(0.1)	(0.1)	(0.22)	(0.24)	(0.16)	(1.09)	(0.4)	(0.42)
(삼사분위수)	(2.33)	(2.45)	(1.78)	(1.35)	(2.16)	(6.02)	(1.98)	(1.55)

그림 6: 모의실험2: 명목신뢰수준이 0.9일 때 신뢰구간별 성능 비교

그림 7: 모의실험3: 참 분포와 적합 분포의 .99 분위수는 각각 126과 141

표 3: 모의실험3

성능기준	90% 신뢰구간				95% 신뢰구간			
	NB1	NB2	SB	PB	NB1	NB2	SB	PB
실제신뢰수준	0.784	0.776	0.854	0.844	0.806	0.932	0.91	0.91
신뢰구간길이	73.3	75.8	67.3	52	83.5	155	83.3	63.3
(표준오차)	(2.54)	(2.95)	(1.26)	(0.60)	(3.17)	(6.98)	(1.63)	(0.74)
대칭도	0.95	1.01	0.84	0.57	0.98	2.52	1.05	0.74
(일사분위수)	(0.06)	(0.05)	(0.25)	(0.14)	(0.11)	(0.98)	(0.43)	(0.3)
(삼사분위수)	(2.31)	(2.79)	(1.79)	(1.26)	(2.28)	(5.53)	(2.10)	(1.46)

95% 신뢰구간에 대한 결과는 90% 신뢰구간과 대체로 같으나 NB2의 실제신뢰수준이 명목신뢰수준을 보장한다는 점이 다르다. 하지만 그 길이가 다른 신뢰구간에 비해 지나치게 길고 대칭도에서 불안정한 결과를 보여 선호될 수 없는 방법인 점에서 90% 신뢰구간의 결과와 다르지 않았다.

3.3. 모의실험3

참 분포와 적합 분포가 일치하지 않더라도 유사한 분포라면 모수적 방법인 PB의 성능이 비모수적 방법이나 준모수적 방법보다 더 나은 성능을 보인다는 것을 모의실험2를 통해 알 수 있었다. 세 번째 모의실험에서는 Kysely (2010)에서와 같이 참 분포가 두 모집단의 혼합분포(mixture distribution)일 때의 경우를 살펴보았다. 모의실험3에서 참 분포는 $GEV(0.1, 30, 10)$ 와 $GLO(0.4, 45, 12)$ 의 혼합분포이지만 모집단의 분포를 GEV 분포로 잘못 가정하고 적합 분포로 사용했을 때의 상황을 실험하였다. 참 분포인 $0.75 * GEV(0.1, 30, 10) + 0.25 * GLO(0.4, 45, 12)$ 는 관측값 4개 중에서 1개가 꼬리가 더 두꺼운 분포에서 나온 경우를 가정한 것이다. 그림 7에 참 분포와 적합 분포를 같이 그려 보았다. 표본에 따라 적합 분포의 모양이 조금씩 달라지지만 모의실험2의 경우보다는 참 분포와 적합 분포의 차이가 조금 더 커지는 경향이 있다.

표 3과 그림 8의 결과를 요약해 보면, 모의실험1과 2에 비교했을 때 SB의 경쟁력이 다소 높아졌다고 할 수 있다. 모든 신뢰구간의 실제신뢰수준이 명목신뢰수준을 밑돌아 만족스러운 방법이 없기는 하지만 SB와 PB가 그 중 나은 성능을 보이며 그 중에서도 PB의 길이가 더 짧다. 여기에 보고하지 않은

그림 8: 모의실험3: 명목신뢰수준이 0.9일 때 신뢰구간별 성능 비교

그림 9: 모의실험4: 참 분포와 적합 분포의 .99 분위수는 각각 87.7, 121

$n = 500$ 일 때의 결과를 보면 SB가 PB보다 더 나은 성능을 보였다. $n = 500$ 일 때 SB의 실제신뢰수준은 표본오차 내에서 명목신뢰수준을 보장하지만 PB를 포함한 나머지 방법들은 실제신뢰수준이 명목신뢰수준보다 유의하게 작았다.

적합 분포가 참 분포와 다를 경우 모수적 방법인 PB의 성능이 떨어져 적절한 방법이 될 수 없을 것이라고 예상했으나 모의실험2나 3과 같이 두 분포가 크게 차이 나지 않고 표본의 크기가 아주 크지 않으면 상대적으로 나쁘지 않은 성능을 보인다는 사실을 알 수 있었다. 그렇다면 과연 두 분포의 차이가 극명하게 커질 경우 모수적 방법의 성능이 얼마나 떨어지며 SB의 성능은 변함없이 유지될 것인가를 확인하기 위해 모의실험4를 실시하였다.

표 4: 모의실험4

성능기준	90% 신뢰구간				95% 신뢰구간			
	NB1	NB2	SB	PB	NB1	NB2	SB	PB
실제신뢰수준	0.784	0.78	0.852	0.604	0.798	0.932	0.92	0.78
신뢰구간길이	30.7	31.5	30.5	60.1	35.9	68.9	37.5	73.7
(표준오차)	(0.91)	(0.97)	(0.56)	(0.65)	(1.77)	(3.44)	(0.71)	(0.81)
대칭도	0.73	0.8	0.85	4.68	0.72	2.22	1.05	7.47
(일사분위수)	(0.12)	(0.12)	(0.3)	(-13.63)	(0.14)	(0.95)	(0.48)	(2.61)
(삼사분위수)	(2.01)	(2.4)	(1.69)	(14.3)	(1.99)	(4.99)	(1.94)	(16.38)

그림 10: 모의실험4: 명목신뢰수준이 0.9일 때 신뢰구간별 성능 비교

3.4. 모의실험4

GEV 분포는 세 개의 모수의 값에 따라 다양한 형태의 분포를 나타낼 수 있어 모집단의 참분포가 단봉분포(unimodal distribution)라면 적합분포로 GEV 분포를 가정한 PB의 성능이 나쁘지 않음을 앞의 모의실험을 통해 알 수 있었다. 마지막 모의실험에서는 그림 9과 같은 이봉분포를 갖는 모집단에 적합분포로 단봉분포인 GEV 분포를 가정하였다. 이봉분포가 참 분포일 때 단봉분포를 가정한다는 것이 비현실적이지만, 이 실험의 목적은 모수적 방법의 성능이 극단적인 경우에 얼마나 나빠질 수 있으며 SB는 모집단의 참 분포의 모양에 상관없이 얼마나 안정된 결과를 보이는가를 확인하고자 함에 있다.

표 4와 그림 10에서 알 수 있듯이 모수적 방법은 전혀 쓸 수 없는 방법인 반면, SB는 만족스럽지는 않지만 앞의 다른 모의실험들에서와 마찬가지로 참 분포의 모양에 민감하지 않고 안정적인 결과를 보여준다. 95% 신뢰구간일 때 NB2의 실제신뢰수준이 명목신뢰수준에 조금 더 가깝지만 길이나 대칭도를 보면 SB보다 나은 방법이라고 할 수 없다.

4. 결론

모집단 분포의 꼬리가 두꺼울 때 고분위수의 추정량의 정확도를 추정하기 위한 적절한 붓스트랩 방법은 무엇인가를 모의실험을 통해 알아보았다. 준모수적 붓스트랩 방법에 의한 신뢰구간이 다른 문제

에서 쓰인 적은 있지만 고분위수 추정량의 정확도를 목적으로 쓰인 적은 없는데, 이 방법을 중심으로 비모수적 붓스트랩 신뢰구간과 모수적 붓스트랩 신뢰구간을 비교하여 보았다.

꼬리가 두꺼운 분포인 경우 평균의 정확도를 추정하고자 할 때 비모수적 붓스트랩 방법은 적절한 방법이 아님이 알려져 있는데, 고분위수 추정에서도 마찬가지로 실제신뢰수준이 명목신뢰수준에 미치지 못하는 문제를 안고 있다는 것을 본 연구를 통해 알 수 있었다. 모수적 방법은 적합 분포가 참 분포와 일치하거나 유사한 경우 세 방법 중에서 가장 나은 성능을 보였으나 참 분포에 대한 정보 부족으로 잘못된 적합 분포를 가정하는 경우 성능에 심각한 문제가 생길 수 있음을 구체적으로 확인할 수 있었다. 비모수적 방법과 모수적 방법 두 가지만 비교한 Kysely (2010)의 연구에서도 모수적 방법의 우수성을 보고한 바 있다.

준모수적 방법은 적합 분포를 가정하지 않는다는 점에서 비모수적 방법의 특성을 가지면서, 모수적 분포인 GPD에서 붓스트랩 표본을 일부 추출한다는 점에서 모수적 방법의 특성도 동시에 갖고 있다. 성능 비교에서도 항상 비모수적 방법보다는 나은 결과를 보였으며, 모수적 방법과 달리 참 분포의 종류에 민감하지 않고 안정된 결과를 보여 대안적 방법이 될 수 있는 가능성을 보였으나 한계도 있다. 우선 실제신뢰수준이 명목신뢰수준에 미치지 못하는 경우가 있었으며, 방법의 특성상 표본의 크기가 커야 한다는 제한이 있다. 본 모의실험에서와 같이 분계점 u 를 표본의 0.9 분위수로 정한다면 표본의 크기가 300 이상은 되어야 GPD의 모수 추정에 쓸 수 있는 표본 크기가 30 이상이 된다. GPD의 모수 추정에 쓰이는 표본의 크기가 작아지면 추정 결과가 분계점의 선택에 민감해져 준모수적 방법의 성능이 불안정해질 위험이 있다. 반면 모수적 방법은 작은 표본 크기에도 적용할 수 있다는 장점이 있다. 결론적으로 표본 크기가 크지 않고 적합 분포가 참 분포와 크게 다르지 않다는 확신이 있으면 모수적 방법이 권장되며, 표본 크기가 충분히 크다면 준모수적 방법도 같이 적용해 모수적 방법과 비교해 보는 것이 좋을 것이다. 비모수적 방법은 꼬리가 두꺼운 분포의 경우 표본 크기가 클 때에도 적용할 수 없는 방법이다.

참고 문헌

- Athreya, K. B. (1987). Bootstrap of the mean in the infinite variance case, *The Annals of Statistics*, **15**, 724–731.
- Beguieria, S. (2005). Uncertainties in partial duration series modelling of extremes related to the choice of the threshold value, *Journal of Hydrology*, **303**, 215–230.
- Davidson, R. and Flachaire, E. (2007). Asymptotic and bootstrap inference for inequality and poverty measures, *Journal of Economics*, **141**, 141–166.
- Efron, B. (1987). Better bootstrap confidence intervals. (with discussion.), *Journal of American Statistical Association*, **82**, 171–200.
- Hall, P. and Jing, B. (1998). Comparison of bootstrap and asymptotic approximations to the distribution of a heavy-tailed mean, *Statistica Sinica*, **8**, 887–906.
- Kysely, J. (2010). Coverage probability of bootstrap confidence intervals in heavy-tailed frequency models, with application to precipitation data, *Theoretical and Applied Climatology*, **101**, 345–361.
- McNeil, A. (2007). For S-Plus original; R port by Scott Ulman, QRMLib R package version 1.4.2. <http://www.ma.hw.ac.uk/~mcneil/book/index.html>.
- McNeil, A. and Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach, *Journal of Empirical Finance*, **7**, 271–300.
- McNeil, A., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press.
- McNeil, A. and Saladin, T. (1997). The peaks over thresholds method for estimating high quantiles of loss distributions, *Proceedings of 28th International ASTIN Colloquium*.

- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics, *Annals of Statistics*, **3**, 119–131.
- R Development Core Team (2008). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.

2011년 8월 접수; 2011년 10월 채택

Semi-parametric Bootstrap Confidence Intervals for High-Quantiles of Heavy-Tailed Distributions

Ji-Hyun Kim^{1,a}

^aDepartment of Statistics and Actuarial Science, Soongsil University

Abstract

We consider bootstrap confidence intervals for high quantiles of heavy-tailed distribution. A semi-parametric method is compared with the non-parametric and the parametric method through simulation study.

Keywords: Heavy-tailed distribution, peaks-over-threshold method, bootstrap confidence interval, generalized Pareto distribution.

¹ Professor, Department of Statistics and Actuarial Science, Soongsil University, Sangdo-Ro 369, Dongjak-Gu, Seoul 156-743, Korea. E-mail: jxk61@ssu.ac.kr