스텝 하중을 받는 공간 트러스 시스템의 멀티스텝 테일러 급수 해석과 동적 불안정

Dynamic Instability and Multi-step Taylor Series Analysis for Space Truss System under Step Excitation

이 승 재¹⁾

Lee, Seung Jae

손 수 덕²⁾

Shon, Su Deok

요약 : 본 연구의 목적은 비선형 불연속 시스템인 공간 트러스에 멀티스텝 테일러 해법을 적용하는 것과 비선형 동적 응답 및 불안정 특성을 분석하는 것이다. 해석적 접근에 기초한 보다 정밀한 해는 공간 구조물의 역 문제나 또는 불안정 문제를 다루는데 매우 필요하며, 이는 지배방정식의 비선형성에 기인한다. 따라서 기하학적 비선형을 고려하여 지배 운동 방정식을 유도하였으며, 테일러 해법을 이용하여 정밀한 해석적 해를 구하였다. 해석 방법의 정밀도 검증을 위해서 단일자유도 모델을 채택하였으며, 테일러 해법을 이용한 결과를 4차 룬게-쿠타 법과 비교하였다. 또한, 스텝 하중을 받는 모델의 동적 불안정과 좌굴 특성을 고찰하였다. 두 해석 방법의 비교 결과는 매우 잘 일치하였고, 동적 응답과 위상공간에서의 끌개는 스텝하중 아래에서의 동적 좌굴 현상과, 모델에 감쇠가 미치는 영향을 잘 설명할 수 있음을 보여주었다. 해석 결과에서 비감쇠 시스템과 감쇠 시스템의 동적 좌굴 하중 레벨은 각각 정적 좌굴 하중 레벨의 약 77%와 83%의 범위로 나타났다.

ABSTRACT : The goal of this paper is to apply the multi-step Taylor method to a space truss, a non-linear discrete dynamic system, and analyze the non-linear dynamic response and unstable behavior of the structures. The accurate solution based on an analytical approach is needed to deal with the inverse problem, or the dynamic instability of a space truss, because the governing equation has geometrical non-linearity. Therefore, the governing motion equations of the space truss were formulated by considering non-linearity, where an accurate analytical solution could be obtained using the Taylor method. To verify the accuracy of the applied method, an SDOF model was adopted, and the analysis using the Taylor method was compared with the result of the 4th order Runge-Kutta method. Moreover, the dynamic instability and buckling characteristics of the adopted model under step excitation was investigated. The result of the comparison between the two methods of analysis was well matched, and the investigation shows that the dynamic response and the attractors in the phase space can also delineate dynamic snapping under step excitation, and damping affects the displacement of the truss. The analysis shows that dynamic buckling occurs at approximately 77% and 83% of the static buckling in the undamped and damped systems, respectively.

핵심용어 : 멀티스텝 테일러 해법, 해석적 해, 공간 트러스, 동적 불안정, 기하학적 비선형성

KEYWORDS : multi-step taylor series, analytical solution, space truss, dynamic instability, geometrical nonlinearity

1. 서론

구조안정문제는 주로 셸이나 아치와 같은 연속체 시스템을 대상으로 정적 또는 동적 좌굴 현상에 대한 임계하중을 다루는 연구가 많이 수행되었으며, 불연속 시스템인 공간 트러스 구조물에서도 셸과 같이 곡률을 이용하여 공간을 형성하고자

하는 경우에는 정적 혹은 동적 불안정에 대한 검토가 반드시 수행되어야 한다. 트러스 시스템은 고전적인 교량구조에서부터 격자 셸 구조 더 나아가 전개식 구조물에 이르기까지 다양한 구조시스템에 적용되어 왔으며, 미래에도 많은 가능성을 가지고 있다. 그 이유는 불연속 부재로 구성되므로 비교적 적은 부피로도 대공간을 형성할 수 있기 때문이다. 따라서, 셸

1) 한국기술교육대학교 건축공학부 교수, 공학박사(leeseung@kut.ac.kr)

2) 교신저자, 한국기술교육대학교 건축공학부 연구교수, 공학박사

(Tel: 041-560-1334, Fax: 041-560-1224, E-mail: sdshon@kut.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2012년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

의 형상과 같은 공간 트러스에 대한 불안정에 관한 연구는 정적 시스템이나 동적 시스템에 대한 비선형성을 고려한 해석적 연구 및 불안정성을 판단하거나 정성적 해석 등의 연구가 많이 진행되었다(Papadrakakis, 1981; Coan 과 Plaut, 1983; Kassimali 와 Bidhendi, 1988; Hill 등, 1989; Kim, 1990; Choong 과 Hangai, 1993; Kim 등, 1995; Tada 와 Suito, 1998; Ario, 2004).

구조 불안정 문제에 대한 공간 트러스 시스템의 연구는 주로 정적 하중 아래에서의 임계 좌굴하중이 많이 연구 되었으며, 동적 거동에 관한 연구로는 Kassimali 와 Bidhendi (1988)가 대 변위를 고려한 안정문제에 관해 연구를 수행하였고, Tada 와 Suito (1998)는 이산화 압축 부재의 진동모형을 이용하여 정적 및 동적 좌굴 후 거동의 특성을 연구하였다. 그리고 Kim 등 (1997)은 그의 얇은 형상의 트러스 구조물에 대한 동적 좌굴의 연구에서 감쇠정수를 고려하여 문헌을 발표하였으며, 직접좌굴(direct snapping)보다 간접좌굴(indirect snapping)이 감쇠 시스템에 더 민감함을 설명하였다. 그 외 동적 해석에 대해서는 감쇠 기법(reduction technique)에 대한 연구도 수행되었다.(Coan 과 Plaut, 1983; Slaats 등, 1995) 국내에서도 공간 구조물의 불안정 문제에 관해서 연구가 많이 진행 되었으며, 정적 불안정 문제에 대해서 정환목 등 (1993)은 좌굴의 영향을 연속체 문제로 치환하는 연구, 편접합에 대한 좌굴거동을 다룬 권택진 등 (1997)의 문헌을 비롯하여 많은 연구가 진행되었으며(김진기와 한상을, 1998; 김승덕, 2002; 이경수와 한상을, 2009; 손수덕 등, 2011), 동적문제에 관련된 연구는 한상을 등(1999)의 연구와 김두리 등(2009)의 동적응답에 대한 위상공간 고찰과 스펙트럼 등을 이용한 불안정 특성과 임계하중 연구가 수행 되었다. 그러나 연속체 시스템과는 달리 불연속 구조물이 주는 복잡함 때문에 공간 트러스의 비선형 응답해석이나 동적 안정에 관한 해석적 해의 연구는 많지 않다. 특히, 카오스와 같은 동적 불안정 문제를 다루기 위해서는 비선형 운동 방정식의 정해나 매우 정밀도 높은 해를 구하여야만 하며, 주기 궤적의 변화와 특성을 관찰하여 불안정성을 판단할 필요가 있다. 그러나 외부 가진(excitation)이 주어진 비선형 운동방정식의 정해나 해석적 해를 구하는 것은 쉬운 일이 아니며, 주로 수치해석기법을 많이 사용한다.

수치적 기법과는 달리 비선형 미분 방정식에 대한 정해나 근사 해석적 해를 구하기 위한 기법은 지금도 많이 연구되고 있으며(Sadighi 등, 2007), 해석적(analytical) 또는 준해석적(semi-analytical) 기법으로는 고전적인 맥급수 해법(Barrio, 2005; Barrio 등, 2005)을 비롯하여 아도미안 분해법(Adomian 과 Rach, 1992; Adomian 과 Rach,

1996), 최근에는 등위상 섭동법(He, 2003; He, 2005; Chowdhury 등, 2009) 등이 개발되었다. 이러한 기법들 중에서 가장 긴 역사를 가지고 있는 테일러 급수 해법은 매우 안정으로 해석적 해를 제공한다. 최근 Barrio 등 (2005)은 그의 연구에서 테일러 기법의 장점 중 하나로 가변 차수(variable-order) 및 가변 스텝(variable-stepsizes) 기법으로 쉽게 공식화 되는 것과, 정밀도 높은 해석적 해가 필요한 많은 동적 시스템에 유용함을 설명했다. 또한, 오차의 한계 계산이 가능하므로 해에 대한 충분한 확신을 가질 수 있다는 장점과, 항의 수 및 오차한계를 적절히 조절하여 계산하면 매우 빠른 시간에 매우 정밀한 해를 얻을 수 있다는 것이 보고되었다.(Barrio, 2005) 이와 같은 준해석적 또는 해석적 해석방법의 발달은 기존의 비선형 동역학에 대한 카오스 현상의 규명과 시스템 동정에 관한 연구에 많은 영향을 미치고 있으며, 복잡한 비선형 모델의 정밀한 해를 제공하는데 큰 역할을 하고 있다.

본 연구에서는 공간 트러스의 비선형 동적 시스템에 대한 멀티스텝 테일러 급수 해법의 적용과 스텝 하중에 따른 구조물의 동적 응답의 비선형 불안정 거동의 특성을 연구 하도록 한다. 일반적으로 얇은 아치나 돔형 공간 트러스의 경우 많은 연구에서 비선형 동적 응답은 더핑 방정식(Duffing equation)이나 2차항이 더 추가된 방정식이 지배방정식으로 유도되어지며, 위상공간의 특성 역시 동모임점 궤적(Homoclinic orbit)을 가지는 것으로 알려져 있다.(Blair 등, 1996; Ario, 2004) 따라서, 공간 구조물의 비선형 지배방정식을 유도하고 더핑형 방정식으로 정의되어지는 단자유도 모델에 대해서 해석법의 적용에 대한 검증을 수행하도록 한다. 위상공간에서 나타나는 끌개의 특성과 비선형 거동 및 동적임계하중레벨에 대한 특성도 함께 고찰한다. 지배방정식의 정식화를 위해서 기하학적 비선형성을 고려한 비선형 운동방정식을 유도하고, 멀티스텝 테일러 기법으로 외부 가진력에 대한 동적 응답을 구하도록 한다. 주기를 가진 변위 응답의 경우 고전적인 테일러 기법은 무한 항에 대한 급수 전개를 필요로 하므로 본 연구의 문제에는 적합하지 않을 수 있지만 멀티스텝 테일러 기법의 경우 해의 정밀도에 충분히 유한한 미분계수 항을 구하여 해석을 수행하므로 적용이 비교적 쉽고 간단하게 해석적 급수 해를 얻을 수 있다. 따라서 논문의 구성은 2장에서 트러스 요소에 대한 비선형 운동방정식과 멀티스텝 테일러 해석을 통한 단순 모델의 해석적 해를 구하는 과정에 대해 설명하고, 3장에서 단순모델을 대상으로 얇은 공간 트러스의 정적 및 동적 불안정 거동 특성에 대해서 고찰한다. 여기서, 감쇠 계수의 변화도 함께 고려하여 거동을 살펴보고, 마지막으로 4장에서 결론을 제시한다.

2. 공간 트러스의 멀티스텝 테일러 급수 해석

본 장에서는 공간 트러스 구조물의 비선형 지배방정식에 대해 설명하고, 그림 1과 같은 1-자유절점 단순모델에 대해 멀티스텝 테일러 급수 기법을 적용하여 해를 구하도록 한다. 우선, 이산화 비선형 운동 방정식을 구하기 위해 3차원 트러스 요소의 정식화에 대해 설명한다. 여기서 강성 방정식은 대변형 이론을 기초로 한 비선형 항을 고려하므로 고차항이 포함된 방정식으로 유도되며, 단일 자유도 모델에 적용하였을 경우 더핑방정식과 유사한 형태의 지배방정식으로 유도된다. 그리고 테일러 급수 해의 정식화 과정 및 적용에서는 유효한 해석적 해를 얻기 위해 충분한 차수(order)와 스텝크기를 이용하도록 한다.

2.1 비선형 운동방정식

요소 정식화를 위해 국소 좌표계 x, y, z 및 전체 좌표계 X, Y, Z 로 정의된 공간의 절점벡터를 6 DOFs 성분으로 구성된 $\mathbf{f}$ 와 $\mathbf{d}$ 및 $\mathbf{F}$ 와 $\mathbf{D}$ 로 정의하며, 각각은 국소 좌표계에서의 절점력과 절점변위, 전체 좌표계에서의 절점력과 절점변위이다. 요소의 절점 벡터로 표현된 변위함수 $\mathbf{u}$ 는 라그랑주 보간함수인 $N_i = 1 - \xi$ 및 $N_j = \xi$ 를 이용하여 다음과 같이 가정한다. 여기서 $\xi = x/l$ 이고, l 은 부재의 길이이다.

$$\mathbf{u} = [N_i \mathbf{I}_3 : N_j \mathbf{I}_3] \mathbf{T}^T \mathbf{D} \quad (1)$$

선형 탄성재료의 변형도-변위 관계식을 기하학적 비선형성을 고려하여 다음과 같이 가정한다.

$$\epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} \quad (2)$$

행렬로 표기된 변위함수를 이용하여 식(2)와 변분 $\delta\epsilon$ 을 구하여 나타내면 다음과 같다.

$$\epsilon = \mathbf{U}^T \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{K}_s \mathbf{D} \quad (3)$$

$$\delta\epsilon = \mathbf{U}^T \delta\mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{K}_s \delta\mathbf{D} \quad (4)$$

여기서,

$$\mathbf{U} = \{ N_{i,x} \ 0 \ 0 : N_{j,x} \ 0 \ 0 \}$$

$$\mathbf{K}_s = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

응력-변형도 관계는 선형 탄성 범위로 가정하므로 관계식은 다음과 같다.

$$\sigma = E\epsilon \quad (5)$$

요소의 강성행렬을 구하기 위해 가상 일의 원리를 적용하고, 전체 시스템에서의 절점 벡터와 식(5)를 대입하여 적분하면 다음과 같다.

$$\delta \mathbf{D}^T \mathbf{F} = A E l (\delta \epsilon^T \epsilon) \quad (6)$$

각 항에 대해서 식(3)과 식(4)를 대입하고, 절점 변위에 대해서 정리하면 다음과 같은 기초방정식이 구해진다.

$$\mathbf{F} = A E l \left\{ \mathbf{T} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{T}^T \mathbf{D} + \left(\mathbf{K}_s \mathbf{D} \mathbf{U}^T \mathbf{T}^T \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{T}^T \mathbf{D}^T \mathbf{K}_s \mathbf{D} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_s \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{K}_s \mathbf{D} \right\} \quad (7)$$

위 식의 오른쪽 항들을 살펴보면, 첫 번째 항은 미지변위벡터에 대한 차수가 1차이며, 두번째와 세번째는 2차, 그리고 마지막 항은 3차에 해당된다. 그러므로, 비선형 운동 방정식은 식(7)에 가속도 항과 감쇠(damping)항을 고려하여 다음과 같이 나타낼 수 있다. (Kim, 1990)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}} + \{ \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{D}) + \mathbf{K}_3(\mathbf{D}^2) \} \mathbf{D} = \mathbf{F} \quad (8)$$

여기서, $\mathbf{M}$ 은 질량행렬, $\mathbf{C}$ 는 감쇠행렬이고, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2(\mathbf{D})$, $\mathbf{K}_3(\mathbf{D}^2)$ 는 식(7)에 나타난 각 차수에 따른 강성행렬이다.

따라서, 그림 1과 같은 1-자유절점 모델을 대상으로 운동 방정식을 표현하면 식(9)와 같다. 식(9)는 모델의 대칭 조건을 이용하여 수직방향 변위만을 고려하여 형성한 것으로 미지 변위의 3차 항으로 나타나는 비선형 시스템이다.

해석 기법에 적용하고자 하는 대상 모델은 그림 1과 같이 모두 4개의 부재로 구성되며, 1번 절점을 제외한 나머지 절점은 고정지지 되어 있다. 모델 형상은 밑 변 $L (=5\text{m})$, 그리고 높이는 H 로 정의하며, 파라미터 $\mu = H/2L$ 를 이용하여 형상을 하나의 변수로 나타내었다. 그리고 각 부재는 동일한 재료의 밀도 ρ , 탄성계수 E 와 단면적 A 로 정의되며, 요소 내에서 일정하다고 가정한다. 이상의 파라메타를 식(8)에서의 각각의 변수에 대입하면 식(9)와 같은 방정식으로 나타나며, (Kim, 1990) 식에서 보는 바와 같이 더핑 방정식에서 2차항이 추가된 방정식의 형태를 지니고 있다.

그림 1. 1 자유절점 공간 트러스 모델의 형상 및 파라미터

이와 같은 방정식의 경우 비선형 동적응답의 위상공간은 동모임점 궤적(Homoclinic orbit)이 형성되는 까닭에 단일자유도 모델은 비교적 단순하지만 아치나 돔형 공간 트러스에서 나타나는 비선형 동적 거동을 잘 대변할 수 있다. 또한 모델이 간단하므로 해석 기법의 결과 검증에 유용하며, 위상공간에서의 동적 좌굴특성에 대한 관찰에 적절할 것이다.

$$\ddot{D} + 2h\omega_0\dot{D} + \omega_0^2 D + \frac{K_2}{m}D^2 + \frac{K_3}{m}D^3 = \frac{F}{m} \quad (9)$$

여기서,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad h = \frac{c}{2m\omega_0},$$

$$k_1 = 4\frac{EAH^2}{l^3}, \quad k_2 = -6\frac{EAH}{l^3}, \quad k_3 = 2\frac{EA}{l^3}$$

따라서, 위의 식과 계수를 이용하여 멀티스텝 테일러 급수 기법을 이용하여 해를 구하도록 한다.

2.2 멀티스텝 테일러 급수 해석

비선형 지배 방정식의 초기치 문제를 다루기 위해한 테일러 방법과 근사 해석적 급수 해(approximate analytical series solution)에 대해서 설명하기 위해 식(9)를 다음과 같이 정의하도록 한다.

$$\dot{D} = f(t, D, \dot{D}), t \in I, D = D(t) \in R^n \quad (10)$$

$$D(t_0) = D_0, \dot{D}(t_0) = D_1 \quad (11)$$

여기서, I 는 t_0 을 포함하는 열린 구간(open interval)이고, 함수 f 는 $I \times R^n \times R^n$ 에서 연속함수라 가정할 때, $D(t)$ 는

해석적 함수(analytical function)이고, 다음 식(12)와 같이 표현할 수 있다.

$$D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n \quad (12)$$

$$D(t) = \sum_{k=0}^n \frac{D^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + R(n, t, t_0) \quad (13)$$

여기서, n 차 항까지의 해석적 급수 해를 구할 경우, 나머지 항(remainder term) $R(n, t, t_0)$ 은 다음과 같고, 아래 식을 만족하는 c^* 가 열린 구간 내에 존재한다. 또한 오차는 식(15)과 같이 정의된다.

$$R(n, t, t_0) = \frac{D^{(n+1)}(c^*)}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1} \quad (14)$$

$$|R(n, t, t_0)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max |D^{(n+1)}(t)| t_h^{n+1} \quad (15)$$

$$, t_0 \leq t \leq t_0 + t_h$$

테일러 급수는 지배방정식의 해를 식(13)의 R 항을 제외한 n 차 급수로 정의하고, 각 미분계수 $D^{(k)}(t_0)$ 을 식(10)에서 구하여 해를 얻는 방법이며, 구하여진 해는 정의구역 $[t_0, t_0 + t_h]$ 에서 식(15)와 같은 오차범위 내에서의 정도를 갖게 된다. 여기서, 식(15)의 n 과 t_h 을 파라미터로 하여 멀티스텝으로 해를 구하면 매우 효율적이며, n 과 t_h 을 조절하는 것을 각각 가변 차수(variable order) 및 가변 스텝(variable step-size) 기법이라 한다. 특히, 두 파라미터 n 과 t_h 는 오차에 대한 한계를 결정할 수 있으므로 해의 정확도와 계산속도가 이들에 의해 결정된다. 본 연구에서는 식(10)의 해를 식(16)과 같이 유한 테일러 급수로 정의하고, 멀티스텝으로 해석적 급수해를 구한다.

$$D_i(t) = \sum_{k=0}^n \frac{D_i^{(k)}(t_{0i})}{k!} (t - t_{0i})^k \quad (16)$$

$$, (t_0 \leq t \leq t_0 + t_h) \quad i = 1, 2, \dots, \text{total step}$$

여기서, i 스텝에 해당하는 초기치는 이전 스텝을 통해 정의되며, 미분계수 $D^{(k)}(t_0)$ 는 정식화된 지배방정식을 통해서 구할 수 있다. 따라서, 구하여진 계수를 위 식에 대입 함으로서 각 스텝에서의 테일러 급수인 근사 해석 해를 얻게 되며, 자유도와 차수의 증가에 따라 미분계수항의 수도 늘어난다. 본 논문에서는, 정도 높은 해를 얻기 위해 충분한 차수 n 과

스텝 t_h 을 이용하도록 하며, 식(15)에 대한 과정은 본 논문에서는 다루지 않도록 한다.

따라서 멀티스텝 테일러 급수 해법에서 각 시간에 관한 다항식의 계수가 되는 미분계수 $D^{(k)}(t_0)$ 는 지배방정식인 식(10)을 통해 구할 수 있으며, 식(9)와 같이 표현되는 1 자유도 공간 트러스 모델의 운동 방정식의 경우, $(t - t_{0i})$ 에 관한 4차 항까지 즉, 급수전개식의 5항까지의 미분계수를 구하면 다음 식(17a)에서 식(17e)와 같다. 여기서, 동적 시스템의 미지변위와 속도에 대한 초기치는 각각 $D(t_0) = D_0$ 및 $\dot{D}(t_0) = \dot{D}_0$ 로 정의한다.

$$D^{(0)}(t_0) = D_0 \quad (17a)$$

$$D^{(1)}(t_0) = \dot{D}_0 \quad (17b)$$

$$D^{(2)}(t_0) = -2h\omega_0\dot{D}_0 - \omega_0^2 D_0 - \frac{K_2}{m}D_0^2 - \frac{K_3}{m}D_0^3 + \frac{F}{m} \quad (17c)$$

$$D^{(3)}(t_0) = (2h\omega_0)^2\dot{D}_0 + 2h\omega_0^3\dot{D}_0 + 2h\omega_0\frac{K_2}{m}D_0^2 + 2h\omega_0\frac{K_3}{m}D_0^3 - 2h\omega_0\frac{F}{m} - \omega_0^2\dot{D}_0 - \frac{K_2}{m}D_0\dot{D}_0 - 3\frac{K_3}{m}D_0^2\dot{D}_0 \quad (17d)$$

$$D^{(4)}(t_0) = -(2h\omega_0)^3\dot{D}_0 - (2h\omega_0)^2D_0 - (2h\omega_0)^2\frac{K_2}{m}D_0^2 - (2h\omega_0)^2\frac{K_3}{m}D_0^3 - (2h\omega_0)^2\frac{F}{m} - \omega_0^2\frac{F}{m} - 6\frac{K_3}{m}D_0\dot{D}_0^2 - 2\frac{K_2}{m}D_0^2\dot{D}_0 + 4h\omega_0^3\dot{D}_0 + 8h\omega_0\frac{K_2}{m}D_0\dot{D}_0 + 12h\omega_0\frac{K_3}{m}D_0^2\dot{D}_0 + 3\left(\frac{K_3}{m}\right)^2D_0^5 + 5\frac{K_2}{m}\frac{K_3}{m}D_0^4 + \left(2\left(\frac{K_2}{m}\right)^2 + 4\omega_0^2\frac{K_3}{m}\right)D_0^3 + \left(3\omega_0^2\frac{K_2}{m} - 3\frac{K_3}{m}\frac{F}{m}\right)D_0^2 + \left(\omega_0^4 - 2\frac{K_2}{m}\frac{F}{m}\right)D_0 \quad (17e)$$

이상과 같이 구한 계수를 식(16)에 대입하면 각 스텝에서의 근사 해석적 해(approximate analytical solution)을 구할 수 있으며, 자유도와 차수 n 의 증가에 따라 항수도 늘어나게 된다.

단일 자유도 모델에서 설명되어진 기법은 구조물의 자유도 수의 증가에 따라 방정식은 보다 더 늘어날 수 있으나 해석 기법의 적용은 단일 자유도 모델과 다르지 않으며, 수치적 기

법과는 달리 각 미분계수의 항을 직접 고려함으로써 높은 차수의 구간별 해석적 해를 얻을 수 있다. 이와 같은 기법의 적용은 수치적 직접법에 따른 해석법에 비해 고차의 동적 하중의 적용에도 쉽게 접근할 수 있다.

3. 동적 해석과 불안정 거동 특성

단순모델에 대한 멀티스텝 테일러 급수 기법의 해와 동적 특성을 파악하기 위해서 스텝하중($F = F_0$) 아래에서의 동적 응답을 구하고, 동적 불안정 거동에 대해 관찰한다. 본 모델에서 적용될 부재의 밀도 ρ , 탄성계수 E , 단면적 A 는 각각 $7.85 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, $2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$, 11.2 cm^2 이다. 채택된 모델의 형상은 $L=5\text{m}$ 이고, 형상 파라메타 μ 는 모두 $0.05(H=0.5\text{m})$, $0.1(H=1\text{m})$, $0.15(H=1.5\text{m})$, $0.2(H=2\text{m})$ 및 $0.25(H=2.5\text{m})$ 의 5가지 모델을 고려하기로 한다.

우선, 동적 응답에 대한 결과를 정적 좌굴상태와 비교하기 위해서 식(9)의 방정식에서 질량과 감쇠항을 고려하지 않은 방정식 (18)의 평형경로를 구하면 그림 2와 같고, 평형경로상의 극한점을 구하면 표 1과 같다. 그림 2와 표 1의 결과를 정적상태의 평형경로 및 정적좌굴하중레벨 sP_{cr} 로 정의하도록 하며, 문헌 Kim(1990)에서의 방법과 동일하다.

$$F(D) = 2\frac{EA}{l^3}D^3 - 6\frac{EAH}{l^3}D^2 + 4\frac{EAH^2}{l^3}D \quad (18)$$

그림 2. 형상 파라미터 μ 에 따른 하중-변위 곡선 (Static)

표 1. 1-자유절점 공간 구조물의 정적좌굴 하중레벨 sP_{cr}

μ	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
sP_{cr} (kN)	175	1340	4214	9098	15886

형상파라메타에 따른 평형경로상의 첫 번째 극한점은 불안정 경로의 시작이 되며, 임계점 이전에 동적 스냅(dynamic snapping)현상이 나타난다. 이와 같은 동적 좌굴의 발생에 대해서 위상공간의 끌개의 변화 및 감쇠정수에 따른 변위응답의 수렴 및 동적 좌굴에 대한 결과를 테일러 해법을 이용해 구하도록 한다.

3.1 스텝하중에 대한 동적 응답과 위상공간의 끌개

테일러 급수 해석결과에 대한 신뢰도를 위해서 차수 n 및 스텝크기 t_h 를 각각 7과 0.001로 채택하여 해석을 수행하여 4차 룬게쿠타법(4th Runge-Kutta method: RK4)의 해석결과와 비교하도록 하며, 차수를 높임으로서 정밀도를 높일 수 있다. 스텝하중이 적용된 $\mu=0.05$ 모델에 대해서 비교결과를 그림 2에 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 두 해석방법에 따른 변위응답 결과곡선은 매우 잘 일치한다.

그림 3. 멀티스텝 테일러 급수 및 4차 Runge-Kutta method의 변위응답 곡선의 비교결과 ($\mu=0.05$, $F_0=200$ kN)

스텝하중이 작용할 때 동적 좌굴 전 후의 변위응답을 우선 살펴보기로 한다. 모델의 형상 파라메타 μ 는 0.05 및 0.1일 경우를 선정하며, 해석시간(time duration)은 1sec로 채택하여 해석을 수행한다.

우선, 감쇠를 고려하지 않을 때, $\mu=0.05$ 모델의 동적 응답은 그림 4와 같다. 그림에서 하중레벨 F_0 가 100kN까지는

주기가 점차 길어지고, 이후에는 짧아진다. 그리고 변위응답의 진폭의 증가는 F_0 의 증가에 비례하지 않으며, 비선형성을 나타낸다. 즉, 100kN의 하중레벨에서 150kN의 하중레벨에 대한 변위의 증가는 극단적으로 다른 형태의 주기와 최대 변위를 기록한다. 이것은 기하학적 비선형성으로 인한 동적 스냅 현상은 아치나 돔형 공간 트러스에서 나타나는 대표적인 불안정 현상이다.

그림 4. 스텝하중에 따른 수직변위의 과도응답 ($\mu=0.05$)

이와 같은 양상은 $\mu=0.1$ 모델도 유사하다. 그림 5는 $\mu=0.1$ 모델의 해석 결과이며, 그림 5 (a)의 변위응답은 주기와 진폭이 변화하는 하중레벨만 다를 뿐 $\mu=0.05$ 의 양상과 같다. 진폭의 크기가 급격하게 달라지는 하중레벨 F_0 는 1000kN과 1100kN 사이이며, 그림 5 (b)와 그림 5 (c)의 속도와 가속도 변화도 변위응답의 이와 같은 변화에 상응하는 결과를 나타내고 있다. 두 하중레벨 사이의 주기변화와 변위응답 변화로 볼 때 응답곡선의 특성이 바뀌었으며, 최대변위응답은 계속 증가되는 반면 주기는 하중레벨을 기점으로 증가하다가 감소하는 결과를 나타낸다. 이와 같은 변화에 대한 속도와 가속도의 변화는 매우 당연한 결과이다.

동적 하중레벨의 미소한 변화에 대한 급격한 변위응답의 발생을 동적좌굴로 정의되는 Budiansky와 Roth(1962)의 좌굴판정으로 미루어 볼 때 그림 4와 그림 5(a)의 구분되는 하중레벨의 사이에는 이들의 특성이 분리되는 하중레벨이 존재할 것이며, 이를 동적좌굴하중레벨로 정의할 수 있다. 또한 위상공간에서의 비선형 운동에 관한 지형의 변화를 예상할 수 있다. 일반적으로 나타난 아치는 아치나 공간 구조물들의 위상은 주로 한계순환끌개의 형태를 나타내며, 동적 좌굴이 발생하는 공간에서는 순환끌개의 형태의 변화를 관측할 수 있고, 감쇠를 고려한 경우 고정점끌개를 예상할 수 있다(Ario, 2004; Yun 과 Kim, 2004).

그림 5. 스텝하중에 따른 과도응답 곡선 ($\mu=0.1$)

동적 좌굴하중 레벨 전 후의 위상공간에서의 지형변화를 관찰하기 위해서 속도-변위 공간의 이력곡선을 그림 6에 나타내었고, 시간에 따른 변화에 대해서도 함께 살펴보기 위해서 위상공간의 궤도를 3차원 공간상에 나타내었다. 예상한 결과와 같이 동적좌굴 전 후의 위상공간의 지형 변화는 순환궤적의 모양이 한 개의 물방울에서 두 개의 연결된 물방울 모양의 궤도로 변화했다. 이와 같은 결과는 앞은 아치에서도 유사하게 나타난다(Yun과 Kim, 2004).

(a) Pre-buckling level ($F_0 = 1000\text{kN}$)

(b) Post-buckling level ($F_0 = 1100\text{kN}$)

그림 6. 스텝하중에 따른 위상공간의 궤도 ($\mu=0.1$)

그림 6의 두 위상공간에서 나타난 변화에서도 알 수 있듯이 공간의 지형은 달라졌으며, 하중레벨의 증가에 대해 최대 변위는 커지지만 그림 6(a)의 경우는 주기가 늘어나며, 그림 6(b)의 경우는 감소하는 것을 알기 쉽게 관찰할 수 있다.

다음으로 감쇠정수 h 를 고려한 모델의 동적 응답을 살펴보고 하중, 여기서 감쇠정수는 식(9)에서 정의된 값이다. 해석결과, 그림 7은 $\mu=0.1$ 모델의 $h=0.01$, 0.03 및 0.05 일 때의 변위 응답을 나타낸 것이다. 여기서, 그림 7 (a)와 (b)는 각각 동적 좌굴 레벨의 이전인 $F_0=1000\text{kN}$ 와 이후인 $F_0=1200\text{kN}$ 의 결과로서 감쇠를 고려한 동적 시스템의 경우에서도 해석결과는 발산하지 않고 잘 수렴하였다. 두 하중레벨의 그림에서 모두 변위응답은 감쇠를 고려하였을 경우 한 점으로 수렴하고 있으며, 그림 7(a), (b)의 결과에서

불 때, 진폭과 주기는 모두 감쇠를 고려하지 않았을 때 보다 작아지고 짧아지지만, 수렴하는 위치는 다르다.

그림 7. 스텝하중을 받는 공간구조물의 감쇠시스템에 대한 수직변위에 대한 과도응답

그림 7의 수렴하는 변위의 두 값에 대한 결과는 그림 8의 위상공간의 궤적을 살펴봄으로써 더 잘 설명될 수 있다. 동적 좌굴이 발생하기 이전의 상태인 그림 8 (a)에서는 감쇠를 고려하지 않았을 때 나타난 한계순환궤개의 궤도 중심점으로 고정점 궤개가 형성되며, 이후 레벨인 그림 8 (b)에서는 발생전의 한 개의 물방울 궤적에서 벗어나 새로이 형성된 반대편 물방울 궤적의 중심으로 수렴한다. 이것은 시간이 증가할수록 주기운동에서 정지운동으로 바뀌어 가는 것을 의미하며, 점진적으로 안정상태가 된다. 수렴하는 속도는 감쇠정수 값이 높을수록 빠르게 수렴하며, 그림을 통해서 쉽게 관찰할 수 있다. 그러나 두 궤적 사이에서의 차이는 하중레벨에 따른 최대 변위응답의 변화를 살펴보아야 한다.

이상의 결과에서 볼 때, 멀티스텝 테일러 급수 해석의 결과는 룬게-쿠타 법과 비교해 매우 잘 일치하며 동적좌굴현상을 예상할 수 있는 모델에서의 하중레벨에 따른 위상공간의 궤개 변화를 모두 구할 수 있다.

(a) Pre-buckling level ($F_0 = 1000\text{kN}$)

(b) Post-buckling level ($F_0 = 1200\text{kN}$)

그림 8. 스텝하중을 받는 공간구조물의 감쇠시스템에 대한 위상공간의 궤도

3.2 동적 불안정 거동의 판별과 동적좌굴하중레벨

스텝하중을 받는 공간 트러스 동적 불안정에 대해서 최대변위응답을 통하여 좌굴하중레벨을 구하도록 한다. 앞서 설명한 바와 같이 동적 좌굴의 판정은 미소한 하중레벨의 증가에 대해 최대변위응답 진폭이 급격하게 변하는 레벨을 임계 레벨로 정의하도록 한다.

우선, 그림 9는 $\mu=0.1$ 모델을 대상으로 감쇠항을 고려하지 않은 모델의 해석결과로서 하중레벨에 따른 최대 변위응답 곡선을 정적 하중-변위곡선과 함께 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 하중레벨의 미세한 변화에 대해 급격한 변위응답을 발생하는 지점은 정적 좌굴하중레벨 이전 레벨에서 발

생하며, 동적스냅현상이 예상되는 시점이다. 이때의 하중레벨을 기점으로 위상공간의 궤적의 변화는 이루어지며, 정적좌굴 하중레벨의 77.03%인 1,032kN의 하중레벨에서 발생하였다.

그림 9. 형상 파라미터 μ 에 따른 최대변위응답 곡선 ($h=0.0$)

그림 10. 감쇠정수 h 에 따른 최대변위응답 곡선($\mu=0.1$)

형상 파라미터 $\mu=0.1$ 모델에서 감쇠정수 h 를 0.01에서 0.05까지 0.1씩 변화시켜 동적 좌굴하중 레벨을 구하였으며, 감쇠를 고려한 해석결과는 그림 10에서 나타내었다. 여기서 나타난 좌굴하중레벨은 1106kN으로서 정적 좌굴하중레벨의

82.56%에 해당한다. 따라서 고려되어진 감쇠정수의 범위에서는 값이 증가함에 따라 좌굴하중레벨도 증가하며, 구간 내에서는 비교적 증가폭이 일정하였고, 비감쇠 모델에서의 하중레벨 비율인 77.03%에 비해서 약 5%정도 증가하였다.

단일자유도 공간 구조물의 라이즈 스펜 비에 따른 최대변위 응답곡선을 얻은 결과는 그림 11과 같고, 고려되어진 형상 파라미터에 대한 각각의 동적 좌굴 하중레벨 dP_{cr} 은 표 2와 같다. 그림에서 볼 때, μ 의 증가에 따라 dP_{cr} 도 함께 증가하며, 정적 해석의 경우와 마찬가지로이다. 또한 정적 임계 하중 레벨 sP_{cr} 을 이용하여 무차원화 한 결과, 표 2에서와 같이 μ 값에 관계없이 비율은 거의 일정하며, 동적 좌굴 하중레벨은 정적 좌굴 하중 레벨의 약 77% 범위에 해당하였다.

그림 11. 형상 파라미터 μ 에 따른 최대변위응답 곡선 ($h=0.0$)

표 2. 1-자유절점 공간 트러스의 동적좌굴 하중레벨 dP_{cr} ($h=0.0$)

μ	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
dP_{cr} (kN)	136	1032	3244	7004	12229
dP_{cr}/sP_{cr}	0.7771	0.7703	0.7698	0.7698	0.7698

채택된 형상 파라미터 모두에 대해서 $h=0.05$ 를 적용하여 동적 좌굴하중 레벨을 구하였으며, 이 결과를 표 3에 나타내었다. 표 3에서 보는 바와 같이 정적 좌굴하중 레벨 sP_{cr} 와 비교하였을 때 그 값은 모든 모델에서 약 83%의 범위에 해당되는 값을 얻었으며, 부재의 재료적 비선형성을 고려하지 않은 탄성영역에서의 동적 불안정 특성에서 감쇠정수는 선형적인 변화를 가진다.

표 3. 1-자유절점 공간 트러스의 동적좌굴 하중레벨 dP_{cr} ($h=0.05$)

μ	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
dP_{cr} (kN)	146	1106	3479	7511	13113
dP_{cr}/sP_{cr}	0.8343	0.8256	0.8256	0.8265	0.8255

그림 12. 정적 및 동적 좌굴 하중 레벨

이상의 해석결과에 대해서 동적 좌굴하중 레벨 dP_{cr} 의 값은 그림 12에 나타난 바와 같이 스텝하중에서 정적 좌굴의 약 77%이며, 고려되어진 감쇠정수의 범위에서 정수의 증가에 따라 하중레벨도 함께 증가하였으며, 정적 좌굴의 약 83% 범위에 해당하였다.

4. 결 론

본 논문에서는 스텝하중을 받는 공간 트러스의 비선형 동적 시스템에 대해서 일반적으로 많이 사용되는 수치적 기법 대신 미분계수를 직접구하여 계산하므로 고차항의 해석적 해를 얻을 수 있는 멀티스텝 테일러 급수 해법을 적용하였다. 해석 결과의 검증을 위해서 동적 변위 응답은 단일 자유도 모델을 대상으로 비교적 정도가 높은 해석법으로 알려진 4차 룬게쿠타 법과 비교하였으며, 그 결과는 매우 잘 일치하였다. 스텝하중에 대한 변위 응답과 위상공간의 궤적을 시간의 영역에서 분석하기 위한 단일 자유도 예제는 각 파라메타에 대한 동적 좌굴 하중 레벨을 비교하였으며, 얇은 셀형 공간 트러스에서 나타나는 동적 불안정 현상을 위상공간의 끌개를 이용하여 궤적의 비선형 거동 현상을 규명할 수 있었다. 또한, 감쇠항의 고려에도 비교적 신뢰할 만한 결과인 고정점 끌개를 얻을 수 있었다. 하중레벨의 변화에 따른 최대 변위응답 곡선을 구하여 동적하중레벨을 정의한 결과에서 정적 좌굴 하중레벨의 약 77%에 해당하는 범위에서 동적 스냅핑 현상이 발

생하였고, 고려되어진 감쇠정수의 범위에서 좌굴하중은 약 83%에 달하였다.

보다 정밀한 해를 구하기 위한 다양한 수학적 해석법의 적용과 현상에 대한 정확한 규명은 시스템 동정에 관한 연구와 같은 문제를 해결할 수 있는 여러 가지 공학적 가능성을 제시할 것으로 사료된다.

감사의 글

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임.(2011-0024483)

참 고 문 헌

- 권택진, 김승덕, 김종민(1997) 기하학적 비선형을 고려한 편집 합 단층래티스돔의 불안정 거동에 관한연구, 한국전산구조공학회 학술발표회논문집, 한국전산구조공학회, 제10권, 1집, pp.240-247.
- 김두리, 김남석, 김승덕(2009) 기하학적 비선형을 고려한 얇은 스페이스 트러스 구조물의 동적 좌굴 거동 분석, 대한건축학회 학술발표대회논문집 구조계, 대한건축학회, 제29권, 제1호, pp.153-156.
- 김승덕(2002) 반강접합 프레임형 대공간 구조물의 비선형 불안정 해석에 관한연구, 대한건축학회논문집 구조계, 대한건축학회, 제18권, 제3호, pp.55-62.
- 김진기, 한상을(1998) 모드중첩법에 의한 단층래티스돔의 기하학적 비선형 좌굴거동에 관한연구, 대한건축학회 논문집 구조계, 대한건축학회, 제14권, 제4호, pp.317-325.
- 손수덕, 김승덕, 이승재, 김종식(2011) 돔형 스페이스 프레임 구조물의 하중모드에 따른 분기점 특성에 관한 연구, 한국공간구조학회 논문집, 한국공간구조학회, 제11권, 제1호, pp.121-130.
- 이경수, 한상을(2009) 공간구조물의 탄성 분기좌굴해석을 위한 수치해석 이론 개발, 한국강구조학회 논문집, 한국강구조학회, 제21권, 제6호, pp.563-574.
- 정환목, 권영환, 최영식(1993) 삼각형 네트워크 단층 강접 래티스 돔의 좌굴특성에 관한 연구, 대한건축학회논문집, 대한건축학회, 제9권, 제12호, pp.185-194.
- 한상을, 이경수, 이상진(1999) 동적이완법에 의한 불안정 구조물의 안정화 이행과정 해석에 관한 연구, 한국강구조학회 논문집, 한국강구조학회, 제11권, 제6호, pp.591-602.
- Adomian, G. and Rach, R. (1992) Generalization of adomian polynomials to functions of several variables, *Computers & mathematics with Applications*, Vol. 24, pp.11-24.

- Adomian, G. and Rach, R. (1996) Modified adomian polynomials, *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 24, pp.39-46.
- Ario, I. (2004) Homoclinic bifurcation and chaos attractor in elastic two-bar truss, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 39, pp.605-617.
- Ario, I. (2004) Homoclinic bifurcation and chaos attractor in elastic two-bar truss, *Non-linear mechanics*, Vol. 39, pp.605-617.
- Barrio, R. (2005) Performance of the Taylor series method for ODEs/DAEs, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 163, pp.525-545.
- Barrio, R., Blesa, F., and Lara, M. (2005) VSVO Formulation of the Taylor method for the numerical solution of ODEs, *Computers & mathematics with Applications*, Vol. 50, pp.93-111.
- Blair, K.B., Krousgrill, C.M., and Farris, T.N. (1996) Non-linear dynamic response of shallow arches to harmonic forcing, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 3, pp.353-367.
- Blandford, G.E. (1996) Progressive failure analysis of inelastic space truss structures, *Computers & Structures*, Vol. 58, pp.981-990.
- Budiansky, B. and Roth, R.S. (1962) Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells; Collected papers on instability of shells structures, *NASA TN D-1510*, Washington DC, pp.597-606.
- Choong, K.K. and Hangai, Y. (1993) Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures, *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial structures*, Vol. 34, No. 112, pp.133-149.
- Chowdhury, M.S.H., Hashim, I., and Momani, S. (2009) The multistage homotopy-perturbation method: A powerful scheme for handling the Lorenz system, *Chaos Solutions & Fractal*, Vol. 40, pp.1929-1937.
- Coan, C.H. and Plaut, R.H. (1983) Dynamic stability of a lattice dome, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp.269-274.
- He, J.H. (2003) Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 135, pp.73-79.
- He, J.H. (2005) Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 26, pp.695-700.
- Hill, C.D., Blandford, G.E., and Wang, S.T. (1989) Post-buckling analysis of steel space trusses, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 115, pp.900-919.
- Kassimali, A. and Bidhendi, E. (1988) Stability of trusses under dynamic loads, *Computers & Structures*, Vol. 29, pp.381-392.
- Kim, S.D. (1990) Dynamic stability of shallow structures, PhD dissertation, Tokyo University, Tokyo.
- Kim, S.D., Kang, M.M., Kwun, T.J., and Hangai, Y. (1997) Dynamic instability of shell-like shallow trusses considering damping, *Computers and Structures*, Vol. 64, pp.481-489.
- Papadrakakis, M. (1981) Post-buckling analysis of spatial structures by vector interaction methods, *Computers and Structures*, Vol. 14, pp.393-402.
- Sadighi, A., Ganji, D.D., and Ganjavi, B. (2007) Travelling wave solutions of the sine-gordon and the coupled sine-gordon equations using the homotopy perturbation method, *Scientia Iranica Transaction B: Mechanical Engineering*, Vol. 16, pp.189-195.
- Slaats, P.M.A., Jongh, J., and Sauren, A.A.H.J. (1995) Model reduction tools for nonlinear structural dynamics, *Computers and Structures*, Vol. 54, pp.1155-1171.
- Tada, M. and Suito, A. (1998) Static and dynamic post-buckling behavior of truss structures, *Engineering Structures*, Vol. 20, pp.384-389.
- Yun, T.Y. and Kim, S.D. (2004) Dynamic buckling characteristics of shallow sinusoidal arches by running response spectrum analysis, *Proc. Int. IASS symposium*, Montpellier, pp.228-229.

(접수일자 : 2011. 8. 25 / 심사일 2011. 9. 1 /
심사완료일 2012. 6. 11)