프로파일링한 테이퍼 로울러의 탄성유체윤활 해석

박태조[†]

경상대학교 기계공학부 · 공학연구원

An Elastohydrodynamic Lubrication Analysis of Tapered Roller with Profiled Ends

Tae-Jo Park[†]

School of Mechanical Engineering, ERI, Gyeongsang National University
(Received May 20, 2012; Revised June 19, 2012; Accepted June 23, 2012)

Abstract – Tapered roller bearings are widely used in high axial-load and radial-load applications. In this study, a numerical analysis is performed to study a finite line contacts EHL problem between a tapered roller and raceway in tapered roller bearings. Converged solutions are obtained for moderate load and material parameters using a finite difference method with non-uniform grids and the Newton-Raphson method. The contours and sectional plots of pressure distribution and film shape are compared. The pressure distribution and film shapes near both ends of the roller are very different from those in the central part and are transversely asymmetric. The maximum pressure and absolute minimum film thickness always occur at the small end of the roller.

Keywords – EHL(탄성유체윤활), finite line contact(유한한 길이의 선접촉), roller profile(로울러 프로파일), tapered roller bearing(테이퍼 로울러 베어링), newton-raphson method(뉴우튼-랩슨 방법)

1. 서 론

원통형 및 테이퍼 로울러 베어링의 로울러는 길이가 유한하고 지지축의 Misalignment 등으로 인하여 발생하는 로울러 양단부에서의 응력집중문제를 피하기 위하여 길이방향으로 프로파일링(Profiling)하고 있다. 지금까지의 로울러 프로파일(Profile) 설계에 사용되는 이론적인 기준은 탄성접촉압력이 양단부에서 국부적으로 크게 되지 않도록 하는 것이다[1]. 그러나 로울러와 궤도면은 아주 얇은 윤활막으로 분리된 탄성유체윤활(EHL) 상태로 운전되므로 탄성접촉인 경우와 크게 다른 유체압력이 로울러에 작용한다. 또한, 탄성접촉해석으로는 베어링의 피로수명에 큰 영향을 미치는 최소유막의 크기를 추정할 수 없다. 따라서, 로울러 베어링의 피로수명을 더욱 향상시키기 위해서는 EHL 해석결과에 근거

한 프로파일 설계방법의 개발이 요구된다.

Dowson & Higginson[2]에 의해서 유체압력에 의한 윤활면의 탄성변형과 윤활유의 점도변화를 동시에 고려한 최초의 수치해석결과가 제시된 이후, 지난 반세기 동안 EHL 문제에 대한 연구가 집중적으로 수행되었다. 하지만 무한한 길이의 선접촉문제나 볼 베어링에서와 같은 타원접촉문제[3]가 대부분으로 로울러 베어링의 경우와 같은 유한한 길이의 선접촉 문제에 대한 연구는 소수에 불과하였다[4]. Wymer & Cameron[5]의 Optical interferometry를 사용한 실험결과, 로울러 프로파일에 따라서 양단부에서 발생하는 최소유막의 크기는 큰 차이를 보였다. Mostofi & Gohar[6]는 최초로 프로파일링을 한 로울러의 EHL 해석에 성공하였지만 해석과정이 시행착오적일 뿐만 아니라 결과가 물리적으로 타당하지 않았다. Park & Kim[7-10], Park[11,12]은 불균일한 격자계를 사용한 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 동일한 문제를 체계적이고도 정확하게 수치해석하

[†]주저자 · 책임저자 : tjpark@gnu.ac.kr

였다. 소수의 격자를 사용하였음에도 불구하고 결과는 물리적으로 타당하였으며, 양단부에서의 미세한 프로파일 차이가 아주 큰 영향을 미침을 보였다. 로울러에 Misalignment가 작용하면 EHL 압력이 길이방향으로 비대칭이기 때문에 수치해석이 한층 어렵게 된다. 이 경우에 대한 수치해석을 Kushwaha 등[13]이 처음으로 시도한 결과, 해석결과가 다소 부정확하지만 Misalignment가 양단부에서의 EHL 압력과 유막형상에 미치는 영향은 아주 크게 나타났다. 본 논문의 저자[14]는 아주 상세하게 Misalignment의 영향을 해석하였으며, 특히, 유막두께 보다 압력분포에 미치는 영향이 더욱 크다는 결과를 제시하였다.

한편, 반경방향과 축방향의 고하중을 동시에 지지하는 경우에 널리 사용되는 테이퍼 로울러 베어링에 대한 지금까지의 EHL 해석은 다음의 2건에 불과하다. Yamashita 등[15]은 Multigrid 방법을 사용하여 길이방향으로 비대칭인 압력분포와 유막형상을 제시하였지만 작은 수의 균일한 격자계를 사용하였기 때문에 해석결과가 완전하지 않았다. Yang & Yang[16]은 2개의 테이퍼 로울러가 서로 반대방향으로 배치된 경우에 대한 TEHL 문제를 해석하였지만 해석결과는 테이퍼 로울러 베어링이 아니라 헬리컬 기어(Helical gear)에 적용할 수 있을 뿐이다.

이와 같이 본 논문에서는 아직까지 완전한 연구결과가 발표되지 않은 테이퍼 로울러 베어링의 로울러와 궤도면 사이의 유한한 선접촉 EHL 문제를 본 연구자가 개발한 불균일한 격자계를 채용한 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 수치해석하고자 한다.

2. 지배방정식

본 논문에서는 테이퍼 로울러 베어링의 로울러와 궤도면 사이의 EHL 문제를 Fig. 1에 나타낸 것과 같이 테이퍼 로울러와 평면 사이의 문제로 바꾸어 해석하고자 한다.

2-1. 레이놀즈 방정식

테이퍼 로울러의 구름방향이 x 방향일 때, 유막내에서 발생하는 EHL 압력은 다음의 레이놀즈 방정식을 만족시킨다[3].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12 \frac{\partial(\bar{\rho} u h)}{\partial x} \quad (1)$$

Fig. 1. Schematic of tapered roller.

여기서, u 는 로울러와 궤도면의 구름방향 평균속도로 y 의 함수이며, $y=0$ 에서는 u_m 으로 표시된다.

$X = x/R_m$, $Y = y/R_m$, $P = p/E$, $H = h/R_m$, $\rho = \bar{\rho}/\rho_o$, $\eta = \bar{\eta}/\eta_o$, $U_m = \eta_o u_m/ER$, $U = U_m R/R_m$ 과 같은 무차원변수를 사용하여 식(1)을 무차원화하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12 \frac{\partial(\rho U H)}{\partial X} \quad (2)$$

2-2. 윤활유의 상태방정식

EHL 상태에서는 압력에 따라서 윤활유의 점도와 밀도가 변화하므로 이들을 무차원식으로 표현하면 각각 다음식과 같다[2].

$$\eta = \exp(GP) \quad (3)$$

$$\rho = 1 + \frac{0.58EP}{1 + 1.68EP} \quad (4)$$

여기서, $G = \alpha E$ 이고 E 의 단위는 [GPa]이다.

2-3. 유막두께식

EHL 상태에서의 유막두께는 다음식과 같이 정의할 수 있다[3,10].

$$h(x, y) = h_o + h_g(x, y) + h_d(x, y) \quad (5)$$

여기서, h_o 는 상수, $h_g(x, y)$ 와 $h_d(x, y)$ 는 각각 로울러 형상에 따른 유막과 발생압력에 의한 탄성변형량이다.

Fig. 1과 같이 테이퍼 로울러의 양단부에 동일한 크기로 Dub-off 프로파일링한 경우, $h_g(x, y)$ 는 다음식과

같이 나타내어진다.

$$h_g(x, y) = \frac{x^2}{2R} + \frac{(y - y_d)^2}{2R_d} \quad (6)$$

여기서, 프로파일링을 하지 않은 위치에서는 우변의 두번째 항은 0이다.

유막내에서 발생하는 유체압력에 의한 탄성변형량은 다음식과 같이 나타낼 수 있다[9-12].

$$h_d(x, y) = \sum_k \sum_l \bar{D}_{i,j,k,l} P_{k,l} \quad (7)$$

여기서, 하첨자 i, j 는 (x, y) 에서의 격자번호이며, $\bar{D}_{i,j,k,l}$ 는 영향계수로 (k, l) 에서의 단위압력요소에 의한 (i, j) 에서의 탄성변형량을 나타낸다.

따라서, 식(5)는 다음과 같은 무차원형태로 표현할 수 있다.

$$H(X, Y) = H_o + \frac{X^2}{2R_m^*} + \frac{(Y + Y_d)^2}{2R_d^*} \sum_k \sum_l \bar{D}_{i,j,k,l} P_{k,l} \quad (8)$$

여기서, $R_m^* = R/R_m$, $Y_d = y_d/R_m$, $R_d^* = R_d/R_m$, $\bar{D}_{i,j,k,l} = \bar{D}_{i,j,k,l}/R_m$ 이다.

2.4. 하중조건식

테이퍼 로울러에 작용하는 하중 w 는 유막내에서 발생하는 유체압력의 합과 동일하며, 이를 무차원식으로 나타내면 다음식과 같다.

$$W = \frac{w}{ER_m^2} = \iint P dX dY \quad (9)$$

2.5. 경계조건

계산영역의 경계에서는 $P = 0$ 이며, 구름방향 출구 측에는 다음식으로 표현되는 레이놀즈의 경계조건을 만족한다.

$$P = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (10)$$

3. 수치해석

본 논문에서는 참고문헌[9-12,14]에서와 동일하게 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하고자 한다. 불균일한 격자계를 사용하는 경우, 식(2)의 유한차분형태는 다음식과 같이 표현된다.

Fig. 2. Computation boundaries and coordinates.

$$\begin{aligned} f_{i,j} = & \frac{\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j}^3}{\Delta X_i \eta_{i+1/2,j}} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) \\ & - \frac{\rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}^3}{\Delta H_{i-1} \eta_{i-1/2,j}} (P_{i,j} - P_{i-1,j}) \\ & + \frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left[\frac{\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2}^3}{\Delta Y_j \eta_{i,j+1/2}} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}^3}{\Delta Y_{j-1} \eta_{i,j-1/2}} (P_{i,j} - P_{i,j-1}) \right] \\ & - 12 U_j [\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j} - \rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, M_j 는 $Y = Y_j$ 에서 식(14)를 만족시키는 X 방향 격자의 수이고, N 은 전체 Y 방향격자의 수이다[10,18]. 한편, 식(9)는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{M_j} \sum_{j=2}^{N-1} P_{i,j} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) (\Delta Y_{j-1} + Y_j) \quad (12)$$

Fig. 2는 수치해석에 사용한 계산영역의 경계와 좌표계를 나타내었다. 이때, 중앙부에서의 접촉반폭 c 와 접촉길이가 d 등은 Rahnejat & Gohar[17]의 방법으로 구하였다. 여기서, 계산영역의 크기에 따라 해석결과가 영향을 받지 않도록 하기 위하여 가능하면 이를 넓게 두었다. 이에 따라 구름방향 입구부와 출구부 경계는 $-5.0c$ 와 $2.5c$ 에, 측면부 경계는 $Y = \pm 0.715$ 에 각각 위치시켰다. 사용한 격자의 수는 최대 94×45 개이며, 수치해석 과정과 수렴조건은 참고문헌[9-12,14]과 거의 동일하다.

4. 결과 및 고찰

본 논문에서 결과제시에 사용한 자료는 다음과 같다

Fig. 3. Contours plot of dimensionless elastostatic pressure distribution ($P \times 10^4$).

(a)

(b)

(c)

Fig. 4. Contours plot of dimensionless pressure distribution ($P \times 10^4$). (a) Complete contours, (b) Small end, (c) Large end.

: $R_d^* = 0.3$, $|Y_d| = 0.7$, $\theta = 10^\circ$, $U_m = 2 \times 10^{-11}$, $G = 2,500$, $W = 2 \times 10^{-5}$, $E = 220 \text{ GPa}$

Fig. 3은 EHL 해석결과와의 고찰에 참고하기 위하여 참고문헌[17]의 방법으로 구한 탄성접촉압력분포를 전 길이에 대하여 나타기 위하여 Y 방향으로는 축소한 그

(a)

(b)

(c)

Fig. 5. Contours plot of dimensionless film thickness ($H \times 10^5$). (a) Complete contours, (b) Small end, (c) Large end.

림이다. 압력분포는 $X=0$ 에 대하여 대칭이지만 길이 방향으로는 비대칭이며, 직경이 작은 테이퍼 로울러의 소단부측에서 상대적으로 높은 접촉압력이 발생하였다.

Fig. 4와 Fig. 5는 EHL 압력의 등압선과 유막의 등고선을 각각 나타낸 그림이다. 여기서, Fig. 4(a)와 Fig. 5(a)는 Fig. 3에서와 같이 Y 방향으로 축소하여 나타내었다. EHL 압력분포는 $X=0$ 에 대하여 비대칭일 뿐만 아니라 프로파일 시작위치 부근의 구름방향 출구측에서 압력 Spike가 발생하는 등 탄성접촉인 경우와는 아주 큰 차이를 보이고 있다.

테이퍼진 로울러 형상으로 인하여 EHL 결과는 길이방향으로 비대칭이지만 중앙의 상당부분에서는 이의 영향이 상대적으로 크지 않다. 하지만 양단의 프로파

Fig. 6. Pressure distribution and film shapes in the rolling direction at $Y=\pm 0.7$.

Fig. 7. Transverse pressure distribution and film shapes near small end along $X=0$.

일 시작위치 부근에서는 유한한 길이의 선접촉 EHL의 대표적인 특징인 “Dog bone” 형상의 유막이 나타나는 등 접촉중앙부에서와는 아주 큰 차이를 보이고 있다. 특히, 소단부측에서 최대압력 뿐만 아니라 최소유막이 발생하는 점이 아주 특징적이다. 이러한 결과는 소단부에서의 구름속도가 상대적으로 느림으로 인하여 유막두께가 크게 감소하기 때문인 것으로 이해된다. 이와 유사한 형태의 결과가 원통형 로울러에 Misalignment가 작용하는 경우에 발생하였다[14]. 양단부에서는 압력에 비하여 유막두께의 차이가 상대적으로 큰 것도 동일하게 설명할 수 있다.

다음의 결과는 구름방향 및 길이방향의 각 단면에서의 압력분포와 유막형상을 비교한 것이다. Fig. 6에는

Fig. 8. Transverse pressure distribution and film shapes near large end along $X=0$.

프로파일 시작 위치인 $Y=0.7$ (대단부)와 $Y=-0.7$ (소단부)에서의 구름방향으로의 압력분포와 유막형상을 비교하여 나타낸 결과로 $Y=-0.7$ 에서는 EHL의 대표적인 압력분포와 함께 유막형상이 선명하게 나타나고 있다. 특히, 압력분포에 비하여 유막형상의 차이가 한층 크게 되는 점이 주목할 만한 결과이다. Fig. 7과 Fig. 8에는 $X=0$ 에서의 테이퍼 로울러의 소단부와 대단부 부근의 로울러 길이방향 압력분포와 유막형상을 각각 나타내었다. 길이방향으로 Peak압력은 최소유막이 발생하는 위치보다 로울러 중앙부쪽에 위치하였다[9-12,14]. Fig. 4와 Fig. 5에서 고찰한 바와 같이 소단부에서 상대적으로 발생압력은 높고 유막두께는 작게 되었다.

이상에서 나타낸 것과 같이 본 논문에서는 프로파일링을 한 테이퍼 로울러에 대한 EHL 해석을 성공적으로 수행하였다. 따라서, 본 논문의 수치해석방법은 테이퍼 로울러의 최적 프로파일 설계에 사용될 수 있을 것으로 기대되며, 다양한 조건에 대한 추가연구가 요구된다.

5. 결 론

테이퍼 로울러 베어링은 반경방향 및 축방향으로 큰 하중을 동시에 지지하는 경우에 널리 사용되고 있다. 본 논문에서는 아직까지 완전한 해석결과가 발표되지 않은 테이퍼 로울러와 궤도면 사이에서의 탄성유체윤활문제를 완전히 불균일한 격자계를 채용한 유한차분법과 뉴턴-랩슨 방법을 적용하여 수치해석하였다. 이

결과, 최대압력과 최소유막은 테이퍼 로울러의 소단부에서 발생하였으며 양단부에서 압력차이에 비하여 유막두께의 차이가 상대적으로 크게 나타났다. 따라서, 본 논문의 수치해석방법은 테이퍼 로울러의 최적 프로파일 설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2011-0014650).

기호설명

c	: $y=0$ 에서의 테이퍼 로울러 탄성접촉반폭
c	: 테이퍼 로울러의 탄성접촉길이
$D_{i,j,k,l}$	: 무차원 영향계수, $\bar{D}_{i,j,k,l}/R_m$
$\bar{D}_{i,j,k,l}$	: 영향계수
E	: $2/E = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$
G	: 무차원 재료변수, aE
h	: 유막두께
H	: 무차원 유막두께, h/R_m
n	: 반복계산횟수
p	: 압력
P	: 무차원 압력, p/E
R	: 로울러 반경
R_d	: Dub-off 반경 (Fig.1 참조)
R_m	: 테이퍼 로울러의 평균 반경
R_d^*	: R_d/R_m
u	: 구름방향 평균속도
u_m	: $y=0$ 에서의 구름방향 평균속도
U	: 무차원 속도변수, $U_m R/R_m$
U_m	: $Y=0$ 에서의 무차원 속도변수, $\eta_o u_m/ER_m$
x, y	: 구름방향 및 길이방향 좌표계
X, Y	: 무차원 좌표계, $x/R_m, y/R_m$
y_d	: Fig. 1 참조
w	: 하중
W	: 무차원 하중변수, w/ER_m^2
α	: 윤활유의 압력-점도지수
δ	: 미소압력요소에 의한 탄성변형량
η	: 무차원 점도, $\bar{\eta}/\eta_o$
$\eta_o, \bar{\eta}$	: 대기압 및 p 에서의 윤활유 점도
ρ	: 무차원 밀도, $\bar{\rho}/\rho_o$

$\rho_o/\bar{\rho}$: 대기압 및 p 에서의 윤활유 밀도

θ : 테이퍼 로울러의 테이퍼 각도(Fig. 1 참조)

참고문헌

- Heydari, M. and Gohar, R., "The Influence of Axial Profile on Pressure Distribution in Radially Loaded Rollers," *J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol. 21, pp. 38-388, 1979.
- Dowson, D. and Higginson, G. R., "A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem," *J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol. 1, pp. 7-15, 1959.
- Hamrock, B. J. and Dowson, D., "Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part 3 : Fully Flooded Results," *J. of Lub. Tech.*, Vol. 99, pp. 264-276, 1977.
- Chen, X., Sun, H. and Shen, X., "Review and Prospect of Developments in EHL of Finite Line Contacts," *Proc. of IUTAM Sympo. on Elastohydrodynamics and Micro-elastohydro-dynamics*, pp. 95-106, 2004.
- Wymer, D. G. and Cameron, A., "Elastohydrodynamic Lubrication of a Line Contact," *Proc. IMechE*, Vol. 188, pp. 221-231, 1973-74.
- Mostofi, A. and Gohar, R., "Elastohydrodynamic Lubrication of Finite Line Contacts," *J. of Lub. Tech.*, Vol. 105, pp. 598-604, 1983.
- 박태조, 김경웅, "유한한 선접촉 탄성유체윤활문제의 수치해석," *대한기계학회논문집*, 제11권, 제4호, pp. 579-585, 1987.
- 박태조, 김경웅, "프로파일링을 한 원통형 로울러의 탄성유체윤활(I)," *대한기계학회논문집*, 제12권, 제2권, pp. 262-270, 1988.
- 박태조, 김경웅, "프로파일링을 한 원통형 로울러의 탄성유체윤활(II)," *대한기계학회논문집*, 제15권, 제6호, pp.1975-1981, 1991.
- Park, T. J. and Kim, K. W., "Elastohydrodynamic Lubrication of a Finite Line Contacts," *Wear*, Vol. 223, No. 1-2, pp. 102-109, 1998.
- Park, T. J., "Effect of Roller Axial Profile on the EHL of Finite Cylindrical Roller," *Proc. of ECOT-RIB 2009*, Paper No. B1-HE2-148, 2009.
- Park, T. J., "Effect of Roller Profile and Misalignment in EHL of Finite Line Contacts," *Proc. of ESDA2010*, ESDA2010-24367, 2010.
- Kushwaha, M., Rahnejat, H. and Gohar, R., "Aligned and Misaligned Contacts of Rollers to Races in Elastohydrodynamic Finite Line Conjunctions," *Proc. IMechE, J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol. 216, pp. 1051-1069, 2002.
- 박태조, "Misalignment가 있는 유한한 선접촉 EHL 문제의 수치해석," *윤활학회지*, 제26권, pp. 263-271, 2010.

15. Yamashita, R., Dowson, D. and Taylor, C. M., "An Analysis of Elastohydrodynamic Film Thickness in Tapered Roller Bearings," *Tribology Series*, Vol. 32, pp. 617-637, 1997.
16. Yang, P. and Yang, P., "Analysis on the Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Tapered Rollers in Opposite Orientation," *Tribology Int.*, Vol. 40, pp. 1627-1637, 2007.
17. Rahnejat, H. and Gohar, R., "Design of Profiled Taper Roller Bearings," *Tribology Int.*, Vol. 12, pp. 269-275, 1979.
18. Park, T. J. and Kim, K. K., "A Numerical Analysis of the Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts," *Wear*, Vol. 136, pp. 299-312, 1990.