WAF 기법을 이용한 천수방정식 해석

Weighted Averaged Flux Method for Computation of Shallow Water Equations

김 우 구* / 정 관 수** / 김 제 한***

Kim, Woo-Gu / Jung, Kwan Sue / Kim, Jae han

Abstract

A numerical model for the solution of two-dimensional free surface flow is developed on unstructured grid. By using fractional step method, the two-dimensional shallow water equations (SWE) are treated as two one-dimensional problems. Thus, it is possible to simulate computational hydraulic problems with higher computational efficiency. The one-dimensional problems are solved using upwind TVD version of second-order Weighted Averaged Flux (WAF) scheme with HLLC approximate Riemann solver. The numerical oscillations which are common with second-order numerical scheme are controlled by exploiting WAF flux limiter. Some idealized test problems are solved using this model and very accurate and stable solutions are obtained. It can be concluded as an efficient implement for the computation of SWE including dam break problems that concerning discontinuities, subcritical and supercritical flows and complex domain.

Keywords : WAF method, HLLC Riemann solver, TVD scheme, Shallow water equations, Wet and Dry technique

요 지

본 연구에서는 비구조적자좌표계상에서 천수방정식 해석을 위한 수치모형을 개발하였다. Fractional step method를 이용하여 이차원의 천수방정식을 두개의 일차원 문제로 분리하여 계산 효율이 우수한 수치연산을 수행하였다. 분리된 일차원 문제는 이차정확도의 TVD 기법을 이용하여 해석하였다. TVD 기법은 HLLC 기법을 이용하여 Riemann 해를 구한후 WAF 기법을 기반으로 이용하였으며 WAF 흐름을 제한자를 이용하여 이차정확도 문제에 수반되는 비물리적인 수치진동을 제어하였다. 개발된 모형을 다양한 문제에 적용한 결과, 해석해와 계산된 결과가 매우 잘 일치하였으며, 본 모형이 불연속해나 상류사류의 혼합흐름 및 이동경계 문제 등에 이용될 수 있음을 보였다.

핵심용어 : WAF 기법, HLLC Riemann 해, TVD 기법, 천수방정식, 이동경계기법

-
- * 한국수자원공사 수자원연구원 원장
Director General, Water Resources Research Institute, Korea Water Resources Corporation, 462-1 Jeonmin-dong, Youseong-gu, Daejeon 305-730, Korea
(E-mail : wgkim@kowaco.or.kr)
 - ** 충남대학교 공과대학 토목공학과 조교수
Assistant professor, Dept. of Civil Engineering, Chungnam National Univ. 220 Gung-dong, Youseong-gu, Daejeon, Korea
 - *** 충남대학교 공과대학 토목공학과 교수
Professor, Dept. of Civil Engineering, Chungnam National Univ. 220 Gung-dong, Youseong-gu, Daejeon, Korea

1. 서론

지표 흐름, 강과 호수내에서의 흐름, 해안가에서 발생하는 파의 처오름 현상 및 댐붕괴로 인한 파의 전파 등 물의 흐름은 일반적으로 시간과 공간에 따라 점진적으로 또는 급변하는 양상을 나타낸다. 이와 같은 흐름 양상을 모의하고 정확하게 예측하기 위한 기법의 개발은 오랜 기간 동안 수공학자들의 주된 연구분야로 자리 잡아왔다.

일반적으로 하천이나 인공 수로에서의 비정상 흐름은 주로 일차원 하천 모형에 의해 해석되며 만족할 만한 결과를 제공하고 있다. 그러나 일차원 모형은 국부적인 흐름, 예를 들면, 수리구조물 주위에서의 흐름, 제방의 월류나 파제시 발생하는 흐름 및 해안에서의 흐름 등 이차원적 현상을 모의할 수 없는 당연한 한계를 지니고 있다. 결국 이차원 모형이 일차원 모형보다 더 실제와 근사한 물리현상과 복잡한 현상을 규명할 수 있는 것이다.

또한 수치기법에 따라 흐름 모의 대상과 범위의 한계가 결정되게 된다. 이에 따라 보다 다양한 흐름 특성을 반영하기 위한 수치기법이 지속적으로 개발되어 왔다.

Glaister(1988)는 flux difference splitting을 기반으로 하는 유한차분법을 이용하여 평평한 바닥에서의 일차원 댐붕괴시 전파양상을 해석하였다. Mingham과 Causon(1999)은 이차원의 천수방정식 해석을 위한 유한체적법 모형을 개발하였다. 그들은 monotone up-stream centered scheme for conservation law (MUSCL) 기법을 모형에 도입하였으며 경사제한자로 수치진동을 방지하였다.

Zhao 등(1994, 1996)은 일차정확도의 유한체적모형을 개발하여 비구조적격자계에서 충격파를 모의하였다. Wang 등(2000)은 총변동량저거기법(Total Variation Diminishing, TVD)을 도입한 유한차분법을 이용하여 댐붕괴파의 전파문제를 해석하기 위한 모형을 개발하였다. Kim 등(2002)은 이차정확도의 유한체적모형을 개발하여 비구조적격자계에서의 흐름양상을 모의 하였다.

김원(1999)은 일차원 문제에 적용이 가능한 유한차분모형을 개발하였다. 수치기법은 Beam & Warming 기법을 기반으로 하였으며 모의대상의 모든 구간에 대하여 이차 정확도를 유지하기 위해 ENO (Essentially Non-Oscillatory)기법을 이용하였다. 강민구 등(2003)은 ENO 기법을 이용하여 이차원공간에서 적용이 가능한 수치모형을 개발하였고 이를 이용하여 평평한 수로를 대상으로 정확성을 검증하였다. 두 모형

모두 공학적으로 매우 만족할 만한 결과를 제공하였으나 이동경계의 처리 기능은 포함되지 않았다.

Fraccarollo와 Toro(1995) 및 Brocchini 등(2001)은 이차정확도를 갖는 Godunov 형 이차원 모형을 개발하였다. 이 모형들은 습윤 및 마른바닥에 적용이 가능하였다. Shock capturing이 가능한 Weighted Averaged Flux (WAF)기법을 이용하였으며, 이차원의 문제를 공간적으로 분할하여 두 개의 연속된 일차원 문제로 나누어 해석하는 fractional step method를 이용하였다. Zoppou와 Stephen(1999, 2000)은 fractional step method와 일차정확도의 Riemann 해를 WAF을 기반으로 불규칙삼각망 격자상에서 천수방정식을 해석하는 모형을 개발하였다. 두 모형 모두 충격파를 매우 정확하게 모의하였고 습윤한 바닥을 포함하여 마른바닥에서도 매우 정확한 결과를 제공하였다.

Beffa와 Connell(2001)은 직각좌표계 격자상에서 MUSCL과 Riemann해를 이용한 유한체적모형을 개발하였다. 이성태(1998)과 Bradford와 Sanders(2002)는 MUSCL과 Riemann해를 이용한 유한체적모형을 개발하였다. 위 모형들은 이동경계와 임의로 변화하는 지형에 적용성과 정확성이 우수하였다.

본 연구에서는 이와 관련하여 최근 연구동향을 검토하여 다양한 흐름조건의 해석이 가능한 수치 기법을 정리하고 이 결과를 바탕으로 기존에 장점이라 여겨졌던 finite volume method, 비구조적좌표계, approximate Riemann solver를 이용한 댐붕괴파 해석, 해석해 기반의 이동경계 기법, upwind scheme, 및 TVD scheme을 종합하여 적용범위가 광범위한 이차원흐름 해석이 가능한 수치모형의 개발을 목적으로 한다.

2. 지배방정식

2.1 천수방정식

본 연구에 사용되어진 천수방정식을 벡터 형태로 쓰면 식 (1)과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{S} = 0 \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{U}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ 및 $\mathbf{S}$ 는 식 (2)와 같다.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} d \\ du \\ dv \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} du \\ du^2 + \frac{1}{2}gd^2 \\ duv \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{dv}{du} \\ \frac{dw}{dv} + \frac{1}{2}gd^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gd(S_{fx} - S_{ox}) \\ gd(S_{fy} - S_{oy}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 d 는 수심, u 와 v 는 각각 x -와 y -방향으로의 유속, g 는 중력가속도이고 S_{ox} 와 S_{oy} 는 x -와 y -방향으로의 바닥경사를 나타낸다. 바닥마찰경사 S_{fx} 와 S_{fy} 는 Manning 식을 이용한 식 (3)과 같이 표현된다.

$$S_{fx} = \frac{un^2\sqrt{u^2+v^2}}{d^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{vn^2\sqrt{u^2+v^2}}{d^{4/3}} \quad (3)$$

2.2 비구조적좌표계상에서의 유한체적법

유한체적법은 삼각형이나 사각형과 같은 비구조적 격자를 비교적 쉽게 다룰 수 있어 보다 복잡한 문제에 적용이 용이하며, 적분형태의 공식을 사용하고 있으며 fractional step method과 결합하여 사용하기가 용이한 장점이 있다(Weiyan, 1992).

천수방정식 형태의 지배방정식인 식 (1)을 임의의 격자에서 적분하면 유한체적법의 기본방정식이 식 (4)와 같이 얻어진다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{U} dA + \oint_{\Omega} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} d\Omega = \oint_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega \quad (4)$$

여기서 $\mathbf{G}$ 는 flux tensor, A 와 Ω 는 control volume L 의 면적과 경계를 나타내며 $\mathbf{n}$ 은 경계에 수직인 바깥방향으로의 단위벡터이다. x -방향을 기준으로 rotational invariance를 이용하면 flux 항은 식 (5)와 같아진다.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{T}_s \mathbf{U}) \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{T}_s$ 는 변환 매트릭스로서 식 (6)과 같다.

$$\mathbf{T}_s(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

식 (5)를 이용하면 식 (4)는 식 (7)과 같이 전개된다.

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^N \int_{A_s}^{A_{s+1}} \mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{T}_s \mathbf{U}) dA = \mathbf{S} \quad (7)$$

새로운 변수 $\mathbf{U} = \mathbf{T}_s \mathbf{U}$ 를 도입하면 그림 1의 $\hat{x}$ 와 $\hat{y}$ 와 평행한 좌표계로 변환이 되며, $(\hat{x}, \hat{y})$ 공간상의 이차원 문제가 되어 비구조적좌표계를 이용할 수가 있다.

그림 1. 이차원 공간에서의 비구조적 격자계

2.3 Fractional Step Method

Fractional step method를 사용하면 이차원의 천수방정식을 x -축과 y -축에 평행한 두 개의 일차원 문제로 나누어 해석할 수가 있으므로 수치모형의 구현이 용이해지며, Brocchini 등(2001)과 Wang 등(2000) 등 외에도 이를 이용한 여러 수치모형의 개발에 이용되어 왔다. 이를 식으로 표현하면 식 (8)과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (8)$$

식 (8)의 편미분방정식은 초기치 문제(initial boundary value problem)이므로 양해적 보존형 이산화 방법으로 해석하였다. 그 이유는 보존형의 지배방정식 이산화가 불연속을 포함하는 문제의 해석에 보다 유리하기 때문이다. 이를 x -축에 대하여 식으로 나타내면 식 (9)와 같이 기술된다.

$$\mathbf{U}_i^{k+1} = \mathbf{U}_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{E}_{i+1/2}^k - \mathbf{E}_{i-1/2}^k) + \Delta t \mathbf{S}_{xi} \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{E}_{i+1/2}^k$ 와 $\mathbf{E}_{i-1/2}^k$ 는 각각 격자 사이에서의 수치적 flux를 이며 $\mathbf{S}_{xi}$ 는 x 축 방향으로의 바닥과

마찰경사를 나타낸다. 공간적으로 분할된 식 (8)은 다시 flux 항과 source 항으로 분할된다. 분할된 flux 항은 편미분방정식 형태이며, source 항은 상미분 형태이다. x -축에 대하여 정리하면

$$\left. \begin{array}{l} PDE : \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0 \\ IC : \mathbf{U}^k \end{array} \right\} \xrightarrow{\Delta t} \mathbf{U}^{k+1} \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} ODE : \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{S} \\ IC : \mathbf{U}^{k+1} \end{array} \right\} \xrightarrow{\Delta t} \mathbf{U}^{k+1} \quad (11)$$

식 (10)과 (11)로 구한 해는 시간에 대해 일차정확도를 지닌다. 정확한 해를 구하기 위해서는 고정확도가 요구되므로 이차정확도를 확보하기 위하여 식 (12)를 이용하였다(Toro, 1999).

$$\left. \begin{array}{l} ODE : \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{S} \\ IC : \mathbf{U}^k \end{array} \right\} \xrightarrow{\Delta t/2} \mathbf{U}_*^{k+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} PDE : \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0 \\ IC : \mathbf{U}_*^{k+1} \end{array} \right\} \xrightarrow{\Delta t} \mathbf{U}_{**}^{k+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} ODE : \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{S} \\ IC : \mathbf{U}_{**}^{k+1} \end{array} \right\} \xrightarrow{\Delta t/2} \mathbf{U}^{k+1} \quad (12)$$

식 (12)의 과정을 이차원 공간으로 확장하기 위해 식 (13)이나 (14)를 이용할 수 있다.

$$\mathbf{U}^{n+1} = y^{\Delta t/2} x^{\Delta t/2} y^{\Delta t/2} x^{\Delta t/2} (\mathbf{U}^n) \quad (13)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = x^{\Delta t/2} y^{\Delta t/2} x^{\Delta t/2} y^{\Delta t/2} (\mathbf{U}^n) \quad (14)$$

여기서 $x^{\Delta t}$ 는 식 (12)의 과정을 나타낸 것이고 $y^{\Delta t}$ 는 y -축에 대한 식 (12)과정을 나타낸다.

Harten, Lax와 van Leer는 HLL로 알려진 Riemann해를 풀기 위한 수치기법을 개발하였다. HLL 기법은 두 개의 파에 의해서 세 개의 상수로 Riemann 해가 구성되어 있는 것으로 가정한 기법이다. HLL 기법이 Roe 기법에 비해 우수한 점은 HLL 기법의 경우 마른바닥의 처리를 습윤바닥과 마찬가지로 해석적으로

처리하여 일정깊이 이상의 수심이 마른바닥에도 항상 존재한다는 비물리적 가정을 기반으로 하는 Roe 기법보다 정확한 계산결과를 제공한다는 점이다.

그러나 이차원 문제의 지배방정식에서 $\mathbf{U}$ 는 세 개의 성분으로 구성되어 있는 벡터로써 Riemann 해는 그림 2와 같이 세종류 파속 S 에 의해 네 가지의 상수구간으로 분할되어 구성되어 있다. 따라서 이차원 천수방정식의 경우 HLL 기법에서 가정한 사항에 문제가 발생하게 된다. 이와 같은 HLL 기법의 단점을 보완한 기법이 HLLC 기법으로 Fraccarollo와 Toro(1995)에 의해 제안되었다. 이 기법은 이차원 문제에도 물리적으로 타당한 가정을 기반으로 하고 있다(Billett과 Toro, 1997).

지배방정식을 HLLC Riemann 해를 이용하여 해석하면 지배방정식의 변수 벡터 $\mathbf{U}$ 는 식 (15)와 같이 파속에 따라 그림 2와 같이 네 개의 구간으로 나뉘어 주어진다.

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{for } 0 \leq S_L \\ \mathbf{U}_L^* & \text{for } S_L \leq 0 \leq S_* \\ \mathbf{U}_R^* & \text{for } S_* \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{U}_R & \text{for } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

식 (15)에 나온 파속은 식 (16)과 같다.

$$\begin{aligned} S_L &= \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u_* - \sqrt{gh_*}) \\ S_* &= u_* = \frac{u_L + u_R}{2} + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \\ S_R &= \max(u_L + \sqrt{gh_L}, u_* + \sqrt{gh_*}) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 첨자 L 과 R 은 그림 1에 나타난 계산 요소를 의미하며 h_* 는

$$h_* = \frac{(u_L + 2\sqrt{h_L} - u_R - 2\sqrt{h_R})^2}{16} \quad (17)$$

과 같다. HLLC flux는 식 (18)과 같이 주어진다.

$$\mathbf{E}_{i+1/2}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{E}_L \\ \mathbf{E}_L^* = \mathbf{E}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) \\ \mathbf{E}_R^* = \mathbf{E}_R + S_R(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_R^*) \\ \mathbf{E}_R \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\text{for } 0 \leq S^* \\
&\text{for } S_L \leq 0 \leq S^* \\
&\text{for } S^* \leq 0 \leq S_R \\
&\text{for } S_R \leq 0
\end{aligned} \tag{18}$$

여기서 첨자 $i+1/2$ 는 그림 1의 계산 요소 L 과 R 사이의 경계를 의미한다.

그림 2. HLLC Riemann 해의 구조

2.4 이동경계(Wet and Dry) 처리 기법

수치모형의 이동경계 처리여부는 이차원 모형의 적용 범위에 매우 큰 영향을 미치는 요소이다. 서론에 기술한 바와 같이 이성태(1998), Beffa와 Connell(2001), Bradford와 Sanders(2002) 등이 마른바닥 처리를 통하여 이동경계 처리가 가능한 수치모형을 개발하였다. 그러나 이 모형들에서 구현된 마른바닥처리 기법은 모두 해석적 기법에 근거한 것이 아니었다. 본 연구에서는 HLLC Riemann 해를 이용하여 마른바닥에서도 해석적인 기법을 적용하여 이동경계를 모의 할 수 있도록 하였다.

즉 식 (16)은 해석대상 모든 영역에 일정 깊이 이상의 수심이 존재하는 경우에만 적용이 가능하다. 만약 계산 대상 격자 좌우에 마른바닥 (수심 = 0.0 m)이 존재한다면 shock이 발생하지 않게 되어 다른 방법을 이용하여 파속을 계산하여야 한다. 본 연구에서는 인공적으로 계산영역에 미소 수심을 부여하는 방법을 사용하지 않고, Fraccarollo와 Toro(1995)가 제시한 해석적인 방법을 이용하여 마른바닥에서의 파속을 계산하였다. 계산 요소의 좌측이 마른바닥인 경우의 파속은

$$\begin{aligned}
S_L &= u_R - 2\sqrt{gd_R} \\
S^* &= S_L \\
S_R &= u_R + \sqrt{gd_R}
\end{aligned} \tag{19}$$

이고 우측이 마른바닥인 경우 파속은

$$\begin{aligned}
S_L &= u_L - \sqrt{gd_L} \\
S^* &= S_R \\
S_R &= u_L + 2\sqrt{gd_L}
\end{aligned} \tag{20}$$

과 같다. 식 (19) 및 (20)과 같이 해석적 기법을 기반으로 수심과 유속을 계산하기 때문에 계산된 수심과 유속은 정확하게 계산된다. 또한 식 (16)을 식 (19) 및 (20)으로만 바꾸어 사용하는 것 이외에 별도의 다른 처리가 필요 없어 모형의 구현이 매우 쉬운 장점이 있다.

그러나 마른바닥 인근에서는 일반적으로 수심이 매우 작다. 또한 계산 요소 면적에 대하여 평균된 수심을 사용하므로 일반적으로 수심은 보다 더 작게 되며 수치적으로 안정성이 떨어지는 요인으로 작용한다. 따라서 안정적 해를 구하기 위해서 일정 미소수심 ϵ 보다 큰 경우에 한하여 $u^{k+1} = (du)^{k+1}/d^{k+1}$ 를 이용하여 유속을 계산하고 수심이 ϵ 보다 작은 경우에는 유속을 강제적으로 0.0 m/s로 부여하였다. 본 연구에서 사용된 ϵ 은 $1.0 \times 10^{-3} \sim 1.0 \times 10^{-10}$ m이며 보다 작은 값의 사용도 가능하다. 실제 현상에서 수심이 ϵ 보다 작은 경우에 파찰 등의 원인으로 인하여 유속이 거의 0.0 m/s가 되어 물이 흐르지 않게 되므로, 이와 같은 가정은 타당하다 할 수 있다.

2.5 TVD~WAF 기법의 적용

이차정확도 기법과 연관된 비물리적 진동을 제어하기 위해 TVD 기법을 이용하였다. TVD 기법을 이용한 WAF 기법은 식 (21)과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
E_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(E_i + E_{i+1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \text{sign}(c_k) \phi_i \\
&+ 1/2^k \Delta E_{i+1/2}^k
\end{aligned} \tag{21}$$

여기서 $E_{i+1/2}^k = E(U_{i+1/2}^k)$ 는 식 (18)을 대입하여 이용하고, c_k 는 파속 S_k 의 k 번째 파에 해당하는 Courant number이다. $\Delta E_{i+1/2}^k = E_{i+1/2}^{k+1} - E_{i+1/2}^k$ 이

(a) 댐붕괴와 문제 모식도

(b) 수위 계산결과 ($h_r=1.0$ m, $h_t=0.1$)

(c) 계산결과 측면도 ($h_r=1.0$ m, $h_t=0.1$ m)

(d) 계산결과 측면도 ($h_r=1.0$ m, $h_t=0.0$ m)

그림 3. 댐붕괴와 해석 결과(댐붕괴 8.0초 후)

(a) 계산격자 및 계산 Shock Wave Front

(b) 경사각도수 현상 수면 계산 결과

그림 4. 경사각도수 현상 해석 결과

며 $\phi_{i+1/2}^k$ 은 WAF 흐름을 제한자 함수이다.

2.6 Source 항 처리 기법

본 연구에서 source 항은 양해적 Euler 방법을 이용하여 해석하였다. 이산화 방법은 pointwise 형태의 이산화 방법을 이용하여 해석을 수행하였다. 즉

$$S_i = \frac{1}{2}(S_{i+1/2} + S_{i-1/2}) \quad (22)$$

여기서 $S_{i+1/2}$ 은 계산요소 i 와 $i+1$ 사이의 경사를 나타낸다. source 항 중 마찰항은 식 (3)과 같이 Manning 식을 이용하여 산정하였다.

3. 모형의 적용과 검증

3.1 댐붕괴파 해석

본 연구에서 개발된 모형의 정확성을 검증하기 위하여, 이상적으로 가정한 댐붕괴파의 전파양상을 해석하였다. 그림 3(a)에서 상류단의 수심은 h_r , 하류단의 수심은 h_t 이고 대상 영역을 200×100 의 격자망으로 구성하였다.

그림 3(b)는 댐붕괴 8.0초 후의 수면양상을 나타낸 것이다. 계산영역 전반에 걸쳐 습윤상태의 수심이 초기 조건에 부여되었다. 즉 댐 상류 수심 h_r 는 1.0 m로 댐 하류 수심 h_t 은 0.1 m로 초기조건을 부여하고 모의를 수행한 결과이다. 반면 그림 3(c)는 계산영역의 하류부가 마른바닥인 경우 즉, 댐 상류부 수심 h_r 은 1.0 m이고 댐 하류부 수심 h_t 을 0.0 m로 초기조건을 부여하였을 경우, 8.0초가 경과한 후의 계산결과 이다. 그림 3(b)와 (c)에 나타난 바와 같이 계산된 수심은 해석해(Liggett 1994, Weiyan 1992)와 매우 잘 일치하고 있어 모형의 정확성이 우수한 것으로 판단된다.

3.2 경사각도수 모의

다음에는 그림 4에 나타난 바와 같이 수로의 측면벽이 좁아지는 경우에 발생하는 경사각도수 현상을 40×30 의 비구조적 격자계 상에서 모의하였다. 유입구에서 수심은 1.0 m, 유속은 8.75 %로 경계조건을 부여하였다. 수로 측면 길이는 40 m, 유입구의 폭은 30 m이며 8.95° 의 각도로 수로가 좁아지는 형상이다. 부여된 조건에 의하여 유입구에서는 사류흐름을 유지하고 하류

단에서는 경사각 도수의 발생으로 인하여 상류와 사류가 동시에 존재하게 된다.

그림 4(b)와 같이 계산된 결과는 도수 경사각 $\beta \approx 30^\circ$ 이고 하류부의 상류(subcritical flow)부분 수위가 1.498 m~1.507 m이며, 해석적으로 구한 하류부의 상류(subcritical flow)부분의 수위는 1.5 m이고 도수의 경사각 β 는 30° 로 계산결과는 매우 정확한 것으로 판단된다.

3.3 변화하는 지형에서의 도수 모의

본 수치실험에서는 변화하는 지형에서의 도수현상을 모의하였다. 사용된 격자는 80×5 이다. 모의 대상 지형 z_b 는 아래와 같은 식으로 표현된다.

$$z_b = \begin{cases} -5 \left[\sin \left(\pi \left(\frac{x-125}{750} \right) \right) \right] & , \text{ for } 125 \leq x \leq 875 \\ 0 & , \text{ for } x \leq 125, x \geq 875 \end{cases} \quad (23)$$

상류단 경계조건으로 유속과 수위는 각각 2 %와 10 m로 주어지고, 하류단 경계조건으로는 각각 $20 \text{ m}^3/\text{s}$ 의 유량과 7 m의 수위가 부여되었다. 그림 5에서와 같이 해석해(김원, 1999)와 본 모형으로부터 계산된 수치해는 잘 일치하고 있다.

그림 5. 변동지형에서의 도수현상 모의 결과

3.4 실험 결과와의 비교

Bellos 등(1992)은 축소-확대 수로에서의 이차원 댐붕괴에 의한 흐름 양상에 관한 실험을 수행하였다. 수로의 제원은 가로 21.20 m, 세로 1.40 m 였으며, 삼차원적 흐름 효과를 배제하기 위해서 바닥을 평평하게, 벽

은 직각으로 설치하고 축소-확대 구간 벽의 각을 완만하게 변화도록 하였다. 수로의 상류단은 막혀 있고 수로의 하류단은 물이 자유롭게 흘러나리도록 하였다. 댐은 이 수로의 중앙부에 놓여 있다. 실험에 관한 자세한 사항은 Bellos 등(1992)에 상술되어 있다.

본 연구에서는 상기 실험 중 기울기가 0.002인 마른수로에서의 댐 붕괴와 실험을 재현하는 수치모의를 수행하였다. 댐 직상류부의 수심은 0.3 m로 하였다. 수로가 기울어져 있기 때문에 댐의 바로 상류 부분의 수심은 0.3 m이고 위로 올라갈 수록 수심이 작아진다. 댐 하류부는 마른바닥 처리를 하였다. 사용한 격자는 42×14의 비구조적 격자이다. 그림 6(a)는 이 격자를 보여준다. 사용한 조도계수는 0.013이다.

그림 6(b)~(d)는 실험자료와 수치모형의 계산 결과를 비교한 것으로 수치모형이 물리적 양상을 양호하게 재현하고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 fractional step method를 이용하여 이차원 천수방정식을 비구조적 좌표계상에서 해석하였다. fractional step method의 장점은 이차원 문제를 두 개의 연속된 일차원 문제로 재구성하여 해석을 수행함으로써 보다 간단하고 다양한 기법을 채용할 수 있다는 점이다. 따라서 각각의 일차원 문제는 보다 효율적인 기법을 이용하여 해석이 수행되고 결과적으로 계산시간

이 단축되게 된다. 분할된 일차원 문제는 이차정확도의 WAF 방법으로 해석하였다. Riemann 해를 해석하기 위해 HLLC 기법을 이용하였으며 이차정확도와 관련된 비물리적 진동의 제어를 위해 TVD 기법을 사용하였다.

개발된 모형의 정확성과 적용성을 검증하기 위하여 댐붕괴와 해석, 비구조적 격자계에서의 경사각 도수, 변동지형에서의 도수, 이동경계를 포함하는 실험결과와의 비교를 수행하였다. 계산해와 해석해 및 실험 측정 결과와 비교한 결과 수치모형을 이용하여 계산한 결과는 매우 정확하였다. 결과적으로 개발된 모형은 매우 정확한 결과를 계산하고 적용성 또한 우수한 것으로 판단되어 추가적인 수정 없이 댐붕괴로 인한 흐름의 해석, 제방월류와 붕괴로 인한 범람현상 및 침수구역 예측 등 매우 다양한 문제에 이용이 가능하다.

보다 정확하고 안정적이며 효율적으로 계산을 수행하는 모형개발에 관한 추가적인 연구가 필요하다. 천수방정식은 매우 실용적이면서 공학적으로 우수한 결과를 제공하지만 근본적으로 이차원흐름만을 모의하며 수압을 정수압으로 가정하는 한계가 있다. 따라서 이와 같은 측면을 보완하기 위해 Boussinesq equations을 이용하여 secondary wave와 같은 정수압 분포의 압력분포 가정 하에서 모의할 수 없는 현상을 해석하기 위한 추가적인 연구가 필요한 것으로 사료된다.

(a) 계산 격자 및 비교지점

(b) A 지점 비교결과

(c) B 지점 비교결과

(d) C 지점 비교결과

그림 6. 계산결과와 실험결과와의 비교

참 고 문 헌

- 강민구, 박승우 (2003). "ENO 기법을 이용한 2차원 유한체적 수치모형." *한국수자원학회논문집*, 36권, 1호, pp. 1-13.
- 김원 (1999). "고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석모형의 개발." 박사학위논문, 경북대학교.
- 이성태 (1998). "이차원 수리 충격파 모의를 위한 유한체적 비정상 흐름 모형." 석사학위논문, 서울대학교.
- Beffa, C., and Connell, R.J. (2001). "Two-dimensional flood plain flow. I : model description." *J. of Hydrologic Engineering*, Vol. 6, No. 5, pp. 397-405.
- Bellos, C. V., Soulis, J. V., and Sakkas, J. G. (1992). "Experimental investigation of two-dimensional dam-break induced flows." *J. of Hydraulic Research*, Vol. 30, No. 1, pp. 47-63.
- Billett, S. J., and Toro, E. F. (1997). "On WAF-Type Schemes for Multidimensional Hyperbolic Conservation Laws." *J. of Computational Physics*, Vol. 130, No. 1, pp. 1-24.
- Bradford, S.F., and Sanders, B.F. (2002). "Finite-volume model for shallow-water flooding of arbitrary topography." *J. of Hydraulic Engineering*, Vol. 128, No. 3, pp. 289-298.
- Brocchini, M., Bernetti, R., Mancinelli, A., and Albertini, G. (2001). "An efficient solver for nearshore flows based on the WAF method." *Coastal Engineering*, Vol. 43, pp. 105-129.
- Fraccarollo, L., and Toro, E.F. (1995). "Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems." *J. of Hydraulic Research*, Vol. 33, No. 6, pp. 843-864.
- Glaister, P. (1988). "Approximate Riemann solutions of the shallow water equations." *J. of Hydraulic Research*, 26, No. 3, pp. 293-306.
- Kim, D. H., Kim, W. G., Chae, H. S. and Park, S. G. (2002). "Development of 2D Dam Break Flow Analysis Model using Fractional Step Method." *Water Engineering Research*, Vol. 3, No. 1, pp. 23-30.
- Liggett, J. A. (1994). *Fluid mechanics*, McGraw-Hill.
- Mingham, C.G., and Causon, D.M. (1999). "Calculation of unsteady bore diffraction using a high resolution finite volume method." *J. of Hydraulic Research*, Vol. 38, No. 1, pp. 49-56.
- Thacker, W.C. (1981). "Some exact solutions to the nonlinear shallow water wave equations." *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 107, pp. 499-508.
- Wang, J.S., Ni, H.G., and He, Y.S. (2000). "Finite-difference TVD scheme for Computation of dam-break problems." *J. of Hydraulic Engineering*, Vol. 126, No. 4, pp. 253-262.
- Weiyang, T. (1992). *Shallow water hydrodynamics*, Elsevier.
- Zhao, D.H., Shen, H.W., Lai, J.S., and Tabios III, G.T. (1996). "Approximate Riemann solvers in FVM for 2d hydraulic shock wave modeling." *J. of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 122, No. 12, pp. 692-702.
- Zhao, D.H., Shen, H.W., Tabios III, G.Q., Lai, J.S., and Tan, W.Y. (1994). "A finite volume two-dimensional unsteady flow model for river basins." *J. of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 120, No. 7, pp. 863-883.
- Zoppou, C., and Stephen, R. (1999). "Catastrophic collapse of water supply reservoirs in urban areas." *J. of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 125, No. 7, pp. 686-695.
- Zoppou, C., and Stephen, R. (2000). "Numerical solution of two-dimensional unsteady dam break." *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 24, pp. 457-475.

(논문번호:03-43/접수:2003.04.21/심사완료:2003.08.21)