고르지 않은 바닥을 지나는 천수 흐름에 대한 유한체적 모형 Finite-Volume Model for Shallow-Water Flow over Uneven Bottom

황 승 용*

Hwang, Seung-Yong

Abstract

For analyzing shallow-water flows over the uneven bottom, the HLLL scheme and the divergence form for bed slope source term (DFB) technique, respectively were applied to the flux gradient and the bottom gradient source terms in a finite-volume model for the shallow water equations. And also the model incorporated the volume/free-surface relationship (VFR) to consider the partially submerged cells (PSC). It was identified that a simpler version of the weighted surface-depth gradient method in the MUSCL was equivalent to the original one in the accuracy for 1D steady flows. It was verified that the flux gradient term and the bottom gradient source term were well-balanced exactly by the VFR for the 1D PSC. The VFR for the triangular PSC settled the problem which the governing equations were not well-balanced by the DFB technique for the 2D PSC. There were good agreements in simulations and experiments for 2D dam-break flows over a triangular sill and a round bump. In addition, the partial dam-break flow was successfully simulated for flooding of roughnesses in an irregular bottom as well as a sloping one. Therefore, this model is expected to be applied to the real river with uneven topography.

Keywords : shallow water equations, uneven bottom, WSDGM, VFR, DFB

요 지

고르지 않은 바닥을 지나는 천수 흐름을 해석하기 위해 천수방정식의 흐름을 경사항과 바닥 경사 생성항에 대해 HLLL 기법과 DFB (Divergence Form for Bed slope source term) 기법을 각각 적용하여 유한체적 모형을 구성하였다. 또한, PSC (Partially Submerged Cell)의 고려를 위해 VFR (Volume/Free-surface Relationship)도 이용하였다. MUSCL에서 WSDGM (Weighted Surface-Depth Gradient Method)을 보다 단순하게 고쳐도 원래의 방법과 정확도가 동등함을 1차원 정상 흐름에 대해 확인하였다. 1차원 PSC에 대한 VFR를 통해 흐름을 경사항과 바닥 경사 생성항의 선평형성이 정확하게 충족됨을 입증하였다. 2차원 PSC에서 DFB 기법으로는 지배방정식의 선평형성이 충족되지 않은 문제를 삼각형 격자에 대한 VFR를 이용하여 해소하였다. 삼각형 턱과 둥근 용기를 지나는 2차원 댐 붕괴 흐름에 대한 모의에서 실험실 실험 결과와 잘 부합됨을 확인하였다. 또한, 부분 댐 붕괴 흐름에 대한 모형의 적용에서 경사면은 물론 불규칙 바닥에서도 요철의 잠금이 성공적으로 모의되었다. 따라서 고르지 않은 실제 하천 지형에 대한 이 모형의 적용성이 기대된다.

핵심용어 : 천수방정식, 고르지 않은 바닥, WSDGM, VFR, DFB

1. 서 론

Riemann 해법은 1950년대 말 S. K. Godunov의 제안으

로 시작되었으나, 그 자신이 증명한 바와 같이 수치해의 정확도가 높아야 1차원 한계로 이후 약 20년간 주목받지 못했다(van Leer, 2006). 공간에 대한 2차 정확도는 van Leer

* 한국건설기술연구원 수자원·환경연구본부 하천해양연구실 수석연구원 (e-mail: syhwang@kict.re.kr, Tel: 031-910-0653)
Senior Researcher, River and Coast. Res. Div., Water Res. & Env. Res. Dept., KICT, Gyeonggi-do 411-712, Korea

(1979)에 의해 달성되었으며, 이 기법은 MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws)로 불린다. 격자 내에서 정의되는 어떤 보존변수, U 에 대해 어떤 격자, i 와 그 인접 격자, j 사이에서 Riemann 해, $R(U_i, U_j)$ 의 정확도는, 보존변수가 격자 안에서 조각적 상수(piecewise constant)로 정의되면, Godunov 방법처럼 공간에 대해 1차이다. 이에 비해, MUSCL에서는 해당 격자와 인접한 격자의 보존변수가 고려된 경사로부터 보존변수가 격자 내에서 조각적 선형(piecewise linear)으로 자료의 재구축(data reconstruction)이 이루어진다. 이러한 선형 재구축(linear reconstruction)을 통해 Riemann 해, $R(U_{ij}, U_{ji})$ 가 얻어짐으로써 공간에 대해 2차의 정확도가 가능하다.

Riemann 해법은 쌍곡선형 방정식에서 흐름률(flux)의 정확한 계산이 가능한 방법이므로 천수방정식과 같이 생성항이 있는 비제차(inhomogeneous) 방정식에 대해서는 단계분리방법(fractional step method)이 적절한 선택일 수 있다(LeVeque, 2002). 그러나 경사면을 지나는 천수 흐름에 대해 이 방법은 정상 또는 준정상(quasi-steady) 상태에서 흐름률의 경사항과 바닥 경사에 의한 생성항의 선형형성(well-balancedness)이 충족되기 어려운 것으로 알려져 있다(LeVeque, 1998).

Bermudez and Vázquez (1994)는 선형형성에 대한 천수방정식의 보존 특성(conservation property)을 정의하고 이를 만족하는 생성항의 상류차분 기법을 고안하여 1차원 문제에 적용하였다. Vázquez-Cendón (1999)은 이를 비균일(nonuniform) 격자에 대해 적용할 수 있도록 개선하였으며, Hubbard and García-Navarro (2000)는 2차원 문제로 확장하였다.

LeVeque (1998)은 자신이 고안한 파전파방법(Wave-Propagation Method, WPM)을 준정상 상태에 적용하면서 바닥 경사를 격자 내 수심의 변화로 간주하여 선형형을 도모하였으나, 도수(hydraulic jump)의 경우에 대해서는 한계가 있었다. 이후 George (2004, 2008)는 경사에 의한 생성항의 효과를 Riemann 문제에 포함하는 방법으로 WPM을 개선하였으나, 방법의 복잡성은 가증되었다.

Zhou et al. (2001)은 선형 재구축에서 수심 대신 수위를 이용함으로써 선형형성이 비교적 단순하게 충족되는 방법을 제안하였다. 이 방법은 수면경사법(Surface Gradient Method, SGM)으로 명명되어 기존의 수심경사법(Depth Gradient Method, DGM)과 구분된다. Valiani and Begnudelli (2006)는 2차원 비직교(non-orthogonal) 격자에서 바닥 경사 결정의 어려움으로 SGM의 선형형성이 충족되지 않

음을 지적하고, 이를 우회하기 위해 발산 형태의 바닥 경사 생성항(Divergence Form for Bed slope source term, DFB)을 고안하였다. Aureli et al. (2008a)은 DGM과 SGM이 흐름의 양상에 따라 적용성의 차이가 있음을 지적하고 격자의 변에서 두 방법에 의한 수심을 모두 구하여 격자 내 Froude 수에 따른 가중치를 적용하는 가중 수면-수심 경사법(Weighted Surface-Depth Gradient Method, WSDGM)을 제안하였다.

경사면에서 선형형성과 관련된 문제 중 하나는 완전히 잠기지 않고 일부만 잠기는 격자(Partially Submerged Cell, PSC)이다. PSC에서는 격자의 중심에서 보존변수가 격자 내 평균과 일치되지 않은 문제가 있으며, 특히, 수위가 이용되는 SGM의 선형 재구축에서 어려움이 있다. 이를 해소하기 위해 Begnudelli and Sanders (2006)는 삼각형 격자에 대해 체적-자유수면 관계(Volume/Free-surface Relationship, VFR)를 도출하였다.

국내에서 Kim and Cho (2005)는 SGM에서 생성항에 나타나는 수심이 격자 내 평균 수위가 아니라 선형 재구축된 수위로부터 각 변에서 수심을 구하여 평균한 것이어야 한다고 주장하였다. Kim et al. (2011)은 2차원 모형에 준정상 WPM을 적용하였다. 또한, Jeong and Kim (2011)은 George (2004)가 제안한 방법을 도입하였으나, 해법이 WPM에 의한 것은 아니었다.

이 연구에서는 WSDGM에 비해 보다 간편한 방법을 제안하고 PSC에 대한 VFR와 생성항에 대한 DFB 기법을 이용하여 선형형성을 검토한다. 또한, 이를 통해 수립된 2차원 모형을 댐 붕괴 흐름(dam-break flow)에 대해 적용한다. 이때 적용된 모형은 Hwang and Lee (2011, 2012)에 따랐으며, 근사 Riemann 해법에 HLL (Harten-Lax-van Leer-Linde) 기법, 선형 재구축에 다중경사(multi-slope) MUSCL이 적용되었다.

2. 지배방정식과 해법

지배방정식은 다음과 같이 2차원 평면에서 정의되는 천수방정식이다.

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \quad (1a)$$

여기에서, 아래 첨자 t 그리고 x 와 y 는 각각 시간과 공간에 대한 편미분을 의미하고, 보존변수의 벡터, U , x 방향의 흐름률 벡터, F , y 방향의 흐름률 벡터, G , 그리고 생성항 벡터, S 는 각각 다음과 같다.

$$U = [h, hu, hv]^T \quad (1b)$$

$$\mathbf{F} = [hu, hu^2 + gh^2/2, huv]^T \quad (1c)$$

$$\mathbf{G} = [hv, huv, hv^2 + gh^2/2]^T \quad (1d)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_f \quad (1e)$$

여기에서, h 는 수심, u 는 x 방향 유속, v 는 y 방향 유속, g 는 중력가속도, 그리고 $\mathbf{S}_0$ 와 $\mathbf{S}_f$ 는 각각 바닥 경사와 마찰에 의한 생성항으로 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_0 = [0, -ghb_x, -ghb_y]^T \quad (1f)$$

$$\mathbf{S}_f = [0, -n^2 gh^{-1/3} u \sqrt{u^2 + v^2}, -n^2 gh^{-1/3} v \sqrt{u^2 + v^2}]^T \quad (1g)$$

여기에서, b 는 바닥 표고 그리고 n 은 Manning 계수이다.

Eq. (1)을 임의의 검사체적, Ω 에 대해 Gauss의 발산 정리를 이용하여 적분하면 다음과 같다.

$$\iint_{\Omega} \mathbf{U}_i d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{G}(\mathbf{U})] \cdot \mathbf{n} = \iint_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{U}) d\Omega \quad (2)$$

여기에서, $\mathbf{n}$ 은 경계, $\partial\Omega$ 에서 외부로 향하는 단위 법선 벡터이다.

Eq. (2)를 m 개의 변으로 이루어진 격자, i 에 대해 적용하고 천수방정식의 회전 불변성(rotational invariance)을 이용하면, 다음과 같이 이산화된 방정식을 얻는다(Lee and Lee, 1998).

$$\dot{\mathbf{U}}_i = -(1/A_i) \sum_{k=1}^m \mathbf{T}(\theta_k)^{-1} \mathbf{F}_k(\bar{\mathbf{U}}_k) L_k + \mathbf{S}(\mathbf{U}_i) \quad (3)$$

여기에서 A 는 격자의 면적, L 은 변의 길이, θ 는 변이 x 축과 이루는 각도, $\dot{\mathbf{U}}$ 은 시간에 대한 $\mathbf{U}$ 의 도함수, $\bar{\mathbf{U}}$ 은 변에서 외부로 법선 방향인 $\mathbf{U}$ 의 성분, 그리고 회전 행렬, $\mathbf{T}(\theta)$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{T}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

Fig. 1과 같이 격자의 한 변에 대한 국부 좌표계를 생각하면, 천수방정식에서 Riemann 문제는 다음과 같은 1차원 쌍곡선형 미분방정식의 초기치 문제이다.

$$\bar{\mathbf{U}}_t + [\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})]_{\bar{x}} = 0, \quad \bar{\mathbf{U}} = \begin{cases} \bar{\mathbf{U}}_{ij} & \bar{x} < 0 \\ \bar{\mathbf{U}}_{ji} & \bar{x} > 0 \end{cases} \quad (5)$$

Riemann 해법은 Eq. (5)를 풀기 위한 방법으로 정확(exact) 해법에 의하면 정확 Riemann 해법, 근사(approximate) 해법에 의하면 근사 Riemann 해법으로 불린다

Fig. 1. Local Coordinate System ($\bar{x}, \bar{y}$)

(Toro, 2001).

비구조 격자에서 Eq. (3)의 수치해에 대한 안정조건은 다음과 같다(Batten et al., 1996).

$$\Delta t \leq \frac{A}{\beta \max_k (|\lambda_k| L_k)} \quad (6)$$

여기에서 Δt 는 시간 간격, λ 는 특성파의 속도, 그리고 β 는 계수로서 1차원에 대해 1이고 삼각형 격자에 대해 3이다.

3. 1차원 정상 흐름

3.1 가중 수면-수심 경사법

Aureli et al. (2008a)은 MUSCL의 선형 재구축에서 기존의 DGM과 Zhou et al. (2001)의 SGM에 의한 경사로부터 얻은 수심을 가중 평균하여 다음과 같이 수심을 결정하였다.

$$\bar{h} = \omega h^{\text{DGM}} + (1 - \omega) h^{\text{SGM}} \quad (7)$$

여기에서 $\bar{h}$ 는 변에서 가중 평균된 수심, 위 첨자, DGM과 SGM은 각각 해당 선형 재구축 방법, 그리고 ω 는 가중치로서 해당 격자의 Froude 수(Fr)로부터 다음과 같이 결정된다.

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi Fr}{Fr_{\text{lm}}} \right) \right] & 0 \leq Fr \leq Fr_{\text{lm}} \\ 1 & Fr > Fr_{\text{lm}} \end{cases} \quad (8)$$

여기에서 Fr_{lm} 는 가중치 적용이 결정되는 매개변수이다. 즉, 어떤 격자 내에서 Froude 수가 Fr_{lm} 보다 크면 DGM으로 선형 재구축이 이루어지고, Fr_{lm} 이하이면 Froude 수에 따른 가중치로부터 DGM과 SGM에 의한 수심이 조정되는 것이다. 이 때 van Leer 제한자가 채택되었으며, 이 연구에서도 동일하게 적용되었다.

그런데, Eq. (7)에서 알 수 있듯이, WSDGM은 DGM과 SGM 두 방법 모두에 의한 경사의 결정과 재구축 그리고 Eq. (8)을 위한 계산이 모든 격자와 변에서 이루어져야 한다(물론, 수심에 대해서만 선형 재구축이 이루어기 때문에 반드시 2배의 계산이 부가되는 것은 아니다). 또한, Fr_{lm} 의 결정을 위해 적용되는 문제마다 민감도 분석이 필요할 수도 있다. 이에 대해 Aureli et al. (2008a)은 정상 문제에서 계산 오차가 비교적 작은 $Fr_{lm}=2$ 인 값을 모든 문제에 적용한 바 있다.

DGM과 SGM의 장점을 고루 반영하면서 매개변수를 없애는 방법으로 단순히 흐름 양상이 사류이면($Fr \geq 1$) DGM을 적용하고, 상류인 경우($Fr < 1$)에는 SGM을 적용하는 방법(편의를 위해, SDGM으로 부른다)을 생각할 수 있다. 다만, 해당 격자의 흐름 양상이 상류일지라도 인접 격자의 흐름 양상이 사류이면 DGM을 적용한다.

Aureli et al. (2008a)은 경사면을 마찰 없이 지나는 1차원 정상 흐름에 대해 WSDGM을 시험하기 위해 $[-10\text{ m} \leq x \leq 10\text{ m}]$ 구간에 포물선형 용기(parabolic bump)가 있는 다음과 같은 문제를 설정하였으며, Goutal (1997)의 제안을 보다 가혹하게 변형한 것이다.

$$b(x) = \begin{cases} b_c \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) & -2\text{ m} \leq x \leq 2\text{ m} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (9)$$

여기에서 b_c 는 용기의 높이로 0.8이다. 또한, 경계 조건에 따라 다섯 가지 경우에 대해 비교하였으나, 이 연구에서는 그 중에서 정수(Test A), 상류(Test B), 천이류(Test C), 그리고 도수(Test D)의 경우를 선정하였으며, Table 1에 정리하였다. 표에서 q 는 단위 유량 그리고 η 는 수위이다.

모의를 위해 전 구간을 200개의 균일한 격자로 분할하였으며, 직전 단계의 수심에 대한 상대오차가 1×10^{-6} 보다 작으면 정상 상태에 도달한 것으로 간주하였다. 동등한 비교를 위해 모든 경우에서 시간 간격을 0.01 s로 고정하였다.

Figs. 2~5에 Bernoulli 식에 의한 기준해와 함께 계산 결과 중에서 단위 유량(위)과 수위(아래)를 보였다. 그림

Table 1. Boundary Conditions for 1D Steady Flows over a Bump

Test	Upstream BC	Downstream BC
A	$q = 0.0\text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$	$\eta = 1.0\text{ m}$
B	$q = 1.0\text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$	$\eta = 1.7\text{ m}$
C	$q = 0.4\text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$	Transmissive
D	$q = 0.4\text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$	$\eta = 0.75\text{ m}$

Fig. 2. 1D Steady Flows over a Bump: Test A (still water)

Fig. 3. 1D Steady Flows over a Bump: Test B (subcritical flow)

Fig. 4. 1D Steady Flows over a Bump: Test C (transcritical flow)

에서 보이듯이, 경사면에서 흐름이 상류인 경우 SGM, 사류인 경우 DGM에 의한 결과가 더 우수함을 알 수 있다. 도수가 발생하는 경우에는 모든 방법에서 유량의 변동이

Fig. 5. 1D Steady Flows over a Bump:
Test D (hydraulic jump)

커지고 수위가 부정확해진다. WSDGM과 SDGM의 차이는 육안으로 구분하기 어려우므로 기준해에 대한 수위와 단위 유량의 RMS 오차(Root-Mean-Square error)를 구하여 Table 2에 정리하였다. 표에서 드러나듯이, DGM과 SGM의 장점이 WSDGM과 SDGM에 의한 결과에 고루 반영되어 있으며, 두 방법의 차이는 미미하다.

3.2 체적-수면 관계

Begnudelli and Sanders (2006)는 경사면에서 PSC에 대한 수심을 격자 내 물의 체적을 격자의 면적으로 나누는 것으로 간주하였다. 따라서 삼각형 PSC에 대한 VFR는

Fig. 6에 보인 바와 같이 격자 내 수위가 격자의 세 꼭짓점 중에서 중간 표고(b_2)보다 낮은 경우(Lower PSC, LPSC)와 높은 경우(Upper PSC, UPSC)로 나누어 다음과 같이 표현된다(Begnudelli and Sanders, 2006).

$$\eta = \begin{cases} b_1 + \sqrt[3]{3h(b_2 - b_1)(b_3 - b_1)} & b_1 < \eta \leq b_2 \\ (-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2})/2 & b_2 < \eta < b_3 \\ \bar{b} + h & \eta \geq b_3 \end{cases} \quad (10)$$

여기에서 $\bar{b}$ 는 꼭짓점 표고의 평균이고 γ_1 과 γ_2 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= b_3 - 3b_1, \\ \gamma_2 &= 3hb_1 - 3hb_3 - b_3b_2 + b_1b_2 + b_1^2 \end{aligned} \quad (11)$$

또한, 두 점, (x_1, b_1) 과 (x_2, b_2) 로 이루어지는 1차원 격자에서 VFR는 보다 간단하여 다음과 같다.

$$\eta = \begin{cases} b_1 + \sqrt{2h(b_2 - b_1)} & b_1 < \eta < b_2 \\ \bar{b} + h & \eta \geq b_2 \end{cases} \quad (12)$$

VFR에 의해 PSC에 대한 세 가지 개선점을 확인할 수 있다. 첫 번째는 초기에 수위가 주어질 때 그에 대응되는 PSC 내 조각적 상수인 수심을 VFR로 결정하므로 Riemann 문제에서 수심에 대한 초기 조건을 정확하게 부여할 수 있다는 것이다. DGM에서는 이것으로 PSC가 고려되나, 기법의 한계로 선평형성이 충족되지 않는다는. 두 번째는

Table 2. RMS Errors for η (m) and q (m³/s/m) in 1D Steady Flows over a Bump

Methods	Test A		Test B		Test C		Test D	
	η	q	η	q	η	q	η	q
WSDGM	0.0E+00	2.2E-17	5.5E-04	1.3E-03	3.4E-02	4.8E-02	3.8E-02	5.9E-02
SDGM	0.0E+00	2.2E-17	5.5E-04	1.3E-03	3.4E-02	4.8E-02	3.8E-02	5.9E-02
DGM	3.3E-05	2.8E-03	9.8E-04	3.3E-03	3.4E-02	5.1E-02	3.7E-02	6.6E-02
SGM	0.0E+00	2.2E-17	5.5E-04	1.3E-03	6.4E-02	5.3E-02	4.0E-02	6.4E-02

Fig. 6. Partially Submerged Cells

SGM에 의한 선형 재구축에서 Eq. (3)에 의해 갱신되는 수심으로부터 PSC 내 조각적 상수인 수위를 정확하게 산정할 수 있다는 점이다. 세 번째는 바닥 경사 생성항에서 수심이 정확하게 결정되는 것이다.

선평형성이 충족되기 위해서는 PSC에 대한 바닥 경사 생성항이 흐름을 경사항의 대척이 되어야 하므로 생성항의 수심이 정확하게 산정되는 것이 중요하다. 예를 들어, 1차원 생성항($-ghb_x$)에서 바닥 경사(b_x)는 격자의 잠김 여부와 무관하게 이미 결정되어 있으므로 PSC에서는 바닥 경사가 고려된 수심(h)의 정의가 선평형을 위한 관건이 된다. 그런데 정수 상태의 PSC에 대해 Eq. (12)를 수심에 대해 풀어 Eq. (3)에 대입해보면, SGM에 의한 흐름을 경사항과 바닥 경사 생성항이 정확하게 상쇄됨을 확인할 수 있다. 따라서 1차원 문제에서 PSC에 대한 SGM의 선평형성 충족은 VFR 없이 달성되기 어렵다. 그러나 2차원 문제의 선평형성은 1차원의 경우와 달리 VFR (Eq. 10)만으로는 쉽게 충족되지 않는다(이에 대해서는 4.1 절에서 다룬다).

Fig. 7은 Table 1의 Test A에서 하류 경계가 $h=0.5$ m 인 정수(Test E)에 대해 PSC의 고려 여부에 대해 비교한 것이다. PSC를 고려하지 않을 때, 비록 단위 유량의 작은 변동이지만, 선평형성이 충족되지 않음을 알 수 있다. 이 경우, 수위와 단위 유량에 대한 RMS 오차는 각각 1.19×10^{-5} m와 2.64×10^{-5} m³/s/m였다. PSC가 고려된 경우의 RMS 오차는 모두 영이며, 앞서 살펴본 대로, 정확한 선평형이 이루어지는 것이 당연하다.

Table 1의 Test A에서 초기 수위는 그대로 두고 하류 경계에서 $h=0.0$ m으로 설정하여 1,000 s 동안 모의하는 경우 (Test F)에 대해서도 검토하였다. 용기의 하류에서 물이 급작스럽게 빠져 물이 완전히 사라지고, 그 상류에서는 월류에 의해 수위가 낮아지다가 용기의 정점에 맞추어 정체되어야 할 것이다. 이러한 예상은 Fig. 8에서 그대로 재현된다.

Fig. 7. 1D Steady Flows over a Bump: Test E (emergent bump)

용기의 하류에서 물이 빠질 때 잠김 전선(wetting front) 인근에서 매우 작은 수심이 계산될 수 있으며, 그로 인해 해가 불안정해질 수 있는 것으로 알려져 있다(Bradford and Sanders, 2002; Brufau et al., 2004; Begnudelli and Sanders, 2006; Aureli et al., 2008a; and Pu et al., 2012). PSC를 고려했을 때, Test F에 대해 격자 내에서 1 μm의 수심까지 해의 불안정 없이 계산됨을 확인하였으나(이때, $\Delta t=0.005$ s), 수심이 물 분자 하나의 크기보다 작아지므로 물리 법칙에 위배된다. 따라서 1 μm를 격자 내 수심에 대한 실용적인 한계치로 보았다.

4. 2차원 비정상 흐름

4.1 2차원 문제에 대한 선평형성 검토

비직교 격자체계에서 SGM의 선평형성이 충족되기 어렵지 않은데, 그것은 생성항에 나타나는 바닥 경사의 결정에서 근사에 따른 오차가 발생되기 때문이다(Bradford and Sanders, 2002; Valiani et al., 2002). 이 문제를 해결하기 위해 Valiani and Begnudelli (2006)는 다음과 같은 DFB를 제안하였다.

$$\mathbf{S}_0 = \nabla \cdot \mathbf{B} \big|_{\eta=\bar{\eta}} \quad (13)$$

여기에서 $\bar{\eta}$ 는 격자 내에서 일정한 값(예를 들어, 평균 수위)이고 $\mathbf{B}$ 는 다음과 같은 벡터이다.

$$\mathbf{B} = \left[0, \frac{1}{2}gh^2, \frac{1}{2}gh^2 \right]^T \quad (14)$$

즉, 바닥 경사 생성항을 격자의 각 변에서 정수압의 효과로 나타낸 것이다. Gauss의 발산 정리로부터 다음을 얻는다.

$$\iint_{\Omega} \mathbf{S}_0 d\Omega = \iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{B} \big|_{\eta=\bar{\eta}} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \big|_{\eta=\bar{\eta}} \cdot d\mathbf{n} \quad (15)$$

Fig. 8. Drain and Stagnation of 1D Flows over a Bump (Test F)

Eq. (15)에 의해 Eq. (3)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{U}}_i = (1/A_i) \sum_{k=1}^m \mathbf{T}(\theta_k)^{-1} (\mathbf{B}_k - \mathbf{F}_k) L_k + \mathbf{S}_{f_i} \quad (16)$$

따라서 마찰이 없고($\mathbf{S}_f = \mathbf{0}$) 정수인 상태($\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$, $u = v = 0$, 그리고 $\bar{\eta} = \eta$)에서 흐름률 경사향과 바닥 경사 생성향이 정확하게 상쇄된다.

Maurel (1997)이 제안한 불규칙 하도(Fig. 9)에 대해 Valiani and Begnudelli (2006)는 사변형 격자로 구성하여 DFB 기법에 의한 선평형성의 충족을 확인하였다. 같은 문제에 대해 Fig. 9b와 같이 하폭의 변화가 최소한도로 고려되는 거친 삼각형 격자로 나누어 PSC의 고려와 DFB 기법의 적용 여부에 따른 선평형성을 검토하였다. 초기 수위를 6m로 두어 일부 바닥이 드러난 상태에서 수위와 x 방향의 운동량, $q_x (= hu)$ 의 변화를 Fig. 10에 보였다. 정상 상태로 수렴 조건은 1차원 정상 흐름의 경우와 동일하게 부여하였다. 그림에서 알 수 있듯이, DFB 기법이 적용되지 않은 경우 q_x 의 변동이 비교적 크다. 수위의 경우에는 육안으로는 큰 차이가 없으나, PSC의 고려 여부에 따라 계산의 차이가 있다. 예를 들어, $x=350\text{m}$ 와 $x=400\text{m}$ 사이에서 차례로 UPSC와 LPSC가 발생되는데(Fig. 9b에서 굵은 선), PSC가 고려되지 않은 경우, UPSC에 물이 차있지만 LPSC에는 물이 없는 것으로 간주된다. 그림에서 PSC 부근을 일부 확대해보면, PSC가 고려될 때에만 LPSC에서 수위가 결정되는 것을 확인할 수 있다.

수위와 q_x 에 대한 RMS 오차를 Table 3에 정리하였으며, 오차의 계산에서 바닥이 완전히 드러난 격자는 제외되었다. 가장 거친 격자(표에서 두 번째 열)에 대해 DFB 기법이 적용되었을 때, 초기 수위가 정확하게 유지된다. q_x 에 대한 RMS 오차도 해당 변수에 설정된 2배 정밀도(double precision)보다 작아 Valiani and Begnudelli (2006)의 언급처럼 적용된 기법의 오차로 볼 수 없다. 따라서 불규칙 지형에 대한 2차원 비직교 격자체계에서 DFB 기법에 의한 선평형성이 확인되며, 바닥 경사의 결정이 필요 없으므로 부가되는 계산 비용도 기존의 방법에 비해 크지 않을 것으로 보인다.

계산 영역에 대해 비교적 균일한 격자가 더 촘촘하게 구성될 수 있다면, 비록 선평형성은 충족되지 않더라도, 계산 오차를 줄일 수 있을 것으로 기대할 수 있다. 그러나 세분된 격자에 대한 RMS 오차(Table 3에서 세 번째 열)

Fig. 9. Topography of Irregular Channel and Computational Mesh

Fig. 10. Still Water in the Irregular Channel without and with using DFB (the coarsest mesh)

Table 3. RMS Errors for η (m) and q_x ($\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$) of Still Water in the Irregular Channel

Schemes applied		Coarsest mesh		Refined mesh	
DFB	PSC	η	q_x	η	q_x
×	×	3.12E-06	1.14E-03	2.08E-06	3.24E-04
×	○	3.09E-06	1.12E-03	2.07E-06	3.23E-04
○	×	0.00E+00	3.41E-17	0.00E+00	2.41E-06
○	○	0.00E+00	3.37E-17	0.00E+00	1.36E-16

를 살펴보면, 그러한 기대에 미치지 못함을 알 수 있다. 표에서 세분된 격자는 한 변의 길이를 약 5m로 줄인, 비교적 균질한 삼각형 격자로 Fig. 9의 불규칙 하도를 보다 촘촘히 분할한 것이다. 격자의 총수는 약 4,400개로 Fig. 9b의 가장 거친 격자에 비해 약 76배이다. 세분된 격자에서 DFB 기법이 적용되지 않은 경우에서 PSC의 고려 여부에 따른 차이는, 가장 거친 격자에 대한 결과와 마찬가지로, 거의 없다. 즉, 2차원 문제에서 PSC만 고려하는 것은 해의 정확도 개선에 효과가 거의 없음을 의미한다.

그런데 PSC에 대한 고려 없이 DFB 기법만 적용된 경우에 수위는 정확하나 q_x 에 대한 RMS 오차가, 가장 거친 격자에 대한 결과와 달리, 비교적 크게 나타난다. 이것은 무시된 LPSC의 수위(또는 수심)가 반영되지 않기 때문이다. 즉, LPSC와 공유된 변의 한 쪽(LPSC)에서 물이 없는 상태로 Riemann 해(흐름률)가 구해지나, DFB의 계산에는 단순히 해당 격자의 수위에서 그 변의 표고를 뺀 수심이 고려되므로 선평형이 이루어지지 않을 수 있다(가장 거친 격자에서 q_x 에 대한 RMS 오차가 매우 작은 것은 UPSC와 LPSC 사이의 변에서 표고가, 우연하게도, 수위보다 높아 흐름률과 DFB 계산에서 제외되었기 때문이다). 그러나 PSC의 고려와 DFB 기법의 적용이 둘 다 고려되었을 때에는, 가장 거친 격자의 경우와 마찬가지로, 초기 수위가 정확하게 유지되고 q_x 에 대한 RMS 오차도 2배 정도에 근접된다. 따라서 2차원 경사면에서 비직교 격자에 대한 선평형성이 충족되려면 DFB 기법의 적용은 물론 PSC의 고려도 동시에 요구된다.

4.2 삼각형 턱을 지나는 댐 붕괴 흐름

Soares-Frazão (2007)는 Fig. 11과 같이 폭 0.5m, 길이 5.6m의 실험 수로에서 상류 저수지와 하류 웅덩이에 물을 채워 저수지의 붕괴에 의한 흐름이 높이 0.065m의 삼각형 턱(bottom sill)을 지나는 실험을 수행하였다. 45s 동안의 실험에서, 그림에 표시된 바와 같이, 턱의 상류(G3: $x=3.935$ m), 하류(G2: $x=4.925$ m), 그리고 웅덩이의 하류 벽 근처(G1: $x=5.575$ m)에서 저항식 수위계로 측정하였으며, 턱이 있는 구간에서는 종방향 수면변화를 살펴보기 위해 고속 CCD 카메라를 이용한 촬영도 병행하였다. 턱이 없는 수

Fig. 11. Experimental Set-up and Initial Conditions (in meters)

로에 대한 실험을 통해 Manning 계수, $n=0.011$ 로 산정하였다(Soares-Frazão, 2007).

제시된 실험조건에 맞추어 모의하기 위해 계산영역을 약 13,600개의 삼각형 비구조 격자로 구성하였으며, 격자 한 변의 길이는 약 0.05m이고 턱이 있는 구간에서는 약 0.01 m로 더 세분하였다. 비교를 위해 0.01 m 간격의 1차원 격자도 구성하였다.

모의에서 $1\mu\text{m}$ 보다 작은 수심에 대한 제한이 있음에도 불구하고, 마찰이 적용될 경우, 그 보다 큰 수심에서도 해가 불안정해질 수 있다(Bradford and Sanders, 2002). 사실, 마찰에 의한 생성항을 나타내는 Eq. (1g)는 당초에 실제 하천을 1차원 정상 등류로 가정하여 고안된 경험식(Woo, 2001)이므로 부정류 모의에서 그 정도로 작은 수심에 적용되기에는 한계가 있을 수밖에 없다. 따라서 해의 안정을 위해 마찰의 적용이 배제되는 수심의 상한, h_f 를 설정할 필요가 있다(즉, 수심이 h_f 보다 작을 때는 마찰이 없는 흐름으로 간주한다). 시행착오를 통해 h_f 를 산정하며, 이 문제에 대해서는 $h_f=0.05\text{mm}$ 로 두었다.

Fig. 12는 디지털 영상분석에 의한 수면곡선의 변화를 모의 결과와 함께 나타낸 것이다. 댐 붕괴에 의해 흐름은 저수지로부터 분류(jet)처럼 진행되다가(Fig. 12a) 턱의 역경사면에 의해 반사되어 단파(bore)의 형태로 그 상류로 전파되고, 월류된 일부는 턱의 순경사면에 의해 가속되어 웅덩이에서 도수와 단파가 발생되나 하류 끝의 벽에서 반사된다(Figs. 12b and 12c). 턱의 상류와 하류에서 수면의 큰 요동은 어느 정도 잦아드나(Fig. 12d), 초기에 턱의 역경사면에 반사되었던 단파가 저수지 상류 끝의 벽에서 반사되어 되돌아온다(Fig. 12e). 이러한 과정은 운동 에너지가 소진될 때까지 계속될 것이다.

모의된 수면곡선은 영상분석 결과와 대체로 일치하나, 초기에 턱에 의한 반사로 발생하는 단파가 정확하게 예측되지 않으며, 그 영향은 상류 끝에서 다시 반사되어 되돌아오는 단파에도 미친다. 이것은 턱의 전면에서 역경사를 오르는 흐름과 반사되는 흐름이 서로 뒤엉키는 3차원적인 현상이 2차원 모의에서 재연되기에 한계가 있기 때문이다. 또한, 처음으로 턱에 반사되는 양이 실험에 비해 더 많고 턱을 넘어 월류되는 양은 비교적 적어 보인다(Fig. 12c).

Fig. 13은 각 측정점에서 1차원과 2차원 모의에 의한 수위를 실험 결과와 함께 나타낸 것이다. 1차원과 2차원 모의에서 수위의 차이는 확대하여 보지 않으면 구분하기 어려운 정도로 미미하다. 이것은 폭이 일정한 직선 수로에서 종방향 흐름이 지배적인 실험의 특성 때문이다.

측점 G3에서 수위의 시간 변화를 살펴보면, 1s경에 댐

Fig. 12. Water Surface Profiles of Experiment (digital imaging) and Simulation

Fig. 13. Hydrographs of Experiment (resistive gauges) and Simulation

붕괴 흐름이 최초로 감지된 이후 3s경에 턱에 의한 반사로 수위가 급상승되면서 큰 규모의 수위 요동이 나타나고 상류로 전파와 하류로 월류 덕분에 수위는 잦아든다(Fig. 12d). 15s경에 저수지 상류의 벽에서 반사된 단파가 되돌아와 두 번째 수위의 급상승이 있으나, 이후 침두 수위와 요동의 진폭은 점차 줄어들고 평균적인 수위는 상승된다. 모의에서 수위 변화의 전반적인 경향은 실험 결과와 잘

일치하며, 반사에 의해 급상승되는 시각이 큰 오차 없이 예측된다. 그러나 턱의 전면에서 반사에 의해 요동치는 수위를 따라가지 못하고 평균적인 거동에 그치는데, 앞에서 언급하였듯이, 2차원 모의의 한계로 보인다. 수위를 턱의 높이와 비교해보면, 40s 이후의 마지막 수위 상승에서 수위의 침두가 턱의 높이보다 낮으나, 측점의 위치가 경사면이 시작되는 위치이고 하류의 측점에서 같은 시간대

에 작은 규모의 침두가 나타나는 것으로 보아 웅덩이로 월류는 계속되는 것으로 보인다.

측점 G2에서는 2s와 4s 사이에 수위의 급한 승강이 나타나는데, 이것은 월류로 발생된 도수가 계속되는 강한 월류에 의해 즉시 하류로 이동되었기 때문이다(Figs. 12b and 12c). 이후 웅덩이가 하류의 벽과 턱의 후면에 의한 반사파들의 중첩과 마찰에 의해 수위의 요동은 점차 가라앉으나, 계속되는 월류에 상응하여 작은 규모의 침두가 주기적으로 나타난다. 모의 결과를 살펴보면, 초기 월류의 도착과 도수에 의한 수위의 정점과 저점이 실험 결과와 부합된다. 이후 미세한 요동을 따라가지는 못하나 주기적으로 나타나는 작은 규모의 침두에 대해서는 어느 정도 일치하는 것으로 확인된다. 15s 이후 실험 결과에 비해 수위가 전반적으로 약간 더 높게 나타나는 이유는 두 번째 단파에서 월류량이 실제보다 그 만큼 더 많았기 때문인 것으로 추정된다.

웅덩이가 하류의 벽 근처(G1)에서 수위의 승강과 요동은 주로 턱의 후면과 하류의 벽에 의한 반사의 결과이며, 두 번째 수위 상승의 침두가 더 높은 이유는, Fig. 13(a)에서 보이듯이, 8s경까지 계속되는 월류 때문이다. 웅덩이의 벽 근처에 위치한 G1에서 반사되는 수위의 급상승 시각과 침두가 약 18s의 경우를 제외하고는 실험 결과와 거의 일치함을 알 수 있다. 다만, 침두 사이 나타나는 미세한 요동의 정확한 포착은 모의를 통해 이루어지지 않는다.

4.3 둥근 용기를 지나는 평면 2차원 댐 붕괴 흐름

Aureli et al. (2008b)은 Fig. 14와 같이 벽으로 둘러싸인 평면 수조에서 발생된 댐 붕괴 흐름을 공중에서 고해상도 디지털 카메라로 촬영하고, 수조의 가장자리에서 초음파 수위계로 측정한 값으로 영상을 보정하여 2차원 흐름 자료를 생성하였다. 저수지 하류에서 초기 수심의 유무 그리고 장애물의 유무와 잠김 여부(Fig. 14에서 잠기는 용기와 드러난 블록)에 따라 모두 네 가지 경우에 대해 실험이 이루어졌으며, 해당 조건은 Table 4에 정리하였다. 또한, Toro (2001)의 SLIC (Slope Limiter Centered Scheme)을 변의 길이가 5mm인 정사각형 격자에 대해 적용하여 실험 결과와 비교하였다.

Aureli et al. (2008b)은 저수지 하류에서 초기에 수심과

장애물이 없는 Test 1에 대해 SLIC으로 계산된 잠김 전선의 전파속도를 바탕으로 Manning 계수, $n=0.007$ 로 추정하였다. 이 연구에서도 같은 값을 적용하였으며, 해의 안정을 위해 $h_f=0.01$ mm로 두었다. Test 3은 저수지 하류에 둥근 용기를 좌안으로 붙여 비대칭이 되도록 설치한 경우로서 복잡한 흐름 양상이 기대된다. 이 연구에서는 Test 1에 대해 계산 영역을 한 변의 길이가 약 10mm인 삼각형 격자, 약 47,400개로 구성하였으며, Test 3에 대해서는 한 변의 길이가 약 5mm인, 약 250,700개의 삼각형 격자로 계산 영역을 분할하였다.

Test 1에 대해 이 연구(왼쪽)와 SLIC(오른쪽)에 의한 결과를 실험 결과(중앙)와 함께 Fig. 15에 비교하였다. 모의된 결과들이 실험 결과와 전반적으로 잘 부합됨을 알 수 있다. 초기인 0.46s에 실험과 모의 결과 사이에서 보이는 수심 분포의 상이한 형태는, Aureli et al. (2008b)이 지

Fig. 14. Main Dimensions (in centimeters) of the Experimental Facility (Aureli et al., 2008b)

Table 4. Test Cases of Aureli et al.'s Experiments (2008)

Test	Initial upstream water depth (m)	Initial downstream water depth (m)	Obstacle type
1	0.15	0.00	-
2	0.15	0.01	-
3	0.15	0.00	Submersible
4	0.15	0.00	Emergent

적한 바와 같이, 실험에서 댐 붕괴의 재현을 위한 수문 개방에 걸린 시간 지체(약 0.08 s)와 모의에서 급격한 수면 변화에 대한 천수방정식의 지배 한계 때문인 것으로 보인다. 하류 벽에 반사된 흐름 양상은 서로 다르나, 평균적인 거동은 비슷하게 나타난다. 흥미로운 것은 2.22 s와 2.92 s

에 측벽에 의한 반사로 흐름이 상류로 역류되는 현상이 실험에서 두드러지게 나타나는 것이다. SLIC에 의한 결과에서는 이러한 현상이 전혀 나타나지 않으나, 이 연구의 모의에서, 비록 작은 영역이기는 하나, 역류가 확인된다.

Fig. 16은 Test 3에 대한 결과를 비교한 그림이다. 모의

Fig. 15. Water Depth Contours for Test 1 at $t=0.46$ s, $t=1.16$ s, $t=1.51$ s, $t=2.22$ s, and $t=2.92$ s

Fig. 16. Water Depth Contours for Test 3 at $t=0.46$ s, $t=1.16$ s, $t=1.86$ s, $t=2.58$ s, and $t=4.77$ s

결과들은 실험 결과와 대체로 잘 부합되나, 흐름의 선단이 용기에 도달한 0.46 s의 경우에 다소 다른 양상을 보인다. 같은 시각에 Test 1에서 설명한 사유도 있겠으나, 1.16 s와 1.86 s의 용기 근처 수심 분포를 살펴보면 모의에서 용기에 의한 반사는 실험보다 작게, 용기를 넘는 월류는 비교적 크게 평가되는 측면도 있는 것으로 보인다. 이는 4.2 절의 삼각형 턱에서 나타나는 반사와 월류의 양상에 대한 설명과 상반되는 것처럼 보일 수 있다. 그러나 삼각형 턱의 높이가 둥근 용기에 비해 1.3배인 반면 전면 경사는 삼각형 턱(14/100)에 비해 둥근 용기(평균 40/100)가 2.8배 더 가팔라 둥근 용기에서 오히려 연직방향으로 흐름이 역전되는 3차원적인 현상이 더 강했을 것으로 추정된다. 이 또한 2차원 모의로 평가하기에 한계가 있다. 1.86 s와 2.58 s에 용기가 벽에 밀착된 좌안에 반사된 역류의 수심 분포가 SLIC에 의한 결과에서 그 영역이 매우 작은 데 비하여 연구에 의한 결과에서는, 실험의 결과보다는 그 규모가 작으나, 분명하게 드러난다. 벽에 의한 반사파의 역류는 Test 1에 대해서도 확인된 바 있다. 4.77 s의 수심 분포는 반사된 흐름이 뒤섞이는 혼돈 상태로서 실험 결과와 비교가 어려우나, 이 연구에 의한 결과가 SLIC에 의한 결과보다는 실험에 더 부합되는 것으로 보인다.

4.4 불규칙 바닥을 지나 경사면에 반사되는 가상의 부분 댐 붕괴 흐름

마지막으로, 실제 하상에 대한 모형의 적용성을 시험하기 위해 Fig. 17과 같이 300 m×200 m의 삼각형 벽으로 이루어진 영역에 대해 상류로부터 x 방향으로 100 m에서 y 방향으로 95 m와 170 m 사이의 부분 댐 붕괴(partial dam-break) 문제를 생각하였다. 표고가 0 m인 저수지의 초기 수심은 5 m이고 댐 붕괴 흐름이 물이 없는 하류의 불규칙 바닥($175 \text{ m} < x < 225 \text{ m}$)을 지나 경사면($250 \text{ m} < x \leq 300 \text{ m}$)에 반사되게 구성하여 바닥의 복잡한 변화에 대한 평가가 가능하도록 설계하였다. 경사면의 경사도는 1/25이고 불규칙 바닥과 경사면을 제외한 바닥은 저수지의 표고와 같고 평평하다(Fig. 17의 아래 그림 참조).

계산격자는 한 변이 약 3 m인 삼각형 비구조 격자로서 전체 계산영역이 약 13,600개의 삼각형으로 분할되었다. Fig. 18은 불규칙 바닥에서 요철의 분포를 보인 것으로 격자의 꼭짓점에서 표고를 -1 m와 0 m 사이에서 발생한 의사난수(pseudorandom number)의 값으로 두었다. 그림에서 보이듯이, 격자의 바닥은 급경사면으로 이루어졌으며, 경사도의 크기에서 평균은 0.18(표준 편차, 0.95)이고 가장 급한 경우에는 0.53을 넘는다. 부분 댐 붕괴로 발생한

흐름은 물이 없는 하류의 불규칙 바닥을 가로질러 경사면과 계산 영역을 둘러싼 벽에 반사될 것이다. 저수지의 초기 수위가 상당하므로 매우 복잡한 흐름이 예상된다. Manning 계수, $n=0.04$ 로 가정하였으며, 해의 안정을 위해 $h_f=5 \text{ mm}$ 로 두었다.

Fig. 19는 모의 결과를 시간 별로 나타낸 것이다. 그림에서 불규칙 바닥의 형태가 Fig. 18과 다르게 보이는 것은 격자의 꼭짓점이 아니라 중심에서 평균 표고를 나타낸 것이기 때문이다. 또한, 표면도를 그리는 과정에서 다소 평활화된 영향도 있을 것이다.

초기에 저수지에 가두어진 물(Fig. 19a)이 부분 댐 붕괴로 쏟아지면서 하류의 불규칙 바닥을 만나게 되고(Fig. 19b) 바닥의 요철에 의한 반사와 월류가 거듭되면서 상승된 수위에 의해 불규칙 바닥은 점점 잠식된다(Figs. 19c and 19d). 그 동안 흐름의 선단은 경사면에 도달하고 경사면과 벽에 반사되어 불규칙 바닥의 대부분을 채운 흐름(Figs. 19e and 19f)은 상류에서 계속되던 댐 붕괴 흐름과 합치면서 하류의 급격한 수위 상승으로 이어진다(Fig. 19g). 그 동안 저수지에서는 부분 댐 붕괴로 인한 갑작스런 수위 저하로 희유파(rarefaction wave)가 발생되어 저수지의 벽에 반사되고 전파된다. 이후 계산 영역을 둘러싼 벽에 의해 반사되는 파가 전체 계산영역을 가로지르며 전파되고 다시 벽에 반사되기를 반복하다가 결국, 마찰에 의해 운동 에너지가 줄어들면서 다소 안정되는 모습을 보인다(Fig. 19h). 이때, 수위의 평균은 1.75 m이고 그 표준편차는 0.0139 m로서 완전한 정상 상태에 도달된 것은 아니다.

모의 결과에서 알 수 있듯이, 개발된 모형으로 댐 붕괴 흐름에 의한 불규칙 바닥에서 요철의 잠김 그리고 경사면의 잠김과 드러남이, 물리 법칙에 위배됨이 없이, 잘 재연되는 것이 확인된다. 사실, 이러한 불규칙 바닥을 지나는 댐 붕괴 흐름에 대한 모의로서 이 연구가 최초의 시도는 아니다. Begnudelli and Sanders (2007)는 사변형 격자를 이용한 잠김과 드러남의 처리 기법을 시험하기 위해 네 개의 용기(mound)로 구성된 계산 영역에서 용기를 제외한 바닥에 대해 불규칙한 요철로 설정하여 모의한 바 있다. 이 때, 요철의 높이는 0과 0.1 m 사이의 난수로 결정되었는데, 사변형 격자에 대한 VFR가 불규칙 바닥에서도 제대로 작동되는 지를 시험하는 것이 주목적이었다. 또한, 바닥 마찰 생성항에 도입된 하상 저항에 의한 항력 계수의 설정에 대한 명시적 언급이 전혀 없어 마찰이 없는 바닥에 적용된 것으로 볼 수밖에 없다. 더욱이, 최악의 경우, 수심이 0.01 m보다 작으면 해가 불안정해진다고 보고하였다(Begnudelli and Sanders, 2007). 따라서 마찰이 있는 불규칙 바닥에 대

Fig. 17. Main Dimensions (in meters) of the Partial Dam-break Simulation

Fig. 18. Roughnesses in an Irregular Bottom

Fig. 19. Water Surface Evolution of Partial Dam-break Flows over Irregular and Sloping Bottoms

해 안정적인 모의가 가능한 이 모형의 우수성이 확인되며, 실제 하천에 대한 이 모형의 적용성이 크게 기대된다.

5. 결 론

고르지 않은 바닥을 지나는 천수 흐름을 해석하기 위해 천수방정식의 흐름률 경사항에 대해 HLLL 기법과 MUSCL 그리고 바닥 경사 생성항에 대해 DFB 기법을 적용하였으며, PSC를 고려하기 위해 VFR를 이용하여 모형을 구성하였다. 천수 흐름에 대한 몇 가지 문제를 검토하였으며, 도출된 결론은 다음과 같다.

- 1) MUSCL에서 WSDGM을 보다 단순하게 고쳐도 원래의 방법과 정확도가 동등하고 지배방정식의 선평형성 또한 충족되는 것을 포물선형 용기를 마찰 없이 지나는 1차원 정상 흐름에 대해 확인하였다.
- 2) 1차원 PSC에 대해 VFR를 통해 선평형성이 정확하게 충족됨을 입증하였고 2차원 문제에서 그렇지 않음을 보였다.
- 3) 2차원 문제에서 DFB 기법에 의한 선평형을 재확인하였으며, 2차원 PSC에 대해서는 선평형성이 충족되지 않는 문제를 삼각형 격자에 대한 VFR를 이용하여 해소하였다.
- 4) 삼각형 턱과 둥근 용기를 지나는 2차원 댐 붕괴 흐름에 대한 모의에서 실험실 실험 결과와 대체로 부합되나, 2차원 모형으로 장애물에 의한 3차원적인 현상을 재연하기에 한계가 있었다.
- 5) 부분 댐 붕괴 흐름에 대한 모형의 적용에서 경사면의 잠김과 드러남은 물론, 불규칙 바닥에서도 요철의 잠김이 성공적으로 모의됨을 확인하였다.

이 연구에서 개발된 모형으로 고르지 않은 실제 하천 지형에서 물이 차고 빠지는 현상의 정확한 재연에 한걸음 다가갈 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

초고에 대한 교정과 논평을 해준 한국건설기술연구원의 박 문형 박사에게 감사한다.

참고문헌

Aureli, F., Maranzoni, A., Mignosa, P., and Ziveri, C. (2008a). "A weighted surface-depth gradient method for the numerical integration of the 2D shallow water

equations with topography." *Advances in Water Resources*, Vol. 31, pp. 962-974.

Aureli, F., Maranzoni, A., Mignosa, P., and Ziveri, C. (2008b). "Dam-break flows: acquisition of experimental data through an imaging technique and 2D numerical modeling." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 134, pp. 1089-1101.

Batten, P., Lambert, C., and Causon, D.M. (1996). "Positively conservative high-resolution convection schemes for unstructured elements." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 1821-1838.

Begnudelli, L., and Sanders, B.F. (2006). "Unstructured grid finite-volume algorithm for shallow-water flow and scalar transport with wetting and drying." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 132, pp. 371-384.

Begnudelli, L., and Sanders, B.F. (2007). "Conservative wetting and drying methodology for quadrilateral grid finite-volume models." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 133, pp. 312-322.

Bermudez, A., and Vázquez, M.E. (1994). "Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms." *Computers & Fluids*, Vol. 23, pp. 1049-1071.

Bradford, S.F., and Sanders, B.F. (2002). "Finite-volume model for shallow-water flooding of arbitrary topography." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 128, pp. 289-298.

Brufau, P., García-Navarro, P., and Vázquez-Cendón, M.E. (2004). "Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 45, pp. 1047-1082.

George, D.L. (2004). Numerical approximation of the nonlinear shallow water equations with topography and dry beds: a Godunov-type scheme. MS. thesis, University of Washington.

George, D.L. (2008). "Augmented Riemann solvers for the shallow water equations over variable topography with steady states and inundation." *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 3089-3113.

Goutal, N. (1997). "Test case 2: steady state validation." Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation, Edited by Goutal, N., and Maurel, F., IAHR,

- Lisbon, Portugal, pp. 13-17.
- Hubbard, M.E., and García-Navarro, P. (2000). "Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients." *Journal of Computational Physics*, Vol. 165, pp. 89-125.
- Hwang, S.-Y., and Lee, S.H. (2011). "An application of the multi-slope MUSCL to the shallow water equations." *Journal of Korea Water Resources Association*, Vol. 44, pp. 819-830(in Korean).
- Hwang, S.-Y., and Lee, S.H. (2012). "An application of the HLL approximate Riemann solver to the shallow water equations." *Journal of Korea Society of Civil Engineers*, Vol. 32, No. 1B, pp. 21-27(in Korean).
- Jeong, W., and Kim, K.H. (2011). "A study on inundation simulation in coastal urban areas using a two-dimensional numerical model." *Journal of Korea Water Resources Association*, Vol. 44, pp. 601-617(in Korean).
- Kim, D.H., and Cho, Y.S. (2005). "An improved surface gradient method for the computation of hyperbolic-type shallow-water equations on irregular bathymetry." *Journal of Korea Society of Civil Engineers*, Vol. 25, No. 3B, pp. 223-229(in Korean).
- Kim, T.H., Han, K.Y., and Kim, B.H. (2011). "Treatment of the bed slope source term for 2-dimensional numerical model using quasi-steady wave propagation algorithm." *Journal of Korea Water Resources Association*, Vol. 44, pp. 145-156(in Korean).
- Lee, K.S., and Lee, S.-T. (1988). "Two-dimensional finite-volume unsteady-flow model for shocks." *Journal of Korea Water Resources Association*, Vol. 31, pp. 279-290(in Korean).
- LeVeque, R.J. (1998). "Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm." *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, pp. 346-365.
- LeVeque, R.J. (2002). Finite volume method for hyperbolic problems. Cambridge University Press.
- Maurel, F. (1997). "Test case 1: momentum equation source terms calculation-1D codes." Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation, Edited by Goutal, N., and Maurel, F., IAHR, Lisbon, Portugal, pp. 2-5.
- Pu, J.H., Cheng, N.-S., Tan, S.K., and Shao, S. (2012). "Source term treatment of SWEs using surface gradient upwind method." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 50, pp. 1-9.
- Soares-Frazão, S. (2007). "Experiments of dam-break wave over a triangular bottom sill." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 45, pp. 19-26.
- Toro, E.F. (2001). Shock-capturing methods for free-surface shallow flows. John Wiley & Sons.
- Valiani, A., and Begnudelli, L. (2006). "Divergence form for bed slope source term in shallow water equations." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 132, pp. 652-665.
- Valiani, A., Caleffi, V., and Zanni, A. (2002). "Case study: Malpasset dam-break simulation using a two-dimensional finite volume method." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 128, pp. 460-472.
- van Leer, B. (1979). "Towards the ultimate conservative difference scheme V. a second order sequel to Godunov's method." *Journal of Computational Physics*, Vol. 32, pp. 101-136.
- van Leer, B. (2006). "Upwind and high-resolution method for compressible flow: from donor cell to residual-distribution schemes." *Communications in Computational Physics*, Vol. 1, pp. 192-206.
- Vázquez-Cendón, M.E. (1999). "Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry." *Journal of Computational Physics*, Vol. 148, pp. 497-526.
- Woo, H. (2001). River Hydraulics. Cheong Moon Gak Publishers(in Korean).
- Zhou, J.G., Causon, D.M., Mingham, C.G., and Ingram, D.M. (2001). "The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations." *Journal of Computational Physics*, Vol. 168, pp. 1-25.

논문번호: 12-102	접수: 2012.09.04
수정일자: 2012.10.04/10.11	심사완료: 2012.10.11