다물체계의 선형 동역학식을 이용한 대차의 진동 해석

Vibration Analysis of a Bogie Using Linearized Dynamic Equations of a Multibody System

강주석*

Juseok Kang

Abstract In this paper, linear dynamic equations are derived from nonlinear dynamic equations of constrained multibody systems using the QR decomposition method. The derived linear equations are applied to a railway vehicle bogie. The vibration characteristics of the railway vehicle are investigated by calculating the natural mode and transfer function of the bogie frame in relation to rail-roughness input. The main modes of the bogie were found below 35Hz, and the local modes above 198Hz. The magnitude of the vertical transfer function varied with the forward velocity due to vertical and pitch modes, which were influenced by the forward velocity. The magnitude of the lateral transfer function was negligibly small, and the mode in the longitudinal direction was excited for longitudinal transfer function regardless of the forward velocity.

Keywords : Linear dynamic equation, QR decomposition method, Multibody system, Bogie, Vibration characteristics

초 록 본 연구에서는 구속된 다물체계의 비선형 운동방정식으로부터 QR분해법을 이용하여 선형 운동방정식을 유도하는 방법을 제시하였다. 다물체계의 선형 진동 방정식을 철도차량 대차에 적용하여 대차의 고유 진동 모드를 구하고 레일의 변위 입력에 대한 대차프레임의 전달 함수를 구하여 대차의 진동 특성을 분석하였다. 대차의 고유 모드는 35Hz이하에서 나타났고 198Hz이상에서 국부모드가 계산되었다. 대차 프레임의 수직변위 전달함수는 수직변위 모드와 피치 모드가 속도에 영향을 받기 때문에 속도에 따라 변화하는 것으로 나타났다. 횡방향 전달함수는 매우 작게 나타났으며 전후방향 전달함수는 속도에 관계없이 전후방향 변위 모드가 주로 가진 되는 것으로 나타났다.

주요어 : 선형운동 방정식, QR 분해법, 다물체계, 대차, 진동특성

1. 서 론

최근 철도차량의 고속화, 고급화로 인해 차량의 진동 특성은 중요한 설계요소가 되고 있으며 진동 수준 또한 엄격하게 관리되고 있다. 진동 특성이 우수한 철도차량을 설계하고 제작하기 위해서는 철도차량의 진동 특성 분석이 선행되어야 한다. 또한, 철도 차량의 주행 특성을 결정하는 대차의 초기 설계에서부터 진동 특성을 고려하여 현가스프링 및 감쇠기 등의 설계가 이루어져야 진동 성능이 우수한 차량을 기대할 수 있다.

철도차량의 진동 해석 모델은 대부분 수직 진동 모델로 강체 등가모델을 이용하고 있다[1-3]. 강체 등가모델의 진동 관계식의 유도가 원활하기 때문이다. 그러나 이들 강체 모델은 차량 진동의 경향은 쉽게 파악할 수 있지만 차량의 기하학적 특성이 포함되지 않은 등가 파라미터로 이루어져 차량 설계에 직접 응용할 수 없는 한계가 있다.

철도차량의 다물체 동역학 모델은 3차원 기하학적 요소를 포함하여 현실적인 모델과 동일한 장점이 있다. 그러나 다

물체 동역학 모델은 비선형모델로서 진동 해석을 위해서는 선형모델로 변환이 필요하다. 이를 위한 첫번째 방법은 비선형 다물체 동역학 방정식으로부터 섭동법을 이용하여 선형방정식을 추출하여 얻어내는 방법이다[4,5]. 다른 하나는 미소변위를 가정하여 다물체계의 선형방정식을 뉴턴-오일러 방법을 이용하여 직접 유도하는 것이다[6,7].

선형 운동방정식은 구속조건을 제거한 독립좌표계로만 표현되어야 선형대수학적인 해법을 적용할 수 있다. 독립좌표계로 이루어진 선형 운동방정식을 구하기 위한 효율적인 좌표분할법이 QR 분해법이지만 이를 이용한 선형 운동방정식 유도는 아직 제시되지 않았다. 본 연구에서는 비선형 다물체 동역학 방정식의 효율적인 해법 중 하나인 QR 분해법을 이용하여 비선형 모델에서 선형모델을 얻을 수 있는 새로운 방법을 제시하고자 한다. 유도된 다물체계의 선형 진동 방정식을 주행 진동 특성을 결정하는 대차에 적용하여 자유진동해석과 강체 진동해석을 통해 철도차량의 진동특성을 분석하고자 한다.

2. 다물체계의 선형 운동방정식 유도

철도차량은 Fig. 1과 같이 여러 강체 요소가 스프링 및 부싱과 같은 탄성체와 감쇠기, 베어링과 같은 구속 조인트로

*Corresponding author.

Tel.: +82-70-8855-1651, E-mail : kjuseok@ut.ac.kr

©The Korean Society for Railway 2014

<http://dx.doi.org/10.7782/JKSR.2014.17.5.321>

연결된 다물체 동역학계로 모델링할 수 있다.

구속 조건을 가진 다물체계는 임의의 위치에서 다음과 같은 구속 조건식을 만족한다.

$$C(q, t) = 0 \quad (1)$$

여기서, t 는 시간이며 $q = [x \ y \ z \ \psi \ \phi \ \theta]^T$ 는 다물체계의 일반 좌표이다. 대부분의 다물체계에서의 구속조건식은 Fig. 1과 같이 한 점의 일치, 한 점에서 평행 및 수직 조건의 조합으로 구성되며, 이는 다음 식으로 표현된다.

$$C_1 = r^i + u^i - r^j - u^j = 0 \quad (2)$$

$$C_2 = v^i \cdot v^j = 0 \quad (3)$$

$$C_3 = v^i \times v^j = 0 \quad (4)$$

철도차량의 휠과 레일의 구속조건식은 변위의 일치와 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C_4 = r^w - r^r = 0 \quad (5)$$

$$C_5 = \begin{cases} t_1^w \cdot n^r \\ t_2^w \cdot n^r \end{cases} \quad (6)$$

위의 구속조건식을 포함하여 구속된 다물체계의 운동방정

Fig. 1 Multibody dynamics model

Fig. 2 Wheel-rail contact condition

식은 다음과 같이 나타낼 수 있다[8].

$$\begin{bmatrix} M & C_q^T \\ C_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e \\ Q_d \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서, M 은 질량 및 관성모멘트로 이루어진 관성텐서, λ 는 라그랑지 승수, Q_e 는 다물체계에 작용하는 외력을 나타내는 항, Q_d 는 구속 조건식을 시간에 대해 두 번 미분할 때 나타나는 2차항이다.

구속 조건이 존재하는 다물체계의 운동방정식인 식 (7)을 직접 적분하여 해를 구할 수 없으므로 독립좌표계만으로 구성되는 운동방정식을 구하여야 한다. 식 (1)의 구속조건식을 시간에 대해 미분하여 얻은 속도 구속 조건식은 다음과 같다.

$$C_q \dot{q} + C_t = 0 \quad (8)$$

위의 구속조건 자코비언은 독립좌표계 q_i 와 종속좌표계 q_d 로 나누어 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} C_{qd} & C_{qi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = -C_t \quad (9)$$

그러므로 다음식과 같이 일반좌표계는 독립좌표계만으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{q} = B \dot{q}_i \quad (10)$$

여기서 속도변환행렬 B 는 다음과 같다.

$$B = \begin{bmatrix} -C_{qd}^{-1} C_{qi} \\ I \end{bmatrix} \quad (11)$$

속도변환행렬을 구하는 방법은 여러가지가 있지만 그 중 QR분해법이 효율적인 방법으로 이용되고 있다.

구속 조건 자코비언식은 QR 분해법을 이용하여 행렬분해를 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다[9].

$$C_q^T = QR \quad (12)$$

이때 QR 분해법으로 얻어지는 행렬인 Q 는 다음과 같이 두 개의 행렬로 구성이 된다.

$$Q = [Q_1 \ Q_2] \quad (13)$$

여기서 두 행렬 Q_1 과 Q_2 는 다음과 같은 직교 성질을 가진다.

$$Q_1^T Q_2 = 0 \quad (14)$$

또한, R 는 다음과 같은 행렬로 구성이 된다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (15)$$

그러므로 QR분해법을 이용하여 식 (8)의 자코비언식을 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{C}_q^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (16)$$

위의 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{C}_q^T = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 \quad (17)$$

위의 식에 $\mathbf{Q}_2^T$ 를 전승하면 식 (14)로부터 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{Q}_2^T \mathbf{C}_q^T = \mathbf{0} \quad (18)$$

위의 식을 보면, $\mathbf{Q}_2$ 가 속도 변환 행렬 $\mathbf{B}$ 로 이용될 수 있음을 알 수 있다. 그러므로 QR 분해법을 수행하여 $\mathbf{Q}_2$ 를 구하면 구속 조건 자코비언식과 직교하는 행렬을 얻을 수 있다. QR분해법을 통해 일반좌표계는 다음과 같이 독립좌표계로 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (19)$$

위의 식을 미분하면 일반좌표계를 독립좌표계의 가속도항이 얻어진다.

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 + \gamma \quad (20)$$

식 (7)에 식 (20)을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{M}\gamma \\ \mathbf{Q}_d \end{bmatrix} \quad (21)$$

위의 식의 첫 번째 식의 양변에 $\mathbf{Q}_2^T$ 를 전승하고 정리하면 다음과 같은 독립좌표계의 가속도에 대한 식이 얻어진다.

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 = (\mathbf{Q}_2^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}_2^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M}\gamma) \quad (22)$$

위의 식은 독립좌표계의 가속도만으로 표현되어 적분이 가능하지만 일반좌표계는 항상 구속조건식을 만족해야 하므로 구속조건식을 포함하는 시스템의 운동방정식을 구하기 위해서 다음과 같이 상태변수를 나타내면 수치해를 효율적으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서 운동방정식을 적분하기 위해 상태변수 $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ 형태로 나타내면 식 (7)은 다음과 같이 비선형 미분방정식 형태로 쓸 수 있으며 이 식을 적분하여 수치해석 해를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (24)$$

식 (24)의 운동방정식은 비선형식의 형태를 띤다. 철도차량의 선형 진동해석을 수행하기 위해서는 이들 비선형식을 선형화하여야 한다.

QR분해법을 적용하면 식 (19)를 식 (24)에 대입하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \quad (25)$$

위의 식에서 좌측항의 전치행렬을 양변에 곱하면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (26)$$

독립좌표계로만 이루어진 위의 식을 미소 변위로 가정하여 변분하면 다음과 같이 선형화된 식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \delta \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_2 \\ \delta \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

위의 식에서 $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{q}$, $\partial \mathbf{f} / \partial \dot{\mathbf{q}}$ 는 다음과 같이 유한차분법을 이용하여 구하였다.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta x) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\Delta x}, \text{ for } x = q^k \text{ or } \dot{q}_i^k \quad (28)$$

식 (28)의 선형 운동방정식의 고유치를 구하면 자유진동해의 고유모드를 구할 수 있다. 위의 식에서 얻어지는 독립좌표계 고유모드는 식 (19)를 이용하여 일반좌표계의 고유모드로 변환할 수 있다. 강체 진동해는 레일 지면의 변위 입력을 적용하여 해를 구할 수 있다.

3. 해석결과

3.1 자유진동 해석

본 연구에서는 식 (27)의 해를 구하기 위하여 Matlab 함수 eig()를 이용하여 자유진동해를 구하였다[10]. Fig. 3의 ERRI 대차에 대하여 앞에서 유도한 선형 운동방정식을 이용하여 자유진동해석을 수행하였다. Table 1은 해석 대상 대

Fig. 3 Multibody dynamics model of a bogie

Table 1 Conditions for dynamic simulation

Part	Mass (kg)/Mass mom. of inertia (kg-m ²)
Bogie	2615/1722, 1476, 3067
Wheelset	1600/660, 160, 660
Axlebox	155/2.1, 5.6, 5.6
Spring stiffness (N/m)	6.2e+5, 6.2e+5, 7.3 e+5
Damping rate (N/m/sec)	2500
Bushing trans. rate (N/m)	3e+7, 5e+7, 3.3e+6
Busing rot. rate (N-m/deg)	349, 349, 175
Track gauge (m)	1.435
Tape-circle radius of wheel (m)	0.46

Table 2 Comparison of calculated vibration modes

Mode number	Proposed method		VI-Rail		Mode
	Undamped freq.[Hz]	Damping ratio	Undamped freq.[Hz]	Damping ratio	
1	6.52	1.21E-01	6.58	1.12E-01	Vertical
2	8.11	1.40E-01	8.24	1.29E-01	Roll
3	10.61	1.99E-01	10.99	1.87E-01	Pitch
4	12.58	2.00E-03	12.59	2.60E-03	Lateral
5	33.57	1.60E-08	34.51	1.99E-08	Yaw
6	35.13	2.60E-03	36.13	2.00E-03	Longitudinal
7	198.51	1.21E-02	200.08	1.07E-02	Axle box
8	203.79	9.10E-03	205.01	8.38E-03	Axle box
9	204.85	6.80E-03	206.03	6.42E-03	Axle box
10	206.48	7.80E-03	207.53	7.32E-03	Axle box

차의 제원을 보여준다. 각 강체의 질량과 질량 관성모멘트, 3축방향 스프링 강성과 감쇠비, 부싱의 강성, 트랙 게이지, 휠의 중심반경을 나타낸다.

위의 대차에 대하여 10개의 고유모드를 구한 결과를 Table 2에 보여주고 있다. 본 연구에서 제시한 해석 방법의 검증 을 위하여 해석 결과를 상용 프로그램인 VI-Rail을 이용한

Fig. 4 Mode shapes

고유치 해석결과와 비교하였다[11]. Fig. 4는 주요 모드 6개에 대한 모드 형상을 보여준다. 본 논문의 해석방법이 상용 프로그램의 결과와 일치하고 있음을 알 수 있다.

첫번째 고유 모드는 수직변위 모드로서 6.52Hz로 나타났

Fig. 5 Bogie side view

다. 두번째 고유 모드는 8.11Hz의 롤 모드이며, 셋째는 10.62Hz의 피치 모드이며, 넷째는 12.58Hz의 횡 방향 변위 모드이다. 다섯째와 여섯째는 요 모드와 전후방향 변위 모드로서 각각 33.57Hz, 35.13Hz로 앞의 모드들 보다 높게 나타났다. 여섯 개의 주요 모드가 35Hz 이상에서 나타났으며, 약 198Hz 이상에서 액슬 박스의 국부 모드가 나타났다.

레일과 휠의 불균일 특성은 주로 수직 방향에서 나타나므로, 6.42Hz의 수직변위 모드와 10.61Hz의 피치모드가 실제로 중요한 모드임을 알 수 있다. 또한, 해석 대상 대차는 탄성체를 제외하고 강체만을 고려할 때 진동 특성은 35Hz 이하가 중요함을 알 수 있었다.

3.2 강제진동 해석

주행 중 철도차량의 진동은 주로 레일과 휠의 불균일 특성에 의해 나타난다. 주행 중 이들 불균일 특성에 대한 대차의 가진 특성을 분석하기 위해 수직 입력 변위에 대한 대차의 전달함수 특성을 계산하였다. 이를 위해 본 연구에서는 Fig. 5와 같이 레일과 휠의 불균일 특성을 레일의 수직 변위 입력 $z_r(t)$ 로 보고 대차에 전달되는 전달 함수 해석을 수행하였다.

주행 중인 대차는 앞 차륜에 가해진 가진 입력이 시간 지연 이후에 뒷 차륜에 동일하게 입력 된다. 이를 고려하기 위하여 다음과 같은 시간 지연을 고려하여 동일한 가진을 뒷 차륜에 가한 경우의 전달함수를 구하였다.

$$T = \frac{WB}{V} \quad (29)$$

여기서 WB는 휠베이스이며, V는 전방속도를 의미한다.

Fig. 6은 레일의 수직 입력에 대한 보기 프레임의 수직방향 변위에 대한 전달함수의 크기와 위상차를 주파수와 속도 영역에 함께 표시한 그림이다. 주파수는 50Hz까지 나타내었으며, 속도는 200km/h까지 변화를 주었다.

Fig. 6을 보면 속도에 따라 전달함수가 변화함을 알 수 있다. 수직방향 변위 입력에 의해 수직변위 모드와 피치 모드가 속도에 영향을 받으며 전방속도에 따라 전달함수가 달라지지만 속도와 관계없이 대부분 10Hz 이하에서 전달함수가 크게 나타남을 알 수 있다. 35Hz위치에서 위상각의 변화가 나타났으나 크기에서는 차이가 적은 것으로 나타났다.

주파수영역에서 전달함수 특성을 보기 위해 전방속도

(a) Magnitude

(b) Phase angle

Fig. 6 Vertical transfer function for vertical displacement input

(a) Magnitude

(b) Phase angle

Fig. 7 Vertical transfer function for vertical displacement input at 100km/h

100km/h에서 전달함수를 구하였다. Fig. 7은 100km/h에서 전달함수의 크기와 위상차를 보여 주고 있다. 약 10Hz에서

Fig. 8 Magnitude of lateral transfer function for vertical displacement at 100km/h

(a) Magnitude

(b) Phase angle

Fig. 9 Longitudinal transfer function for vertical displacement input

피크치가 발생하였다.

레일의 수직입력에 대해 횡방향 변위의 전달함수는 매우 작게 나타났다. Fig. 8은 전방속도 100km/h에서 횡방향 변위에 대한 전달함수의 크기로서 크기가 무시할 정도로 작게 나타남을 알 수 있다. 12.58Hz의 횡방향 고유모드가 주로 가진됨을 알 수 있다.

Fig. 9는 레일의 수직 입력에 대한 보기프레임의 전후방향 변위에 대한 전달함수의 크기와 위상차를 주파수와 속도

(a) Magnitude

(b) Phase angle

Fig. 10 Longitudinal transfer function for vertical displacement input at 100km/h

영역에 함께 표시한 그림이다. Fig. 9에서 전달함수의 크기를 보면 속도에 관계없이 35.13Hz의 전후방향 모드가 주로 가진됨을 알 수 있다. Fig. 10은 전방속도 100km/h에서 전달함수 크기를 보여준다. Fig. 10(a)를 보면 전후방향 모드만 주로 가진됨을 확인할 수 있다. Fig. 10(b)는 전방속도 100km/h에서 전후방향 전달함수의 위상차를 보여주고 있다.

4. 결 론

구축된 다물체계의 비선형 운동방정식으로부터 QR분해법을 이용하여 선형 운동방정식을 유도하는 방법을 제시하였다. 선형 운동방정식을 대차에 적용하여 고유모드를 구하고 레일의 변위 입력에 대한 대차프레임의 전달 함수를 구하여 대차의 진동 특성을 분석하였다.

대차의 첫번째 고유모드는 수직변위 모드로 6.52Hz로 나타났다. 35.13Hz까지 대차 프레임의 주요모드가 나타났고 그 이후 198Hz부터 국부모드가 계산되었다. 해석 대상 대차는 탄성체를 제외하고 강체만을 고려할 때 진동 특성은 35Hz 이하가 중요함을 알 수 있었다.

레일과 차륜의 불균일 특성인 변위 입력에 대한 대차 프레임의 진동 전달 함수를 계산하였다. 대차 프레임의 수직 변위 전달함수는 수직변위 모드와 피치 모드가 영향을 받기 때문에 속도에 따라 변화하는 것으로 나타났으며 주로 10Hz 이하에서 전달함수가 크게 나타났다. 횡방향 전달함수는 매우 작게 나타났으며 전후방향 전달함수는 속도에 관계없이 35.13Hz의 전후방향 모드가 주로 가진 되는 것으로 나타났다.

후 기

이 논문은 2013년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(NRF-2010-0022205).

References

- [1] J. Zhou, G. Shen, H. Zhang, L. Ren (2008) Application of modal parameters on ride quality improvement of railway vehicles, *Vehicle System Dynamics*, 46, Supplement, pp. 629-641.
- [2] D. Gong, W. Sun, J. Zhou, X. Xie (2011) Analysis on the Vertical Coupled Vibration between Bogies and Metro Car Body, *Procedia Engineering*, 16, pp. 825-831.
- [3] A. Stribersky, F. Moser, W. Rulka (2002) Structural dynamics and ride comfort of a rail vehicle system, *Advances in Engineering Software*, 33, pp. 541-552.
- [4] N. Orlandea, M. A. Chase, D.A. Calahan (1977) A Sparsity-Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems—Parts I and II, *ASME J. Eng. Ind.*, 99, pp. 773-784.
- [5] D.H. Choi, J.H. Park, H.H. Yoo (2005) Modal analysis of constrained multibody systems undergoing rotational motion, *Journal of Sound and Vibration*, 280, pp. 63-76.
- [6] J.S. Kang, S. Bae, J.M. Lee, T.O. Tak (2003) Force Equilibrium Approach for Linearization of Constrained Mechanical System Dynamics, *Journal of Mechanical Design*, 125, pp. 143-149.
- [7] W. Jiang, X.D. Chen, X. Luo, Y.T. Hu, H.P. Hu (2011) Vibration Calculation of spatial multibody systems based on constrained-topology transformation, *Journal of Mechanics*, 27(4), pp. 479-491.
- [8] J.S. Kang (2012) A Three Dimensional Wheelset Dynamic Analysis considering Wheel-rail Two Point Contact, *Journal of the Korean Society for Railway*, 15(1), pp. 1-8.
- [9] S.S. Kim, Vanderploeg (1986) QR decomposition for state space representation of constrained mechanical dynamic systems, *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 108, pp. 183-188.
- [10] Using Matlab Ver. 6 (2004) The Mathworks Inc., Natick, MA, USA.
- [11] Kik, W., Moelle, D. (2000) Implementation of the wheel-rail element in ADAMS/Rail Ver. 10.1., In: 5th ADAMS/Rail User's Conference, Haarlem.

접수일(2014년 6월 19일), 수정일(2014년 7월 10일),
게재확정일(2014년 9월 2일)

Juseok Kang : kjuseok@ut.ac.kr
157 CheoldobangmulKwan-ro, Uiwang-si, Kyeonggi-Do 437-763,
Korea (Uiwang Campus)